余剩余格的模糊理想和模糊同余关系

韩新月，姚　卫

（南京信息工程大学数学与统计学院，江苏南京　210044）

摘　要：为了拓展模糊逻辑代数的相关理论，研究了余剩余格的模糊理想和模糊同余关系及其相互关系。首先，以 Heyting 代数为赋值域，引入余剩余格的模糊理想和模糊同余关系概念,研究它们之间的相互诱导方式，证明二者之间具有一一对应关系；其次，利用截集和强截集方法，研究模糊理想和模糊同余关系的等价刻画。研究表明，余剩余格的模糊理想与模糊同余关系是相互等价的 2 个概念,将在结构和分类问题中起到相同的作用。研究结论丰富了模糊逻辑代数的相关理论，可为深入研究其他代数系统提供一定的理论参考。

关键词：模糊数学；余剩余格；模糊理想；模糊同余；截集

中图分类号：O174.53；TN301.2　　文献标识码：A

Fuzzy ideals and fuzzy congruences of co-residuated lattices

HAN Xinyue，YAO Wei

(School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210044, China)

Abstract： In order to expand the theory of fuzzy logic algebra,s the fuzzy ideals and fuzzy congruences of co-residuated lattices and their interrelationships are studied. Firstly, by using Heyting algebra as the valuation domain, the concepts of fuzzy ideals and fuzzy congruences of co-residuated lattices are introduced, and their mutual induction methods are studied. It is proved that there is a one-to-one correspondence between them. Secondly, the equivalent descriptions of fuzzy ideals and fuzzy congruence relationships are studied using cut set and strong cut set methods. Research shows that fuzzy ideals and the fuzzy congruences are two equivalent concepts and thus will play the same role in structure and classification problems. The research conclusion enriches the relevant theory of fuzzy logic algebraic algebras and can provide certain theoretical support for further research on other algebraic systems.

Keywords： fuzzy mathematics; co-residuated lattice; fuzzy ideal; fuzzy congruence; cut set

模糊逻辑是模拟人脑的不确定性概念判断、推理的思维方式，对于模型未知或不能确定的描述系统和强非线性的控制对象，它应用模糊集合和模糊规则进行推理，实行模糊综合判断和决策，解决不确定问题。在数据挖掘领域，模糊逻辑可用来处理挖掘过程中的不确定性与不完备信息，提高数据的可用性，帮助决策者做出更好的决策，是研究复杂问题求解、大数据挖掘和不确定性信息处理等问题的有力工具，目前广泛应用于人工智能、机器学习、智能系统等方面。

本文关注模糊逻辑代数的模糊同余关系，主要研究余剩余格的模糊理想和模糊同余关系及其等价性。余剩余格是模糊逻辑的公共逻辑代数的对偶模型，在基于不相关性和距离函数的粗糙集粒计算模型中具有重要应用。例如：基于概率粒距离的模糊粗糙集模型[1]；距离函数聚合及其在图像分割中的应用[2]；利用曼哈顿距离函数的模糊粗糙集的属性约简[3]；基于距离度量学习的邻域粗糙集模型及其在特征选取中的应用[4]；基于距离型模糊粗糙集及其在数据聚类和图像处理中的应用[5-6]；基于马氏距离的模糊聚类优化[7]。

收稿日期：2024-06-10；修回日期：2024-08-16；责任编辑：张士莹
基金项目：国家自然科学基金重点项目(12231007)；国家自然科学基金面上项目（12371462）
第一作者简介：韩新月（2000—），女，河北秦皇岛人，硕士研究生，主要从事粗糙集及其应用方面的研究。
通信作者：姚卫，教授。E-mail：yaowei0516@163.com

在代数结构的研究中，理想和滤子是代数系统 2 种重要的特殊子集，可用于定义商对象和研究代数的结构问题，它们与同余关系之间是否存在一一对应关系？自 ZADEH 引入模糊集理论以来，许多学者致力于将经典数学结构扩展到模糊集框架中。文献[8-18]研究了半群与半环、Heyting 代数、剩余格等代数结构上不同类型的模糊理想、模糊滤子、模糊同余关系及其相互之间的关系。在逻辑代数中，通常使用滤子进行相关研究。因为滤子除了具有代数特征外，还可看作一类逻辑重言式[19]，具有深刻的逻辑表达能力。余剩余格作为剩余格的对偶代数，其定义基于逻辑“或”和“与非”算子，并保持剩余格的伴随特征。本文将以 Heyting 代数为取值格，模仿剩余格的相关概念定义余剩余格的模糊理想和模糊同余关系，证明它们是相互等价的，并利用截集和强截集研究模糊理想和模糊同余的等价刻画。

