文章编号:1008-1542(2025)02-0161-06

2_0-Dyck 路与三元树之间的双射

王佳合[1],窦裕杰[1],庞兴梅[2],吕　仑[1]

(1.河北科技大学理学院,河北石家庄　050018;
2.河北经贸大学统计与数学学院,河北石家庄　050062)

摘　要:为了拓展 Dyck 路和三元树的基本理论,研究了 2_0-Dyck 路和具有 n 个内点的三元树之间的双射与计数问题。首先,通过构造全新的组合结构 L-R-T 序列,建立了 2_0-Dyck 路与 L-R-T 序列之间的双射;其次,通过分析法、归纳法构建了 L-R-T 序列与 n 个内点的三元树之间的转化关系,从而给出了其计数公式的一种组合证明;最后,研究了 2_0-Dyck 路的峰谷与 L-R-T 序列和三元树的对应关系。结果表明,在研究 2 个组合结构之间的双射问题时,可借助与其他结构的关系来完成证明。研究结果丰富了 Dyck 路和三元树的相关理论,为这 2 个结构在组合数学领域的应用提供了理论参考。

关键词:计数组合学;2_0-Dyck 路;k_t-Dyck 路;三元树;Catalan 数;L-R-T 序列

中图分类号:O157　　**文献标识码**:A　　**DOI**:10.7535/hbkd.2025yx02005

Bijection between 2_0-Dyck path and ternary tree

WANG Jiahe[1], DOU Yujie[1], PANG Xingmei[2], LYU Lun[1]

(1. School of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China;
2. College of Statistics and Mathematics, Hebei University of Economics and Business, Shijiazhuang, Hebei 050062, China)

Abstract: In order to expand the basic theory of Dyck path and ternary tree, the bijection and counting problems between the 2_0-Dyck path and the ternary tree with n inliers were studied. Firstly, the bijection between the 2_0-Dyck path and the L-R-T sequence was established by constructing a novel combinatorial L-R-T sequence. Secondly, the transformation relationship between the L-R-T sequence and the ternary tree with n inliers was constructed by means of analysis and induction, thus providing a combined proof of its counting formula. Finally, the relationship between the peaks and valleys of the 2_0-Dyck Path and the L-R-T sequence and the ternary tree was studied. The results show that the bijection problem between two combined structures can be proved by the relationship with other structures. The research results enrich the related theories of Dyck path and ternary tree, and provide theoretical reference value for the application of these two structures in the field of combinatorics.

Keywords: enumerative combinatorics; 2_0-Dyck path; k_t-Dyck path; ternary tree; Catalan number; the L-R-T sequence

收稿日期:2024-06-06;修回日期:2025-01-01;责任编辑:冯民
基金项目:国家自然科学基金(11001073);河北省自然科学基金(A2023208006);河北省引进留学人员资助项目(C20230357)
第一作者简介:王佳合(1998—),女,河北邯郸人,硕士研究生,主要从事组合数学方面的研究。
通信作者:吕仑,教授。E-mail:klunlv@163.com

王佳合,窦裕杰,庞兴梅,等.2_0-Dyck 路与三元树之间的双射[J].河北科技大学学报,2025,46(2):161-166.
WANG Jiahe, DOU Yujie, PANG Xingmei, et al. Bijection between 2_0-Dyck path and ternary tree[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2025, 46(2): 161-166.

