第 44 卷第 5 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 44, No. 5
2023 年 10 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Oct. 2023

文章编号:1008-1542(2023)05-0468-08

不动点集为 Dold 流形 $P(2,15)$ 的对合

赵素倩,张卓琳,魏祥林

(河北科技大学理学院,河北石家庄　050018)

摘　要:为了研究不动点集为 Dold 流形的对合的等变协边分类,针对一个特定的 Dold 流形 $F=P(2,15)$,确定了以 F 为不动点集的所有带对合的流形(M,T)的等变协边分类。首先,给出了 $P(2,15)$上切丛和法丛的 Stiefel-Whitney 示性类。其次,根据 Kosniowski-Stong 定理,构造合适的对称多项式函数,出现矛盾,证明假设错误,对合不存在;或者证明对任意对称多项式函数都满足 Kosniowski-Stong 定理,说明对合的存在性。最后,得到以 $P(2,15)$为不动点集的对合(M,T)协边。结果表明,存在以 $F=P(2,15)$不动点集的对合,且能够确定对合的等变协边分类。研究结果推广了不动点集为 $F=P(2,n)(n=1,3,5)$的对合的研究结论,丰富了不动点集为 Dold 流形的对合的等变协边分类问题,也为研究不动点集其他特殊流形的对合提供了借鉴和参考。

关键词:代数拓扑学;对合;不动点集;示性类;协边类

中图分类号:O189.3　　**文献标识码**:A　　**DOI**:10.7535/hbkd.2023yx05005

Involutions with fixed point set Dold manifold $P(2,15)$

ZHAO Suqian, ZHANG Zhuolin, WEI Xianglin

(School of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: In order to study the equivariant cobordism classification of involutions with fixed point set Dold manifolds, for a special Dold manifold $F=P(2, 15)$, the equivariant cobordism classification of all involutions (M, T) with fixed point set was determined. Firstly, the Stiefel-Whitney classes of tangent bundle and normal bundle over $P(2, 15)$ were given. Secondly, according to Kosniowski-Stong Theorem, either the contradiction was obtained by constructing a suitable symmetric polynomial function to prove that the hypothesis was wrong and the involution did not exist, or that arbitrary symmetric polynomial functions satisfy Kosniowski-Stong Theorem was proved, which illustrate the existence of involution. Finally, every involution (M, T) with fixed point set $P(2, 15)$ bounds was obtained. The results show that there exists an involution with fixed point set $P(2, 15)$, and the equivariant cobordism classification of all involutions can be determined. The research results popularize the conclusion of studying involutions fixing $F=P(2, n)$ $(n=1, 3, 5)$, enrich the equivariant cobordism

收稿日期:2023-07-20;修回日期:2023-09-06;责任编辑:张士莹

基金项目:国家自然科学基金(12271139);河北科技大学博士科研启动基金(1181119);河北省自然科学基金(A2023208006);河北省引进留学人员启动项目(C20230357)

第一作者简介:赵素倩(1973—),女,河北高邑人,副教授,博士,主要从事组合代数拓扑与微分拓扑方面的研究。

E-mail: suqianzhao@126.com

赵素倩,张卓琳,魏祥林.不动点集为 Dold 流形 $P(2,15)$的对合[J].河北科技大学学报,2023,44(5):468-475.

ZHAO Suqian, ZHANG Zhuolin, WEI Xianglin. Involutions with fixed point set Dold manifold $P(2,15)$[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2023, 44(5): 468-475.

classification of involutions with fixed point set Dold manifolds, and provide some reference for researching involutions of fixed point set with other special manifold.

Keywords: algebraic topology; involution; fixed point set; characteristic class; cobordism class

设 M 是一个未定向的光滑闭流形，$T:M\to M$ 为 M 的光滑对合，记作 (M,T)。$F=\{x\in M\mid T(x)=x\}$ 称为 (M,T) 的不动点集，它是有限个 M 的闭子流形的不交并。对于给定的 F，决定以 F 为不动点集的所有带对合的流形 (M,T) 的等变协边分类是代数拓扑研究的一个重要课题。对于 F 为射影空间及其不交并时对合 (M,T) 的协边分类，很多学者进行了讨论[1-7]。用 $P(m,n)$ 表示 Dold 流形，它是通过把 $S^m\times CP(n)$ 的元素 (x,z) 和 $(-x,\bar{z})$ 黏合而得到的 $m+2n$ 维流形，其中 S^m 表示 m 维球面，$CP(n)$ 表示 n 维复射影空间，$\bar{z}$ 表示 z 的共轭元。对于 F 为 Dold 流形或 2 个 Dold 流形并的情形，也有一些研究结果，参见文献[8]—文献[16]。上述对于 Dold 流形 $P(m,n)$ 的研究成果，大多考虑 $m\geqslant 5$ 的情形。对于 $m=2$ 的情形，研究成果并不多见，文献[17]—文献[19]分别讨论了 $F=P(2,1)$，$F=P(2,3)$ 和 $F=P(2,5)$ 的情形。为此，本文考虑 F 为 *Dold* 流形 $P(2,15)$ 时带对合流形 (M,T) 的协边分类。

