

文章编号: 1008-1542(2008)04-0286-03

$1|p_j \sim \exp(\lambda_j)|E(\sum w_j D_j)$ 排序问题

王艳红, 张文娟

(西安工业大学数理系, 陕西西安 710032)

摘要: 为了能在多项式时间内解决随机排序问题, 针对一类特殊的单机随机排序问题 $1|p_j \sim \exp(\lambda_j)|E(\sum w_j D_j)$ 进行研究, 分别从不可中断情形和可中断情形证明, 得出由于指数分布的特性, 该问题均有多项式最优算法, 其最优算法为 WSEPT 规则。

关键词: 随机排序; 指数分布; 优先策略; 中断

中图分类号: O223 文献标识码: A

$1|p_j \sim \exp(\lambda_j)|E(\sum w_j D_j)$ scheduling problems

WANG Yan-hong, ZHANG Wen-juan

(Department of Mathematics and Physics, Xi'an Technological University, Xi'an Shaanxi 710032, China)

Abstract: In order to solve stochastic scheduling problems in polynomial time, we studied a class of single machine stochastic scheduling problems $1|p_j \sim \exp(\lambda_j)|E(\sum w_j D_j)$. It is proved that because of the specific property of exponential distribution, the problems have polynomial optimal algorithms in both nonpreemptive and preemptive situation. Its optimal algorithm is WSEPT rule.

Key words: stochastic schedule; exponential distribution; priority policy; preemption

在经济管理和计算机科学与工程领域的实际问题中, 经常有一些随机因素, 或者说有一些数据在进行决策之前是不确定的。这些随机变量在进行决策时只知道(或能统计出)其概率分布、数学期望和方差等。这类包含随机变量的排序问题即为随机排序问题^[1]。

对于随机排序问题, 经常通过其对应的确定性问题来分析其最优算法。虽然一些随机排序问题对应的确定性问题是 NP- 难的, 但相应的随机排序却有多项式最优算法。MICHAEL 在 1995 年^[2] 及唐恒永在 1999 年^[3] 分别对 $1|p_j \sim \exp(\lambda_j), d_j = d|E(\sum w_j C_j)$ 问题证明了 WSEPT 规则为其最优算法, 而该问题对应的确定性问题等价于背包问题^[4,5] 为 NP- 难问题。笔者在此基础上针对加工时间服从指数分布, 目标函数为 $E(\sum w_j D_j)$ 的单机随机排序问题进行研究, 分别从不可中断情形和可中断情形证明得出该随机排序问题有多项式最优算法。

1 问题描述与预备知识

1.1 问题描述

设有 n 个任务 T_1, T_2, \dots, T_n 在 1 台机器上加工, 任务 T_j 的加工时间为 p_j , 权因子为 $w_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 。加工时间 p_j 为随机变量, 它服从参数为 λ 的指数分布, 记为 $p_j \sim \exp(\lambda)$ 。目标函数为加权总误工的数学期

收稿日期: 2008-04-22; 修回日期: 2008-06-28; 责任编辑: 张 军

作者简介: 王艳红(1984-), 女, 甘肃陇西人, 硕士, 主要从事组合最优化方面的研究。

望, 记为 $E(\sum w_j D_j)$, 其中

$$D_j = \max\{C_j - d_j, 0\} = \max\{L_j, 0\},$$

式中: C_j 为任务 T_j 的完工时间; d_j 为任务 T_j 的工期; L_j 为任务 T_j 的误工时间。用三参数形式表示, 为 $\Pi p_j \sim \exp(\lambda_j) | E(\sum w_j D_j)$ 。

1.2 预备知识

定义 1^[1] 不可中断静态优先策略: 决策者在 0 时间对任务按某个优先规则排一个顺序表, 这个顺序表在加工过程中不能改变, 一旦处理机空闲, 选择顺序表中最前面的任务进行加工。

定义 2 可中断静态优先策略: 决策者在 0 时间对任务按某个优先规则排一个顺序表, 排顺序表时不考虑任务的准备时间, 这个顺序表在加工过程中不能改变, 一旦处理机空闲, 选择顺序表中最前面的任务进行加工, 如果顺序表中最前面的任务还没到达, 选择次前面的, 依次类推。如果有一个在顺序表中高于正在加工的任务的任务到达, 中断正在被加工的在顺序表中最低的任务, 加工最新到达的任务。