组合结构(也称为计数结构)是组合数学研究的核心内容之一。Dyck路和平面树都是组合数学中经典的组合结构,它们之间存在着千丝万缕的联系,许多复杂的组合问题都可以归结为某类Dyck路或某些平面树的计数问题,从而使该问题得到简化。因而,Dyck路和平面树的相关研究备受关注。DEUTSCH[1]根据长度和各种参数计数了Dyck路径;CHEN等[2]研究了3个奇偶反转对合、无标号的平面树、标号的平面树和2-Motzkin路径的问题;CHEN等[3]研究了n个点的平面树与从$\{1,2,\cdots,n-1\}$到$\{1,2,\cdots,n\}$的排列问题;XIN等[4]研究了k-Dyck路径的反弹统计量的几何构造;ZHANG等[5]研究了k-box路与k元树的关系。路径和平面树的更多研究详见文献[6-15]。2019年,SELKIRK[16]通过环引理、符号化等方法给出了k_t-Dyck路的计数为(Raney数)$\frac{t+1}{(k+1)n+t+1}\binom{(k+1)n+t+1}{n}$。Raney数的更多研究详见文献[17-20]。特别地,当$t=0,k=2$时,2_0-Dyck路的计数为广义的Catalan数$\frac{\binom{3n}{n}}{2n+1}$。另外,SELKIRK[16]给出$n$个内点的L元树的计数为广义的Catalan数$\frac{1}{(L-1)n+1}\binom{Ln}{n}$,当$L=3$时,$n$个内点的三元树与$2_0$-Dyck路计数相同。有关广义的Catalan数$\frac{\binom{3n}{n}}{2n+1}$更多研究详见文献[21-25]。

长度为$2n$的Dyck路是指在平面上第一象限内,从原点(0,0)开始到点$(2n,0)$结束,由下降步$(1,-1)$和上升步(1,1)构成的格路径,其中n为固定的非负整数。而长度为$(k+1)n$的k-Dyck路是指在平面上第一象限内,从原点(0,0)开始到点$((k+1)n,0)$结束,由下降步$(1,-k)$和上升步(1,1)构成的格路径,其中k和n均为固定的非负整数。

定义1 (k_t-Dyck路)长度为$(k+1)n$的k_t-Dyck路是指在平面上,从原点(0,0)开始到点$((k+1)n,0)$结束,由n个下降步$(1,-k)$和kn个上升步(1,1)构成的格路径且路径始终在$y=-t$上方。其中k、t和n均为固定的非负整数,且有$0\leqslant t<k$。

特别地,当$k=2,t=0$时,长度为$3n$的2_0-Dyck路是指在平面上,从原点(0,0)开始到点$(3n,0)$结束,由n个下降步$(1,-2)$和$2n$个上升步(1,1)构成的格路径且路径始终在$y=0$上方,其中n为固定的非负整数。例如,图1为$k=2$、$t=0$、$n=3$的2_0-Dyck路。

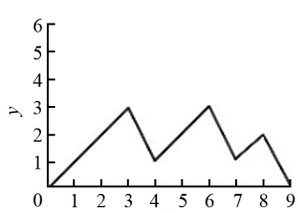


图1 $k=2,t=0,n=3$时的2_0-Dyck路

Fig. 1 2_0-Dyck path at $k=2,t=0,n=3$

简单来说,不包含圈的图称为无圈图,连通的无圈图称为树。一个以确定顶点为根的树称为有根树。对于有根树的每一个顶点,如果它的孩子节点都是有序的,就将其称为平面树。如果一个顶点有孩子节点,那么称之为内点。

定义2 (k元树)每个内点有k个孩子节点的平面树。

当$k=3$时,每个内点有3个孩子节点的平面树称为三元树。将只有一个内点的三元树称为最简三元树(以下简称最简树)。将中位置1、2、3分别称为左子叶、中叶、右子叶。例如:图2为$n=4$时,具有4个内点的三元树,其中,将位置2称为第1层三元树的左子叶,位置3称为第2层三元树的右子叶,位置4称为第3层三元树的中叶。根节点为2、3、4的最简树分别称为左子树、右子树、中树。

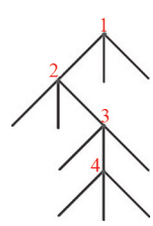


图2 具有4个内点的三元树

Fig. 2 A ternary tree with 4 inliers

本文重点研究2_0-Dyck路与三元树之间的双射关系。

1 2_0-Dyck路与L-R-T序列

为了建立2_0-Dyck路与n个内点的三元树之间的双射,本文构造2_0-Dyck路与L-R-T序列之间的转化。2_0-Dyck路到L-R-T序列的具体转化过程如下:将2_0-Dyck路中$(1,-2)$步转化为T,(1,1)步转化为L