1　预备知识及引理

本文中，系数群是模 2 整数加群 Z_2，2^N 中的 N 是充分大的正整数，ω 表示全 Stiefel-Whitney 类，ω_i 表示第 i 个 Stiefel-Whitney 类，$\sigma_i(x)$ 表示第 i 个基本对称函数 $\sum x_1x_2\cdots x_i$，$[M]$ 表示流形 M 的基本同调类。

设 (M^r,T) 是一个带有光滑对合 T 的 r 维光滑闭流形，T 在 M^r 上的不动点集为 $F=\bigcup F^{r-k}$，其中 F^{r-k} 是不动点集 F 的 $(r-k)$ 维分支的并；设 λ^k 是 F^{r-k} 在 M^r 中的法丛。由文献[20]可知，带有对合的流形 (M^r,T) 的协边类由其不动点集 (F^{r-k},λ^k) 的法丛的协边类决定。

引理 1（Kosniowski-Stong 定理）[21]　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 是 Z_2 上的任意对称多项式，它的次数 $\deg(f(x))\leqslant r$，则有示性数公式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_r)[M^r]=\sum_k\frac{f(1+y_1,\cdots,1+y_k,z_1,\cdots,z_{r-k})}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1+y_i)}[F^{r-k}]。\tag{1}$$

其中表达式中的对称多项式可用基本对称多项式 $\sigma_i(x)$，$\sigma_i(y)$，$\sigma_i(z)$ 表示，分别用 M^r，λ^k，F^{r-k} 的第 i 个 Stiefel-Whitney 类 $\omega_i(M^r)$，$\omega_i(\lambda^k)$，$\omega_i(F^{r-k})$ 代替 $\sigma_i(x)$，$\sigma_i(y)$，$\sigma_i(z)$ 后，式(1)两边得到的是上同调类分别在基本同调类上作用的值。

引理 2[21]　设 $\sigma_i(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_r)$ 是 r 个变元的第 i 个基本对称多项式，则

$$\sigma_i(1+y_1,\cdots,1+y_k,z_1,\cdots,z_{r-k})=\sum_{p+q\leqslant i}\binom{k-p}{i-p-q}\sigma_p(y_1,\cdots,y_k)\sigma_q(z_1,\cdots,z_{r-k})。$$

引理 3[21]　设 $\{(F^{r-k},\lambda^k)\}(0\leqslant k\leqslant r)$ 是流形上的一组向量丛，则其为某个对合 (M^r,T) 的不动点数据的充要条件是对于所有次数小于 r 的对称多项式 f，都有

$$\sum_k\frac{f(1+y,z)}{\prod(1+y)}[F^{r-k}]=0。$$

令 $P(m,n)$ 表示 Dold 流形，则它的模 2 上同调环为

$$H^*(P(m,n);Z_2)=Z_2[a,b]/(a^{m+1}=b^{n+1}=0),$$

其中 $a\in H^1(P(m,n);Z_2)$，$b\in H^2(P(m,n);Z_2)$ 是生成元，它的全 Stiefel-Whitney 类是 $\omega(P(m,n))=(1+a)^m(1+a+b)^{n+1}$。

引理 4[22]　设 $P(m,n)$ 是一个 $(m+2n)$ 维 Dold 流形，则在 $P(m,n)$ 上存在向量丛，其 Stiefel-Whitney 类为

1) $1+a+b+a^2$，$m=2$，$n\geqslant 1$；

2) $(1+a+b+a^2)^2$，$m=4,5$，$n\geqslant 2$；

3) $(1+a+b+a^2)^2(1+a+b)+a^6, m=6, n\geqslant 1$;

4) $1+a^2b^3, m=2, n=3$。

这样 $P(m,n)$ 上的任意向量丛的全 Stiefel-Whitney 示性类都可表示为这些类与若干个类 $(1+a)$ 和 $(1+a+b)$ 之积。其中 $a\in H^1(P(m,n);Z_2)$ 和 $b\in H^2(P(m,n);Z_2)$ 是生成元。