1　预备知识

定义 1[20]　设 $(A,\ominus,\oplus)$ 为有界格，$0,1$ 分别为其最小元和最大元，如果满足

(1) $(A,\oplus,0)$ 是一个交换幺半群；

(2) $(\ominus,\oplus)$ 是 A 上的一对伴随，即 $z\ominus x\le y$ 当且仅当 $z\le x\oplus y\ (\forall x,y,z\in A)$，则称 $(A,\ominus,\oplus)$ 为余剩余格。

对于任意的 $x\in A$ 和 $n\in N$，记 $x\oplus x\oplus\cdots\oplus x$ （n 次）为 x^n，用 A^* 来表示 $A\setminus\{0\}$。

如果一个余剩余格作为偏序集是完备的，则称其为完备余剩余格。此时，由伴随的性质可知，对于任意的 $x\in A$，$(-)\ominus x$ 保任意并，$x\oplus(-)$ 保任意交（也称 $\oplus$ 是右连续的）。

定义 2　设 A 是一个余剩余格，如果它满足下列等价条件之一：

(1) $\forall x,y\in A^*$，$\exists n\in N$　s.t.　$y\le x^n$；

(2) $\forall x\in A^*$，$\exists n\in N$　s.t.　$x^n=1$；

(3) $\forall x\in A^*$，$\exists n\in N$　s.t.　$x^m=1(\forall m\ge n)$，

称其为阿基米德的。

例 1　(1) 设 $A=([0,1],\le)$。令 $a\ominus b=\max\{a-b,0\},a\oplus b=\min\{a+b,1\}(\forall a,b\in A)$，则 $(A,\ominus,\oplus)$ 是一个余剩余格。

(2)设 $(A,\neg)$ 是一个 Boole 代数。令 $a\ominus b=a\wedge\neg b,a\oplus b=a\vee b\,(\forall a,b\in A)$，则 $(A,\ominus,\oplus)$ 是一个余剩余格。

(3)设 $\oplus$ 为 $[0,1]$ 上的右连续的 s-模，且 $a\ominus b=\bigwedge\{x\in[0,1]\mid a\le b\oplus x\}$，则 $([0,1],\ominus,\oplus)$ 是一个余剩余格。

(4)定义 $[0,1]$ 上的一个运算为

$$a\oplus b=\begin{cases}1, & a+b\ge 1;\\ a\vee b, & \text{其他};\end{cases}$$

容易证明 $\oplus$ 是右连续的并且存在运算 $\ominus$ 使得 $([0,1],\ominus,\oplus)$ 是一个余剩余格。

(5)定义 $[0,1]$ 上的一个运算为

$$a\oplus b=\begin{cases}1, & a,b\ge 1/2;\\ a\vee b, & \text{其他}.\end{cases}$$

容易证明 $\oplus$ 是右连续的并且存在运算 $\ominus$ 使得 $([0,1],\ominus,\oplus)$ 是一个余剩余格。

命题 1　Boole 代数 $A=\{0,a,b,1\}$ 上不存在非平凡的剩余格结构。

证明：显然有，$x\oplus 0=x$ 和 $x\oplus 1=1(\forall x\in A)$。根据 $x\oplus y\ge x\vee y$，有 $a\oplus b=b\oplus a=1$。由于 A 是完备格，则 $x\oplus 0=x\oplus(a\wedge b)=(x\oplus a)\wedge(x\oplus b)$，有 $a\oplus a=a$ 和 $b\oplus b=b$。因此，有 $\oplus=\vee$。

命题2　设 A 是一个余剩余格，则对于任意的 $x,y,z\in A$，有

(1) $x\ominus 0=x,x\oplus 0=x,x\oplus 1=1$；

(2) $x\oplus y\ge x\vee y$；

(3) $x\ominus y=0\Leftrightarrow x\le y$；

(4) $x\ominus(x\ominus y)\le x\wedge y$；

(5) $(z\vee x)\ominus(z\vee y)\le x\ominus y$;