或 R。

step1　将 2_0-Dyck 路中从左向右第 1 个(1，−2)步标记为 T；

step2　T 的左边离 T 最近的(1，1)步，记为 T 所对应的 R；

step3　R 的左边离 R 最近的(1，1)步，记为 T 所对应的 L；

step4　移去已标记过的步，在剩余的步中，从左向右找下一个(1，−2)步记为 T；

step5　重复 step2—step4，找到每一组的 L-R-T 序列。

图 3 逐步展示出了 $n=4$ 时，2_0-Dyck 路的第 1 步到第 5 步的 L-R-T 转化过程。图中虚线部分表示已移除的步。图 3 中的 2_0-Dyck 路所对应的 L-R-T 序列为 LLRTRTLRLRTT。

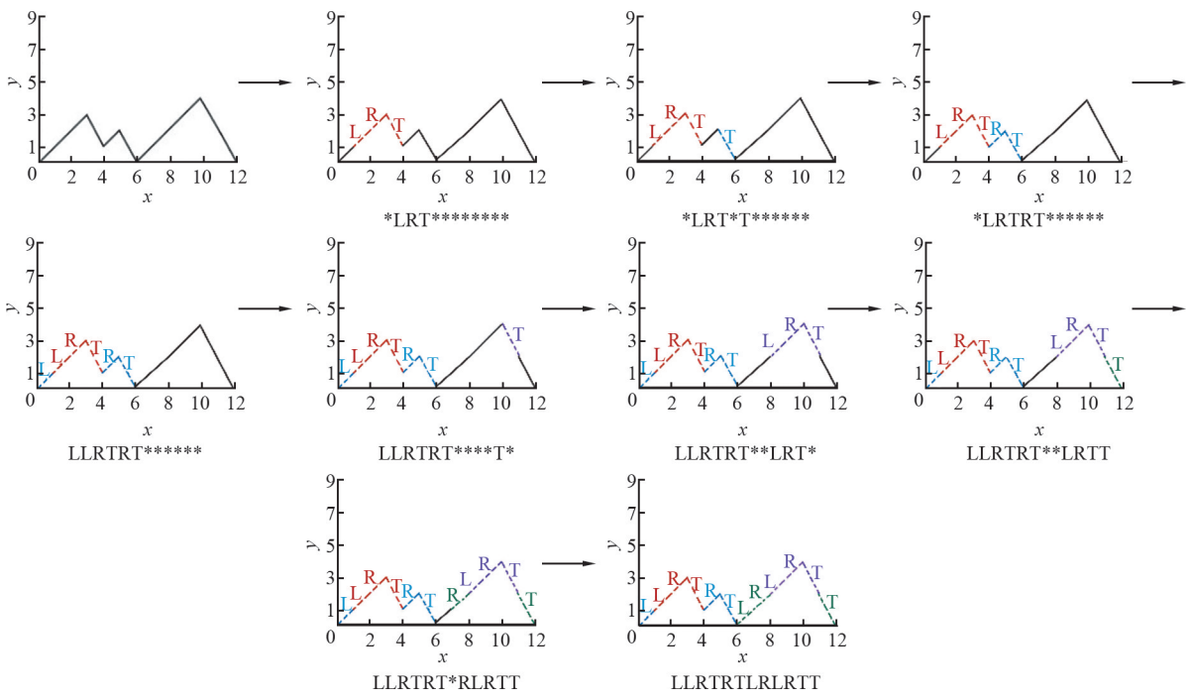


图 3　$n=4$ 时，2_0-Dyck 路到 L-R-T 序列的转化过程

Fig. 3　Transformation process from the 2_0-Dyck path to L-R-T sequence($n=4$)