若 $(M^{32+k},T)(k>0)$ 是一个光滑闭流形，T 是 M^{32+k} 上的光滑对合，则对合的不动点集为 $F=P(2,15)$。令 $\lambda\to F$ 是 F 在 M^{32+k} 中的法丛。设 $a\in H^1(P(2,15);Z_2)$ 和 $b\in H^2(P(2,15);Z_2)$ 是生成元，$P(2,15)$ 的全 Stiefel-Whitney 类为 $\omega(P(2,15))=(1+a)^2(1+a+b)^{16}$。由引理 4 可知，$\lambda$ 的全 Stiefel-Whitney 示性类的形式为 $\omega(\lambda)=(1+a)^c(1+a+b)^d$，$c$，$d$ 为非负整数，或 $\omega(\lambda)=(1+a+a^2+b)(1+a)^m(1+a+b)^q$，$m$，$q$ 为非负整数，则 $a^2b^{15}[P(2,15)]=1$。

由于 $(1+a)^4=0,(1+a+b)^{16}=0$，如果 $c\equiv c'(\mathrm{mod}\ 4)$，则 $(1+a)^c=(1+a)^{c'}$，故假设 $c<4$，如果 $d\equiv d'(\mathrm{mod}\ 16)$，则 $(1+a+b)^d=(1+a+b)^{d'}$，故假设 $d<16$。

2 主要结果

定理 1 设 (M^{32+k},T) 是带有光滑对合 T 的 $32+k(k>0)$ 维光滑闭流形。T 的不动点集为 $F=P(2,15)$，则 (M^{32+k},T) 存在且协边于零。

对 $\omega(\lambda)=(1+a)^c(1+a+b)^d$ 和 $\omega(\lambda)=(1+a+a^2+b)(1+a)^m(1+a+b)^q$ 2 种形式分别进行证明。

2.1 $\omega(\lambda)=(1+a)^c(1+a+b)^d$ 的情况

根据 c 和 d 的奇偶性，分以下几种情况进行讨论。

命题 1 若 d 为奇数，对合 (M^{32+k},T) 不存在。

证明 当 d 与 c 均是奇数时，假设对合 (M^{32+k},T) 存在，此时 $c+2d\geqslant 3$，所以 $k\geqslant 3$。

1) 当 $\binom{c}{2}+\binom{d}{2}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 时，由引理 2 得

$$\sigma_2(1+y,z)=\binom{k}{2}+b,\quad \sigma_3(1+y,z)=\binom{k}{3}+\binom{k-2}{1}b+ab,$$

取

$$f(x)=\left\{\sigma_3(x)+\binom{k}{3}+\binom{k-2}{1}\left[\sigma_2(x)+\binom{k}{2}\right]\right\}^2\left[\sigma_2(x)+\binom{k}{2}\right]^{13},$$

因为 $\deg(f(x))=32<32+k$，故 $f(x)[M]=0$，但根据引理 1，有

$$f(x)[M]=\frac{f(1+y,z)}{\omega(\lambda)}[P(2,15)]=\frac{(a^2b^2)b^{13}}{(1+a)^c(1+a+b)^d}[P(2,15)]=1,$$

从而推出矛盾，所以对合 (M^{32+k},T) 不存在。

2) 当 $\binom{c}{2}+\binom{d}{2}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 时，由引理 2 得

$$\sigma_2(1+y,z)=\binom{k}{2}+b+a^2,\quad \sigma_3(1+y,z)=\binom{k}{3}+\binom{k-2}{1}(b+a^2)+ab,$$

取

$$f(x)=\left\{\sigma_3(x)+\binom{k}{3}+\binom{k-2}{1}\left[\sigma_2(x)+\binom{k}{2}\right]\right\}^2\left[\sigma_2(x)+\binom{k}{2}\right]^{13},$$

因为 $\deg(f(x))=32<32+k$，故 $f(x)[M]=0$，但由引理 1 可知：

$$f(x)[M]=\frac{f(1+y,z)}{\omega(\lambda)}[P(2,15)]=\frac{(a^2b^2)(a^2+b)^{13}}{(1+a)^c(1+a+b)^d}[P(2,15)]=$$

$$\frac{a^2b^{15}}{(1+a)^c(1+a+b)^d}[P(2,15)]=1,$$

从而推出矛盾，因此对合 (M^{32+k},T) 不存在。

当 d 为奇数、c 为偶数时，假设对合 (M^{32+k},T) 存在，此时 $c+2d\geqslant 2$，所以 $k\geqslant 2$。由引理 2 得

$$\sigma_1(1+y,z)=\binom{k}{1}+a,\quad \sigma_2(1+y,z)=\binom{k}{2}+\binom{k-1}{1}a+\left[1+\binom{c}{2}+\binom{d}{2}\right]a^2+b,$$