定义 3 不可中断动态优先策略: 一旦处理机空闲, 允许决策者决定安排哪一个任务进行加工, 在进行决策时, 可以使用当前的任何信息, 如等待加工的任务、正在其他处理机上加工的任务等信息, 然而决策者不能中断正在加工的任务。

定义 4 可中断动态优先策略: 在任何时刻, 允许决策者安排一个任务进行加工。决策者可以使用所得到的任何信息, 也可以中断正在加工的任务。

对随机排序问题, 把任务按 $w_i/E(p_i)$ 或 λw_i ($\lambda = 1/E(p_i)$) 非增的顺序排列称为加权最短期望加工时间优先(weighted shortest expected processing time first) 规则, 简记为 WSEPT 或 λw 规则。

2 最优算法及其证明

2.1 不可中断情形

随机排序问题

$$\Pi p_j \sim \exp(\lambda_j), d_j = d | E(\sum w_j D_j) \quad (1)$$

对应的确定性排序问题是 NP- 难的, 而随机排序问题却有多项式算法^[3]。

引理 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则对于任意 $s, t > 0$, 有

$$P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\},$$

即指数分布的无记忆性。该引理证明参见文献[6]。

定理 1 WSEPT 规则的不可中断静态优先策略, 不可中断动态优先策略和可中断动态优先策略是问题 (1) 的最优算法。

证明 首先证明 WSEPT 规则的不可中断静态优先策略的最优性。设处理机在某个时刻 t 空闲, 这时还有 2 个任务没有加工, 不妨设这 2 个任务的加工时间为 p_1 和 p_2 , 它们所对应的权数分别为 w_1 和 w_2 , 如果先排 T_1 后排 T_2 , 由引理, 2 个任务都误工的概率等于 p_1 大于 $(d - t)$ 的概率, 等于

$$P(p_1 > d - t) = \int_{d-t}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda(d-t)},$$

仅第 2 个任务误工的概率为 p_1 小于 $d - t$, 同时 $p_1 + p_2$ 大于 $d - t$ 的概率, 它等于

$$P(p_1 < d - t, p_1 + p_2 > d - t) = \int_0^{d-t} e^{-\lambda_2(d-t-x)} \lambda e^{-\lambda_1 x} dx.$$

用 $E(\sum w D(1, 2))$ 表示先排 T_1 后排 T_2 的期望加权总误工, 则

$$\begin{aligned} E(\sum w D(1, 2)) &= L_1 w_1 e^{-\lambda_1(d-t)} + L_2 w_2 (e^{-\lambda_1(d-t)} + \int_0^{d-t} e^{-\lambda_2(d-t-x)} \lambda e^{-\lambda_1 x} dx) = \\ &= (L_1 w_1 + L_2 w_2) e^{-\lambda_1(d-t)} + L_2 w_2 \int_0^{d-t} e^{-\lambda_2(d-t-x)} \lambda e^{-\lambda_1 x} dx. \end{aligned}$$

如果先排 T_2 后排 T_1 , 同理有

$$E(\sum w D(2, 1)) = L_2 w_2 e^{-\lambda_2(d-t)} + L_1 w_1 (e^{-\lambda_2(d-t)} + \int_0^{d-t} e^{-\lambda_1(d-t-x)} \lambda e^{-\lambda_2 x} dx) =$$

$$(L_1 w_1 + L_2 w_2) e^{-\lambda_2(d-t)} + L_1 w_1 \int_0^{d-t} e^{-\lambda_1(d-t-x)} \lambda e^{-\lambda_2 x} dx.$$

上述两式相减得

$$E(\sum wD(1, 2)) - E(\sum wD(2, 1)) = (L_2 \lambda w_2 - L_1 \lambda w_1) \frac{e^{-\lambda_1(d-t)} - e^{-\lambda_2(d-t)}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

易证, 存在这样的 $L = g(L_1, L_2)$, 使得上式可变为

$$E(\sum wD(1, 2)) - E(\sum wD(2, 1)) \geq L(\lambda w_2 - \lambda w_1) \frac{e^{-\lambda_1(d-t)} - e^{-\lambda_2(d-t)}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