L-R-T 序列到 2_0-Dyck 路的具体转化过程如下：

step1：将 L-R-T 序列中的 L 和 R 转化为(1，1)步；将 T 转化为(1，−2)步；

step2：重复第 1 步过程，找到每一组 L-R-T 序列所对应的 2_0-Dyck 路的步。

例如，对图 3 中得到的 L-R-T 序列进行转化，图 4 给出了其转化过程。

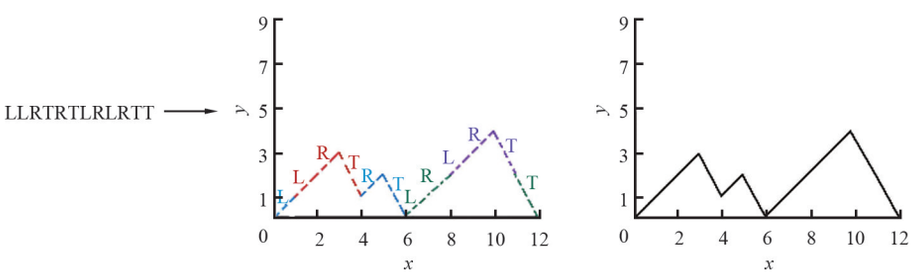


图 4　图 3 中 L-R-T 序列到 2_0-Dyck 路的转化过程

Fig. 4　Transformation process from the L-R-T sequence to 2_0-Dyck path in Figure 3

通过 2_0-Dyck 路与 L-R-T 序列之间的转化就得到了两者之间的双射，并且得出 L-R-T 序列满足以下特定条件：

(a)L-R-T 序列只能以 L 开始，以 T 结束，且 L、R、T 三者的计数均为 n；

(b)当 $n=1$ 时，给定一个 LRT，在 LRT 产生的 3 个空中(不计数 LRT 前的空)，分别插入一个新的 LRT，得到 $n=2$ 时，L-R-T 序列的 3 种情况；

(c)当 $n=k(1\leqslant k\leqslant n-1)$时,在每个 L-R-T 序列中找最新插入的 LRT,在该 LRT 及其之后序列产生的空中(不计数 LRT 前的空)分别插入一个新的 LRT,得到 $n=k+1$ 时,L-R-T 序列的情况;例如,在 $n=2$ 时的 3 种 L-R-T 序列的①—⑫空中分别插入一个新的 LRT,得到 $n=3$ 时的 12 种 L-R-T 序列的情况。

LL①R②T③R④T⑤ LRL⑥R⑦T⑧T⑨ LRTL⑩R⑪T⑫

(d)重复(c)的过程,就得出了 L-R-T 序列的所有情况。

2 L-R-T 序列与三元树

三元树的计数为广义的 Catalan 数$\dfrac{\binom{3n}{n}}{2n+1}$,这与 2_0-Dyck 路的计数是相同的。因而在三元树与 2_0-Dyck 路之间存在双射。本文将借助已经构建的 L-R-T 序列这一中间桥梁,建立三元树与 2_0-Dyck 路之间的关系。具体来说,上文已建立了 2_0-Dyck 路与 L-R-T 序列之间双射关系,本文将构造 L-R-T 序列与三元树之间的双射。

2.1 L-R-T 序列到三元树的转化

为更好地研究 2_0-Dyck 路与三元树之间的双射,给出 L-R-T 序列到三元树的转化,具体过程如下:

step1 给出根节点,L-R-T 序列中,将 L、R、T 分别对应为左子叶、中叶、右子叶;

step2 若 L 后为 R 或者 R 后为 T,则是同层的子叶;

step3 若 T 后为 R 或 T,则 R 或 T 是上一层的子叶;

step4 若 L、R 或 T 后为 L,则 L 是下一层的子叶;