(6) $(x\ominus y)\ominus(x\ominus z)\le z\ominus y$;

(7) $(x\oplus y)\ominus x\le y$;

(8) $x\le y\oplus(x\ominus y)$。

命题 3 在格 M_3 和 N_5 上没有余剩余格结构。

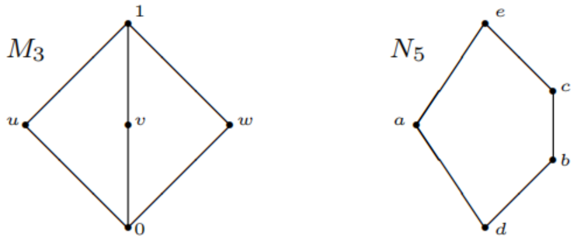

图 1 M_3 和 N_5

Fig.1 M_3 and N_5

证明: 如图 1 所示，设 $\oplus$ 是 M_3 上的余剩余格运算，由 $x\oplus y\le x\vee y\,(\forall x,y\in M_3)$，有 $u\oplus v=u\oplus w=1$，则

$$u=u\oplus 0=u\oplus(v\wedge w)=(u\oplus v)\wedge(u\oplus w)=1\wedge 1=1.$$

矛盾。

设 $\oplus$ 是 N_5 上的余剩余格运算，由 $x\oplus y\le x\vee y\,(\forall x,y\in N_5)$，有 $a\oplus b=a\oplus c=1$，则

$$\begin{aligned} b&=b\oplus 0=b\oplus(a\wedge c)\\ &=(b\oplus a)\wedge(b\oplus c)\\ &=1\wedge(b\oplus c)\\ &=(a\oplus c)\wedge(b\oplus c)\\ &=(a\wedge b)\oplus c=c. \end{aligned}$$

矛盾。

定义 3 有界格 L 上如果存在二元运算 $\to: L\times L\to L$，使得

$$z\wedge x\le y\Leftrightarrow z\le x\to y\,(\forall x,y,z\in L),$$

则称 L 为 Heyting 代数。

容易证明，对于一个Heyting代数 L，对偶偏序集 L^{op} 是一个余剩余格。

例2 (1)每个有界链，例如$[0,1]$，都是Heyting代数。

(2)每个Boole代数都是Heyting代数。

(3)对于每个拓扑空间 $(X,O(X))$，序对 $(O(X),\subseteq)$ 是Heyting代数。

(4)设 L 是一个分配格，则其理想格 $Idl(L)$ 是Heyting代数，其中

$$I\to J=\{x\in L\mid \downarrow x\cap I\subseteq J\}\,(\forall I,J\in Idl(L)).$$

2 模糊理想和模糊同余关系

以Heyting代数为取值格，引入余剩余格上模糊理想和模糊同余关系概念，证明它们的一一对应关系。用 A 来表示余剩余格，并用 L 表示Heyting代数。

定义 4 设 $I:A\to L$ 是 A 的一个 L-模糊子集。如果

(I1) $I(0)=1$;

(I2) $I(x)\wedge I(y\ominus x)\le I(y)$,

则称 I 为 A 的模糊理想。

用 $Idl_L(A)$ 来表示 A 上所有模糊理想的集合。

命题 4 设 $I:A\to L$ 是一个映射且 $I(0)=1$，则 I 是模糊理想当且仅当

(I3) $x\le y$ 蕴含 $I(y)\le I(x)\,(\forall x,y\in A)$；

(I4) $I(x)\wedge I(y)\le I(x\oplus y)\,(\forall x,y\in A)$。

证明：

a）必要性

(I3)若 $x\le y$，则 $x\ominus y=0$ 从而 $I(x\ominus y)=1$。因此，$I(y)=I(y)\wedge I(x\ominus y)\le I(x)$。