当且仅当 $\lambda w_2 > \lambda w_1$ 时上式为正。因为这个结果对任意的 d 和 t 成立, 如果一个排序不是按 λw 非增的顺序排列, 可以通过交换前一个的 λw 小而后一个的 λw 大的相邻的任务来减少目标函数值。这就完成了 WSEPT 规则的不可中断静态优先策略最优性的证明^[7-9]。

归纳法也能证明不可中断动态优先策略的最优性。2 个任务的情况下, 不可中断动态优先策略和不可中断静态优先策略是相同的, 所以结论成立。假设对 $n-1$ 个任务结论成立。对 n 个任务的情况, 第 1 个任务完工以后, 按归纳假设, 后 $n-1$ 个任务 WSEPT 可中断动态优先策略是最优的。剩下的是, 只要证明第 1 个加工任务必须是 λw_j 值最大的任务。假设第 1 个任务不是 λw_j 值最大的任务, 根据归纳假设, λw_j 最大的任务一定第 2 个被加工, 利用不可中断静态优先策略最优性的证明类似的证明方法, 交换前 2 个任务的加工顺序就会减小期望目标函数值。这就证明了 WSEPT 规则的不可中断动态优先策略的最优性。

为证明 WSEPT 规则的可中断动态优先策略的最优性, 假设对某个任务有一个中断发生, 由于指数分布的无记忆性, 这个任务的剩余加工时间的分布与开始加工时间是相同的, 具有相同的数学期望 λ 。因此, 决策不依赖时间 t , 显然也不依赖工期 d 。这就证明了 WSEPT 规则的可中断动态优先策略的最优性。

2.2 可中断情形

考虑随机排序问题

$$1 | p_j \sim \exp(\lambda), prmp | E(\sum w_j D_j), \tag{2}$$

该问题对应的确定性问题是 $1 | prmp | \sum w_j D_j$, 是强 NP-难问题^[10]。

定理 2 可中断的 WSEPT 规则的可中断静态优先策略和可中断动态优先策略是问题(2)的最优算法。即在每一时刻, 在所有任务中, 找到 λw_j 值最大的任务进行加工。

证明 考虑一个确定的(或任意的)时刻 t , 用 q_j 记在时刻 t 前, 任务 j 未加工完的概率, 用 $E(S(t))$ 记在时刻 t 需要完成的所有任务的总期望误工。

由引理, 在时刻 t , 未完成的任务 j 的期望时间为 $1/\lambda$, 因此

$$E(S(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda_j}.$$

考虑任意一种可中断的静态优先策略。在静态优先策略中, 将相邻优先任务 k 与 j 互换, 则在时刻 t , 目标函数增长的期望率为

$$w_k q_k + w_l q_l + \sum_{j \neq k, l} w_j q_j.$$

要使上式最小, 则

$$\frac{q^k}{\lambda_k} + \frac{q^l}{\lambda} = E(S(t)) - \sum_{j \neq k, l} \frac{q_j}{\lambda_j}, \quad q^l = \lambda(E(S(t)) - \sum_{j \neq k, l} \frac{q_j}{\lambda_j} - \frac{q^k}{\lambda}).$$

由此, 得目标函数增长的期望率为

$$q^k(w_k - w_l \frac{\lambda}{\lambda_k}) + \lambda w_l (E(S(t)) - \sum_{j \neq k, l} \frac{q_j}{\lambda_j}) + \sum_{j \neq k, l} w_j q_j.$$

由于交换任务 k 和 l 的优先权仅影响 q_k 和 q_l , 所以期望率的后 2 项不变, q_k 的系数 $w_k - w_l \frac{\lambda}{\lambda_k}$ 为正当且仅当 $\lambda w_l \leq \lambda w_k$ 。

所以如果一个排序不是按 λw 非增顺序排列, 可以通过交换前一个的 λw 小而后一个的 λw 大的相邻任务来减少目标函数的值。这就证明了可中断的 WSEPT 规则的可中断静态优先策略的最优性。

(下转第 298 页)