step5 重复 step2—step4,得到 L-R-T 序列所对应的三元树。

通过 L-R-T 序列到三元树的转化过程得出的三元树满足:三元树中每个最简树对应一个 LRT;左子叶、中叶、右子叶分别对应 L、R、T;这类三元树为完全三元树。

例如,图 5 逐步展示了 L-R-T 序列 LLRLRTTRTLRT 的第 1 步到第 5 步转化为三元树的过程。图中同一颜色标记的三元树与序列一一对应。

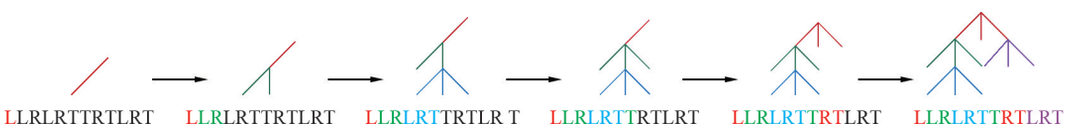


图 5 L-R-T 序列到三元树的转化过程

Fig. 5 Transformation process from L-R-T sequence to the ternary trees

2.2 三元树到 L-R-T 序列的转化

构造满足上述条件的三元树到 L-R-T 序列的转化,这与 L-R-T 序列转化为三元树的过程是互逆的。三元树到 L-R-T 序列的转化通过三元树的前序遍历来完成,具体过程如下:

step1 三元树左子叶、中叶、右子叶分别用 L、R、T 来表示;

step2 三元树遍历顺序为根节点→左子树→中树→右子树;

step3 若左子树非空,则前序遍历左子树;若中树非空,则前序遍历中树;若右子树非空,则前序遍历右子树;

step4 重复第 1、2、3 步的过程,得出三元树的 L-R-T 序列。

例如,图 6 逐步展示了 $n=4$ 时,4 个内点的三元树的第 1 步到第 4 步的 L-R-T 序列转化过程。图中虚线部分表示已转化为序列的三元树。图下方序列表示虚线部分的三元树所对应的 L-R-T 序列。图 6 中的三元树所对应的 L-R-T 序列为 LLRTLRLRTTRT。

通过建立 2_0-Dyck 路与 L-R-T 序列以及 L-R-T 序列与三元树的关系,得到 2_0-Dyck 路与三元树之间的双射。表 1 为 $n=3$ 时 2_0-Dyck 路与三元树之间的对应关系。

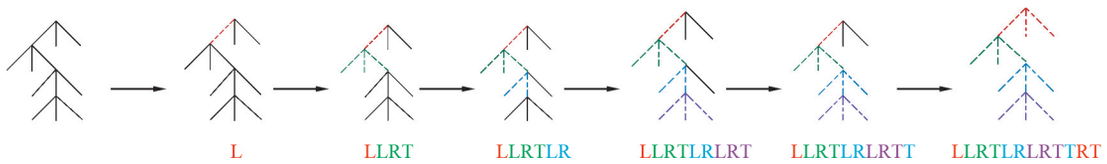
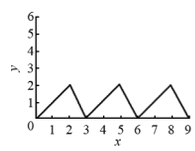
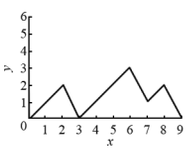
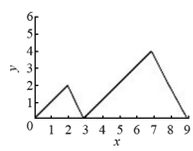
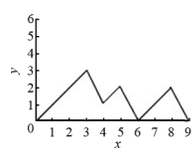
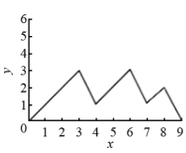
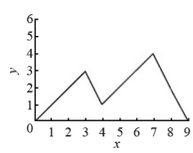
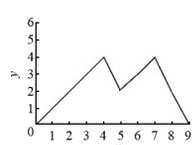
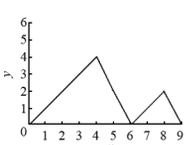
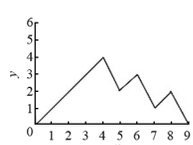
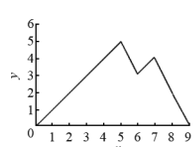
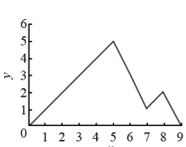
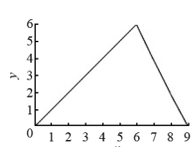


图 6　$n=4$ 时，三元树到 L-R-T 序列的转化过程

Fig. 6　Transformation process from the ternary trees to L-R-T sequence($n=4$)