(I4)设 $x,y\in A$。由 $(x\oplus y)\ominus y\le x$，有 $I[(x\oplus y)\ominus y]\ge I(x)$，则

$$I(x\oplus y)\ge I[(x\oplus y)\ominus y]\wedge I(y)\ge I(x)\wedge I(y).$$

b）充分性

(I2)设 $x,y\in A$. 由 $y\le x\oplus(y\ominus x)$，有

$$I(y)\ge I[x\oplus(y\ominus x)]\ge I(x)\wedge I(y\ominus x).\ \square$$

注1 对于子集 $J\subseteq A$，如果(1) $0\in J$，(2) J 是一个下集，即 $x\le y\in J$ 蕴含 $x\in J$，(3) $x,y\in J$ 蕴含 $x\oplus y\in J\,(\forall x,y\in A)$，则称其为集合 A 上的理想，A 上全体理想的集合记为 $Idl(A)$，由其对任意交封闭知其是完备格。条件(2）和条件（3)等价于条件(4)：$x,y\ominus x\in J$ 蕴含 $y\in J\,(\forall x,y\in A)$。

定理 1 设 A 是满足阿基米德的余剩余格，则 $I\in Idl_L(A)$ 当且仅当 I 是 A^* 上的常函数且 $I(0)=1$.

证明：充分性是显然的。

必要性：对于任意的 $x\in A^*$，存在 $n\in N$，使得 $I(x)=I(x)\wedge I(x)\le I(x^2)\le I(x^4)\le\cdots\le I(x^n)=I(1)$. 根据(I3)，有 $I(1)\le I(x)$。因此，$I(1)=I(x)$。

命题 5 设 A 为例 1(3)中的余剩余格。如果 $I:A\to L$ 满足(I1)和(I3)，则 $I\in Idl_L(A)$ 当且仅当

(1) I 是 $[1/2,1]$ 上的常值映射；

(2)在 $(0,1/2)$ 中 $I(x\vee y)=I(x)\wedge I(y)$。

证明：

a）必要性

对于任意的 $x\in[1/2,1]$，有

$$I(x)=I(x)\wedge I(x)\le I(x\oplus x)=I(1)\le I(x).$$

对于任意的 $x,y\in(0,1/2]$，有

$$I(x)\wedge I(y)\le I(x\oplus y)\le I(x\vee y)\le I(x)\wedge I(y).$$

b）充分性

设 $x+y\ge 1\,(\forall x,y\in A)$，则 $x\ge 1/2$ 或 $y\ge 1/2$。有

$$I(x)\wedge I(y)\le I(1)=I(x\oplus y).$$

设 $x+y<1\,(\forall x,y\in A)$。如果 $x\in[1/2,1]$ 且 $y\in(0,1/2]$，则

$$I(x)\wedge I(y)=I(x)\le I(x\vee y)=I(x\oplus y).$$

如果 $x,y\in(0,1/2)$，则

$$I(x)\wedge I(y)=I(x\vee y)=I(x\oplus y)\text{。}$$

定义5 设 $\theta:A\times A\to L$ 是 A 的一个 L-模糊二元关系。对于任意的 $x,y,z\in A$，有

(C1) $\theta(x,x)=1$;

(C2) $\theta(x,y)=\theta(y,x)$;

(C3) $\theta(x,y)\wedge\theta(y,z)\le\theta(x,z)$;

(C4) $\theta(x,y)\le\theta(z\vee x,z\vee y)$;

(C5) $\theta(x,y)\le\theta(z\ominus x,z\ominus y)$,

则称 θ 为 A 上的模糊同余关系。

注2 (1) 条件(C1）—条件（C3)表明 θ 是 A 上的模糊等价关系。

(2) 二元关系 $R\subseteq A\times A$ 称为同余关系，如果它是等价关系并满足

(R) $(x,y)\in R$ 蕴含 $(z\vee x, z\vee y)$，$(z\ominus x, z\ominus y)\in R\,(\forall x,y,z\in A)$。分别用 $Con_L(A)$ 和 $Con(A)$ 表示 A 上所有模糊同余关系和同余关系的集族。