数为 2, 输出节点数为 2, 隐层节点数为 2; 模糊神经网络中每个输入对应 3 个模糊集合。网络参数和权值的选取范围为 $v_{ji}, w_{xs}, L_{gj}: [-1, 1]$; $m_d, Z_{ig}: [-0.5, 0.5]$; $\alpha_l, \sigma_g: [0.01, 0.5]$ 。

而遗传算法的群体规模为 50, $p_c = 0.5, p_m = 0.07$ 。

系统输入信号采用单位阶跃函数, 初始参数和权值取随机值, 运行稳定后用稳定参数和权值代替随机值, 其系统响应曲线见图 5。可见, 该系统具有良好的控制性能。

4 结 语

笔者提出一种新型的模糊调节神经网络, 其拥有更大的自由度, 具有更强的非线性表现能力。将该网络用于非线性量化因子模糊控制器参数的自学习, 可以有效地解决非线性量化因子模糊控制器参数整定难的问题, 取得良好的控制效果。

参考文献:

- [1] LING S H, LEUNG F H F, LAM H K. An improved genetic algorithm based fuzzy-tuned neural network[J]. *Neural Systems*, 2005, 15(6): 457-474.
- [2] 梁艳春. 关于激励函数可调的人工神经网络模型的注记[J]. *计算机学报*, 1999, 22(12): 1335-1336.
- [3] 王惠芳, 刘朝英, 宋雪玲, 等. 基于遗传算法的模糊控制器参数优化[J]. *河北科技大学学报*, 2007, 28(4): 276-280.
- [4] 刘金琨. 先进 PID 控制及其 MATLAB 仿真[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.

(上接第 288 页)

易证, 中断的 WSEPT 规则的可中断的动态优先策略是最优的, 证明与定理 1 中第 2 部分类似, 在此不赘述。

3 结 语

分别从不可中断和可中断情形对加工时间服从指数分布, 目标函数为 $E(\sum w_j D_j)$ 的单机随机排序问题证明了 WSEPT 规则为其最优算法, 可见, 该类问题在实际中可以在多项式时间内解决, 提高了效率, 节省了时间, 有重大的理论与实际意义。

参考文献:

- [1] 唐恒永, 赵传立. 排序引论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [2] MICHAEL P. Scheduling: Theory, Algorithms and Systems[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- [3] 唐恒永. 随机排序模型及求解方法[J]. *数学理论与应用*, 1999, 19(3): 22-26.
- [4] 钱颂迪. 运筹学[M]. 修订版. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- [5] CHRISTOS H. PAPANICOLAOU K S. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity[M]. Canada: General Publishing Company, 1998.
- [6] 梁之舜. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [7] LI W, GLAZEBROOK K D. On stochastic machine scheduling with general distributional assumptions[J]. *European Journal of Operational Research*, 1999, 105(3): 525-536.
- [8] FORST F G. Stochastic sequencing on one machine with earliness and tardiness penalties[J]. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1993, (7): 291-300.
- [9] CHANG C S, YAO D D. Rearrangement, majorization and stochastic scheduling[J]. *Mathematics of Operation Research*, 1993, 18: 658-684.
- [10] PINEDO M. Stochastic scheduling with release dates and due dates[J]. *Operation Research*, 1983, 31: 559-572.

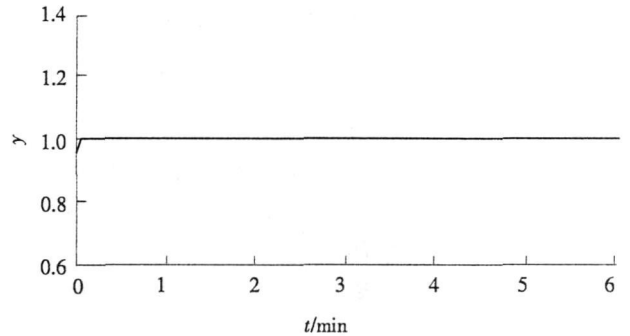


图 5 基于模糊调节神经网络整定的非线性量化因子模糊控制系统阶跃响应曲线

Fig. 5 System step response of fuzzy controller with nonlinear scaling factors based on fuzzy-tuned neural network