表 1　$n=3$ 时，2_0-Dyck 路与三元树之间的对应关系

Tab. 1　Correspondence between 2_0-Dyck paths and the ternary trees for $n=3$

2_0-Dyck 路	三元树	2_0-Dyck 路	三元树	2_0-Dyck 路	三元树
					
					
					
					

2.3　2_0-Dyck 路峰谷与 L-R-T 序列和三元树的对应

2_0-Dyck 路的峰谷分别与 L-R-T 序列和三元树的对应关系讨论如下。首先引入 2_0-Dyck 路峰与谷的定义。

定义 3　峰。峰是指路径中的一个上升步后紧跟一个下降步。如图 1 中 2_0-Dyck 路有 3 个峰，分别在(3,3)(6,3)(8,2)位置。

定义 4　谷。谷是指路径中的一个下降步后紧跟一个上升步。如图 1 中 2_0-Dyck 路有 2 个谷，分别在(4,1)(7,1)位置。

SELKIRK[16]通过对 k_t-Dyck 路进行分解等，得出了长度为$(k+1)n$ 的 k_t-Dyck 路峰值的计数为$(t+1)\binom{(k+1)n+t-1}{n-1}$，谷值的计数为$\frac{(kn+t)(t+1)-k}{n-1}\binom{(k+1)n+t-1}{n-2}$，其中 $0\leqslant t\leqslant k-1$。特别地，当 $k=2$、$t=0$ 时，2_0-Dyck 路峰值的计数为$\binom{3n-1}{n-1}$，谷值的计数为 $2\binom{3n-1}{n-2}$。

2_0-Dyck 路的峰谷与 L-R-T 序列和三元树的具体对应关系是：在 L-R-T 序列中，RT 对应为 2_0-Dyck 路的峰；TL 或 TR 对应为 2_0-Dyck 路的谷。在三元树中，左子叶数＋右子叶数＋1＝2_0-Dyck 路的峰的计数，左子叶数＋右子叶数＝2_0-Dyck 路的谷的计数。

因此，可以通过计数 L-R-T 序列中 RT、TL、TR 或计数三元树中左子叶和右子叶来得出 2_0-Dyck 路的峰谷的计数。

3 结 语

探讨了 2_0-Dyck 路和具有 n 个内点的三元树之间的双射。首先研究了 2_0-Dyck 路与 L-R-T 序列的转化，建立了两者之间的双射，然后针对 L-R-T 序列与 n 个内点的三元树的转化，构建了它们之间的双射，进一步建立 2_0-Dyck 路与 n 个内点的三元树之间的全新双射，给出了其计数公式的一种组合证明。

Dyck 路和三元树是组合数学中 2 个重要的组合结构，一些复杂的组合问题可以通过构建与 Dyck 路和三元树的关系得到解决办法。本文研究丰富了 Dyck 路和三元树的相关理论，为这 2 个组合结构在组合数学领域的应用提供了理论参考。未来可以研究推广的 Dyck 路和推广的三元树之间是否存在双射，不借助双射直接对 L-R-T 序列计数以及直接对 L-R-T 序列中 RT、TL、TR 计数等问题。

参考文献/References：

[1] DEUTSCH E. Dyck path enumeration[J]. Discrete Mathematics，1999，204(1/2/3)：167-202.

[2] CHEN W Y C，SHAPIRO L W，YANG L L M. Parity reversing involutions on plane trees and 2-Motzkin paths[J]. European Journal of Combinatorics，2006，27(2)：283-289.

[3] CHEN W Y C，PENG J F F. Disposition polynomials and plane trees[J]. European Journal of Combinatorics，2014，36：122-129.

[4] XIN Guoce，ZHANG Yingrui. On the sweep map for k-Dyck paths[J]. Electronic Journal of Combinatorics，2019. DOI：10.37236/8346.

[5] ZHANG Yuxuan，ZHUANG Yan. A subfamily of skew Dyck paths related to k-ary trees[EB/OL]. (2023-06-27)[2024-06-01]. https://arxiv.org/abs/2306.15778.