定理 2　设 θ 是 A 上的模糊同余关系，则

$$I_\theta(x)=\theta(x,0)\,(\forall x\in A)$$

是 A 的模糊理想。

证明：(I1) $I_\theta(0)=\theta(0,0)=1$。

(I2) 对于任意的 $x,y\in A$，有

$$\begin{aligned}
&I_\theta(x)\wedge I_\theta(y\ominus x)\\
&=\theta(x,0)\wedge\theta(y\ominus x,0)\\
&\le\theta(y\ominus x,y)\wedge\theta(y\ominus x,0)\\
&\le\theta(y,0)\\
&=I_\theta(y).
\end{aligned}$$

因此，I_θ 是一个模糊理想。

定理 3　设 I 是 A 的模糊理想，定义

$$\theta_I(x,y)=I(x\ominus y)\wedge I(y\ominus x)\,(\forall x,y\in A),$$

则 θ_I 是 A 的模糊同余关系。

证明：(C1) $\theta_I(x,x)=I(x\ominus x)\wedge I(x\ominus x)=1.$

(C2) $\theta_I(x,y)=I(x\ominus y)\wedge I(y\ominus x)=I(y\ominus x)\wedge I(x\ominus y)=\theta_I(y,x).$

(C3)

$$\begin{aligned}
&\theta_I(x,y)\wedge\theta_I(y,z)\\
&=I(x\ominus y)\wedge I(y\ominus x)\wedge I(y\ominus z)\wedge I(z\ominus y)\\
&=I(x\ominus y)\wedge I(y\ominus z)\wedge I(z\ominus y)\wedge I(y\ominus x)\\
&\le I(x\ominus y)\wedge I[(x\ominus z)\ominus(x\ominus y)]\wedge\\
&\quad I[(z\ominus x)\ominus(y\ominus x)]\wedge I(y\ominus x)\\
&\le I(x\ominus z)\wedge I(z\ominus x)\\
&=\theta_I(x,z).
\end{aligned}$$

(C4)

$$\begin{aligned}
&\theta_I(z\vee x,z\vee y)\\
&=I[(z\vee x)\ominus(z\vee y)]\wedge I[(z\vee y)\ominus(z\vee x)]\\
&\ge I(x\ominus y)\wedge I(y\ominus x)\\
&=\theta_I(x,y).
\end{aligned}$$

(C5)

$$\begin{aligned}
&\theta_I(z\ominus x,z\ominus y)\\
&=I[(z\ominus x)\ominus(z\ominus y)]\wedge I[(z\ominus y)\ominus(z\ominus x)]\\
&\ge I(y\ominus x)\wedge I(x\ominus y)\\
&=\theta_I(x,y).
\end{aligned}$$

因此，θ_I 是一个模糊同余关系。

由定理2和定理3，可以得到以下2个映射：

$$\alpha: Con_L(A)\to Idl_L(A),\alpha(\theta)=I_\theta\ (\forall\theta\in Con_L(A)),$$
$$\beta: Idl_L(A)\to Con_L(A),\beta(I)=\theta_I\ (\forall I\in Idl_L(A)).$$

定理 4　集族 $Idl_L(A)$ 和 $Con_L(A)$ 通过映射 α,β 一一对应。

证明：对于任意的$I\in Idl_L(A)$,有

$$\begin{aligned}&(\alpha\circ\beta)(I)(x)\\&=\alpha(\beta(I))(x)=I_{\theta_I}(x)=\theta_I(x,0)\\&=I(x\ominus 0)\wedge I(0\ominus x)\\&=I(x)\wedge 1=I(x).\end{aligned}$$

从而$\alpha\circ\beta=id_{Idl_L(A)}$。

对于任意的$\theta\in Con_L(A)$,有

$$\begin{aligned}&(\beta\circ\alpha)(\theta)(x,y)\\&=\beta(\alpha(\theta))(x,y)=\theta_{I_\theta}(x,y)\\&=I_\theta(x\ominus y)\wedge I_\theta(y\ominus x)\\&=\theta(x\ominus y,0)\wedge\theta(y\ominus x,0).\end{aligned}$$

一方面,

$$\begin{aligned}&\theta(x\ominus y,0)\wedge\theta(y\ominus x,0)\\&=\theta(x\ominus y,x\ominus x)\wedge\theta(y\ominus x,y\ominus y)\\&\geq\theta(y,x)\wedge\theta(x,y)=\theta(x,y).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\theta(x\ominus y,0)\wedge\theta(y\ominus x,0)\\&\leq\theta(x\ominus(x\ominus y),x)\wedge\theta(y\ominus(y\ominus x),y)\\&\leq\theta(x\ominus(x\ominus y)\vee y,x\vee y)\wedge\theta(y\ominus(y\ominus x)\vee x,y\vee x)\\&\leq\theta(y,x\vee y)\wedge\theta(x,y\vee x)\\&\leq\theta(x,y).\end{aligned}$$

从而$(\beta\circ\alpha)(\theta)(x,y)=\theta_{I_\theta}(x,y)=\theta(x,y)$. 因此，$\beta\circ\alpha=id_{Con_L(A)}$。

3 模糊理想与模糊同余的截集等价刻画

假设L是一个完全分配格, 用其研究模糊理想和模糊同余的截集等价刻画。

设L为完备格且$a,b\in L$, 如果对于每个下集$D\subseteq L$, $a\leq\bigvee D$总蕴含$b\in D$, 则称b三角小于a, 记为$b\lhd a$。用$\beta(a)$来表示集合$\{b\in L\mid b\lhd a\}$。若$a=\bigvee\beta(a)$, 则称完备格L为完全分配格。完全分配格的一个典型例子是单位区间[0,1]。

设L是完全分配格, 如果$\beta(a)\cap\beta(b)=\beta(a\wedge b)\,(\forall a,b\in L)$, 或是等价的, $c\lhd a,\ b$蕴含$c\leq a\wedge b$ $(\forall a,b\in L)$, 则称L保有限交。例如, 单位区间[0,1]保有限交。

设X是一个集合且$B\in L^X$, 对于任意$a\in L$, 集合$B_a=\{x\in X\mid a\leq B(x)\}$被称为集合$B$的$a$-截集; 集合$B_{(a)}=\{x\in X\mid a\lhd B(x)\}$ 被称为集合B的a-强截集。

定理 5 设$I:A\to L$, 则$I\in Idl_L(A)$当且仅当$I_a\in Idl(A)\,(\forall a\in L)$.

证明：

a）必要性

对于任意的$a\in L$,

(1) $I(0)=1\geq a$, 则$0\in I_a$。

(2) 设$x\in I_a$且$x\geq y$, 有$I(y)\geq I(x)\geq a$, 则$I(y)\geq a$, 从而$y\in I_a$。

(3) 设$x,\ y\in I_a$, 有$I(x)\geq a$和$I(y)\geq a$, 则$I(x\oplus y)\geq I(x)\wedge I(y)\geq a$, 从而$x\oplus y\in I_a$。

b）充分性

(I1) 设$a=1$，则$I(0)\geq 1$, 从而$I(0)=1$。

(I3) 设 $I(y)=a$ 且 $x\le y\,(\forall x,y\in A)$，则 $y\in I_a$。因此，I_a 是一个下集，有 $x\in I_a$，从而 $I(x)\ge a= I(y)$。

(I4) 设 $I(x)\wedge I(y)=a\,(\forall x,y\in A)$，则 $I(x)\ge a$ 且 $I(y)\ge a$，有 $x,y\in I_a$，从而 $x\oplus y\in I_a$。因此，有 $I(x\oplus y)\ge I(x)\wedge I(y)$。

定理 6 设 $\theta: A\times A\to L$，则 $\theta\in Con_L(A)$ 当且仅当 $\theta_a\in Con(A)\,(\forall a\in A)$.

证明：

a）必要性

对于任意的 $a\in L$，(1) $\theta(x,x)=1\ge a$，则 $(x,x)\in\theta_a$。

(2) 设 $(x,y)\in\theta_a\,(\forall x,y\in A)$，有 $\theta(y,x)=\theta(x,y)\ge a$，则 $(y,x)\in\theta_a$。

(3) 设 $(x,y),(y,z)\in\theta_a\,(\forall x,y,z\in A)$，有 $\theta(x,y),\theta(y,z)\ge a$，则 $\theta(x,y)\wedge\theta(y,z)\ge a$。由(C3)，有 $\theta(x,z)\ge a$，从而 $(x,z)\in\theta_a$。