[6] SELKIRK J S，WAGNER S. Enumeration of generalized Dyck paths based on the height of Down-Steps modulo κ[J]. The Electronic Journal of Combinatorics，2023. DOI：10.37236/11218 .

[7] CAMERON N T，MCLEOD J E. Returns and hills on generalized Dyck paths[J]. Journal of Integer Sequences，2016，19(6)：1-28.

[8] CHEN W Y C，PANG S X M，QU E X Y，et al. Pairs of noncrossing free Dyck paths and noncrossing partitions[J]. Discrete Mathematics，2009，309(9)：2834-2838.

[9] CHEN W Y C，YANG L L M. On postnikov′s hook length formula for binary trees[J]. European Journal of Combinatorics，2008，29(7)：1563-1565.

[10] HENRI M，MYRTO K. The m-cover posets and the strip-decomposition of m-Dyck paths[J]. Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science，2014. DOI：10.1016/j.aam.2015.06.001.

[11] GU N S S，PRODINGER H. Bijections for 2-plane trees and ternary trees[J]. European Journal of Combinatorics，2009，30(4)：969-985.

[12] PRODINGER H，SELKIRK J S，WAGNER S. On two subclasses of motzkin paths and their relation to ternary trees[C]//Algorithmic Combinatorics：Enumerative Combinatorics，Special Functions and Computer Algebra. Cham：Springer，2020：297-316.

[13] 王亚芹. 限定高度的 Dyck 路的计数[J]. 兰州理工大学学报，2024，50(1)：168-172.
WANG Yaqin. Enumeration of height restricted Dyck paths[J]. Journal of Lanzhou University of Technology，2024，50(1)：168-172.

[14] 王灿铖，杨胜良. Motzkin 树叶点的计数[J]. 纯粹数学与应用数学，2024，40(2)：357-365.
WANG Cancheng，YANG Shengliang. Counting leaves in Motzkin trees[J]. Pure and Applied Mathematics，2024，40(2)：357-365.

[15] 杨胜良，王楠. 部分 Motzkin 路的计数[J]. 兰州理工大学学报，2024，50(3)：137-142.
YANG Shengliang，WANG Nan. Enumeration of the partial Motzkin paths[J]. Journal of Lanzhou University of Technology，2024，50(3)：137-142.

[16] SELKIRK J S. On A Generalisation of k-Dyck Paths[D]. Stellenbosch：Stellenbosch University，2019.

[17] GU N S S，PRODINGER H，WAGNER S. Bijections for a class of labeled plane trees[J]. European Journal of Combinatorics，2010，31(3)：720-732.

[18] OKOTH I O，WAGNER S. Refined enumeration of k-plane trees and k-noncrossing trees[J]. Annals of Combinatorics，2024，28：121-153.

[19] ASINOWSKI A，HACKL B，SELKIRK S J. Down-step statistics in generalized Dyck paths[J]. Discrete Mathematics，2022. DOI：10.46298/dmtcs.7163.

[20] RUSU I. Raney numbers，threshold sequences and Motzkin-like paths[J]. Discrete Mathematics，2022. DOI：10.1016/j.disc.2022.113065.

[21] LASSALLE M. Two integer sequences related to Catalan numbers[J]. Journal of Combinatorial Theory Series A，2012，119(4)：923-935.

[22] ADLER V E，SHABAT A B. Volterra chain and Catalan numbers[J]. JETP Letters，2018，108(12)：825-828.

[23] AYOMIKUN A，LARA P. Pattern avoidance in parking functions[J]. Enumerative Combinatorics and Applications，2023. DOI：10.54550/ECA2023V3S3R17.

[24] LIN G D. On powers of the Catalan number sequence[J]. Discrete Mathematics，2019，342(7)：2139-2147.

[25] PRODINGER H. A simple bijection between a subclass of 2-binary trees and ternary trees[J]. Discrete Mathematics，2009，309(4)：959-961.