(4) 设 $(x,y)\in\theta_a\,(\forall x,y\in A)$，根据 (C4)，有 $\theta(z\vee x,z\vee y)\ge\theta(x,y)\ge a\quad(\forall z\in A)$，则 $(z\vee x,z\vee y)\in\theta_a$。

(5) 设 $(x,y)\in\theta_a\,(\forall x,y\in A)$，根据 (C5)，有 $\theta(z\ominus x,z\ominus y)\ge\theta(x,y)\ge a\quad(\forall z\in A)$，则 $(z\ominus x,z\ominus y)\in\theta_a$。

b）充分性

对于任意的 $x,y,z\in A$，

(C1) 设 $a=1$，由 $(x,x)\in\theta_a$，则 $\theta(x,x)\ge 1$，从而 $\theta(x,x)=1$。

(C2) 设 $\theta(x,y)=a$，有 $(x,y)\in\theta_a$，则 $(y,x)\in\theta_a$，从而 $\theta(y,x)\ge a=\theta(x,y)$。类似地，有 $\theta(x,y)\ge\theta(y,x)$，因此 $\theta(x,y)=\theta(y,x)$。

(C3) 设 $\theta(x,y)\wedge\theta(y,z)=a$，有 $\theta(x,y),\theta(y,z)\ge a$，则 $(x,y),(y,x)\in\theta_a$，从而 $(x,z)\in\theta_a$. 因此 $\theta(x,z)\ge a=\theta(x,y)\wedge\theta(y,z)$。

(C4) 设 $\theta(x,y)=a$，有 $(x,y)\in\theta_a$，则 $(z\vee x,z\vee y)\in\theta_a$，从而 $\theta(z\vee x,z\vee y)\ge a=\theta(x,y)$。

(C5) 设 $\theta(x,y)=a$，有 $(x,y)\in\theta_a$，则 $(z\oplus x,z\oplus y)\in\theta_a$，从而 $\theta(z\oplus x,z\oplus y)\ge a=\theta(x,y)$。

事实上，可以看到定理 5 和定理 6 对每个完备格 L（不必完备，也不必完全分配）来说都是成立的。

命题 6 设 L 是一个完全分配格，则对于任意的 $a,b,c,d\in L$，有

(1) $a\lhd b$ 蕴含 $a\le b$；

(2) $a\le b\lhd c\le d$ 蕴含 $a\lhd d$；

(3) $a\le b$ 当且仅当对于任意的 $e\in L$，都有 $e\lhd a$ 蕴含 $e\lhd b$；

(4) 对于任意 L-子集 $B\in L^X$ 和任意的 $a\in L$，$B_a=\bigcap_{b\lhd a}B_{(b)}$。

定理 7 设 L 满足性质 $\beta(a)\cap\beta(b)=\beta(a\wedge b)$，则对于每个映射 $I:A\to L$，以下条件是等价的:

(1) $I\in Idl_L(A)$；

(2) $I_{(a)}\in Idl(A)\,(\forall a\in\beta(1))$。

证明：(1)$\Rightarrow$(2)。设 $a\in\beta(1)$，则 $a\lhd 1=I(0)$，从而 $0\in I_a$。设 $x\in I_{(a)}$ 且 $x\ge y$，有 $a\lhd I(x)\le I(y)$，则 $a\lhd I(y)$，从而 $y\in I_{(a)}$。设 $x,y\in I_{(a)}$，有 $a\lhd I(x)$，$a\lhd I(y)$ 则 $a\lhd I(x)\wedge I(y)\le I(x\oplus y)$ 且 $x\oplus y\in I_{(a)}$，从而 $I_{(a)}\in Idl(A)$。

(2)$\Rightarrow$(1)。设 $a=1$，则 $I(0)\ge 1$，从而 $I(0)=1$。设 $I(y)=a$ 且 $x\le y\,(\forall x,y\in A)$，则 $y\in I_a$。由 I_a 是一个下集，有 $x\in I_a$，因此 $I(x)\ge a=I(y)$。设 $I(x)\wedge I(y)=a\,(\forall x,y\in A)$，则 $I(x)\ge a$ 且 $I(y)\ge a$，则有 $x,y\in I_a$，从

而 $x \oplus y \in I_a$。因此，有 $I(x) \wedge I(y) \le I(x \oplus y)$。

定理 8 设 L 满足 $\beta(a) \cap \beta(b) = \beta(a \wedge b)$，则对于任意 L-二元关系 $\theta : A \times A \to L$，下列条件等价:

(1) $\theta \in Idl_L(A)$;

(2) $\theta_{(a)} \in Idl(A) \, (\forall a \in \beta(1))$。

证明：利用定理 4—定理 7 可证明。

4 结束语

本文以 Heyting 代数为取值格，引入了余剩余格的模糊理想和模糊同余关系概念，证明了它们是一一对应的，即模糊理想和模糊同余关系是 2 个相互等价的概念。这表明，研究余剩余格的模糊商结构时，模糊理想和模糊同余关系的作用是一样的。

此外，利用截集和强截集研究了模糊理想和模糊同余关系的等价刻画。由于取值格 Heyting 代数是逻辑“且”算子具有幂等性的逻辑代数，因而本文的结果具有一定的局限性。未来可选用更一般的逻辑代数为取值格，进行余剩余格模糊理想和模糊同余关系的研究，还可引入二型模糊理想和二型模糊同余关系，研究它们之间的关系，以使结论更具普适性。

参考文献/References:

[1] AN S, HU Q H, WANG C Z. Probability granular distance-based fuzzy rough set model [J]. Applied Soft Computing, 2021, 102: 107064.

[2] DELIC M, NEDOVIC L, PAP E. Extended power-based aggregation of distance functions and application in image segmentation [J]. Information Sciences, 2019, 494: 155–173.

[3] WANG C Z, HUANG Y, SHAO M W, et al. Fuzzy rough set-based attribute reduction using distance measures [J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 164: 205–212.

[4] YANG X L, CHEN H M, LI T R, et al. Neighborhood rough sets with distance metric learning for feature selection [J]. Knowledge-Based Systems, 2021, 224: 107076.

[5] YAO W, SHE Y H, LU L X. Metric-based L-fuzzy rough sets: approximation operators and definable sets [J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 163: 91–102.

[6] YAO W, ZHANG G X, ZHOU C J. Real-valued hemimetric-based fuzzy rough sets and an application to contour extraction of digital surfaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 459: 201-219.

[7] 祖志文,李秦，基于马氏距离的模糊聚类优化算法——KM-FCM，河北科技大学学报，2018，39（2）：159－165.

[8] Kazanc O I, Yama S K. Fuzzy ideals and semiprime fuzzy ideals in semigroups[J]. Information Sciences, 2009, 179: 3720－3731.

[9] Hedayat H I. Fuzzy ideals of semirings[J]. Neural Computing and Applications, 2011, 20(8): 1219－1228.

[10] 杨静梅，冯爽，姚卫，Heyting 代数中同余关系的简化[J]，河北科技大学学报，2012，33（6）：479－481.

[11] Navarro G , Cortadellas O , Lobillo F J. Prime fuzzy ideals over noncommutative rings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012，199: 108－120.

[12] YU Bin , ZHAN Jian Ming . Falling fuzzy ideals of hemirings[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2013, 25(4): 1037－1042.

[13] B Seselja, V Stepanovic, A R Tepavcevic. Presentation of lattices by fuzzy weak congruence relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015 (260): 97－109.

[14] 刘莉君. 基于可交换剩余格上的几类 n-重模糊滤子及其性质[J]. 模糊系统与数学, 2018,32(1): 60－65.

[15] 彭家寅. 剩余格上的落影模糊滤子[J]. 山东大学学报, 2018,53(2): 52－64.

[16] 彭家寅. 剩余格上的几类 n-重模糊滤子[J]. 模糊系统与数学, 2020,34(5): 17－30.

[17] Muhiuddin G , Mahboob A , Abughazalah N . Generalized fuzzy ideals in ordered semirings[J]. Complex and Intelligent Systems, 2022, 8(6): 5343－5353.

[18] 左卫兵, 张一旎. 非交换剩余格上模糊 PMTL 滤子的特征及其性质[J]. 郑州大学学报, 2022, 54(1): 81－87.

[19] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理（第二版）[M]. 科学出版社, 2010.

[20] 郑慕聪, 王国俊. 余剩余格及其应用[J]. 模糊系统与数学, 2005,19(4): 7－12.