取

$$f(x)=\left[\sigma_1(x)+\binom{k}{1}\right]^2\left\{\sigma_2(x)+\binom{k}{2}+\binom{k-1}{1}\left[\sigma_1(x)+\binom{k}{1}\right]+\left[\binom{c}{2}+\binom{d}{2}+1\right]\left[\sigma_1(x)+\binom{k}{1}\right]^2\right\}^{15},$$

因为 $\deg(f(x))=32<32+k$，故 $f(x)[M]=0$，但依据引理 1 有

$$f(x)[M]=\frac{f(1+y,z)}{\omega(\lambda)}[P(2,15)]=\frac{a^2b^{15}}{(1+a)^c(1+a+b)^d}[P(2,15)]=1,$$

从而推出矛盾，所以对合 (M^{32+k},T) 不存在。

综合以上讨论，命题 1 成立。下面讨论 d 为偶数的情况。

命题 2　若 d 为偶数，则对合 (M^{32+k},T) 存在且协边于零。

证明　因为 d 是偶数，$\omega(P(2,15))=(1+a)^2$，$\omega(\lambda)=(1+a)^c(1+a+b)^d$，所以在计算示性类时，所有项中都不会出现 a^2b^{15}，于是对任何次数小于 $32+k$ 的对称多项式 $f(x)$，都有

$$\frac{f(1+y,z)}{\prod(1+y)}[P(2,15)]=0,$$

所以对合 (M^{32+k},T) 存在。又由于对合 (M^{32+k},T) 法丛的所有 Stiefel-Whitney 示性数全为零，因此，对合 (M^{32+k},T) 协边于零，故命题 2 得证。

综合命题 1 和命题 2，当 $\omega(\lambda)=(1+a)^c(1+a+b)^d$ 时，对合 (M^{32+k},T) 存在且协边于零。

2.2　$\omega(\lambda)=(1+a+a^2+b)(1+a)^m(1+a+b)^q$ 的情况

根据 m 和 q 的奇偶性，分以下几种情况进行讨论。

命题 3　若 q 为偶数，则对合 (M^{32+k},T) 不存在。

证明　若 q 为偶数、m 为偶数，由引理 2 可得

$$\sigma_1(1+y,z)=\binom{k}{1}+a,\quad \sigma_2(1+y,z)=\binom{k}{2}+\binom{k-1}{1}a+\left[\binom{m}{2}+\binom{q}{2}\right]a^2+b,$$

取

$$f(x)=\left[\sigma_1(x)+\binom{k}{1}\right]^2\left\{\sigma_2(x)+\binom{k}{2}+\binom{k-1}{1}\left[\sigma_1(x)+\binom{k}{1}\right]+\left[\binom{m}{2}+\binom{q}{2}\right]\left[\sigma_1(x)+\binom{k}{1}\right]^2\right\}^{15},$$

其中 $\deg(f(x))=32<32+k$，故 $f(x)[M]=0$。但根据引理 1 有

$$f(x)[M]=\frac{f(1+y,z)}{\omega(\lambda)}[P(2,15)]=\frac{a^2b^{15}}{(1+a+a^2+b)(1+a)^m(1+a+b)^q}[P(2,15)]=1,$$

从而推出矛盾，所以对合 (M^{16+k},T) 不存在。

若 q 为偶数、m 为奇数，由引理 2 得

$$\sigma_2(1+y,z)=\binom{k}{2}+b+\left[\binom{m}{2}+\binom{q}{2}+1\right]a^2,$$

$$\sigma_3(1+y,z)=\binom{k}{3}+\binom{k-2}{1}\left\{b+\left[\binom{m}{2}+\binom{q}{2}+1\right]a^2\right\}+ab,$$

取

$$f(x)=\left\{\sigma_3(x)+\binom{k}{3}+\binom{k-2}{1}\left[\sigma_2(x)+\binom{k}{2}\right]\right\}^2\left[\sigma_2(x)+\binom{k}{2}\right]^{13},$$

其中 $\deg(f(x))=32<32+k$，故 $f(x)[M]=0$，但根据引理 1，有

$$f(x)[M]=\frac{f(1+y,z)}{\omega(\lambda)}[P(2,15)]=\frac{a^2b^2\left\{b+\left[\binom{m}{2}+\binom{q}{2}+1\right]a^2\right\}^{13}}{(1+a+a^2+b)(1+a)^m(1+a+b)^q}[P(2,15)]=$$

$$\frac{a^2b^2\sum_{k=0}^{13}\binom{13}{k}b^{13-k}\left\{\left[\binom{m}{2}+\binom{q}{2}+1\right]a^2\right\}^k}{(1+a+a^2+b)(1+a)^m(1+a+b)^q}[P(2,15)]=$$

$$\frac{a^2b^{15}}{(1+a+a^2+b)(1+a)^m(1+a+b)^q}[P(2,15)]=1,$$

从而推出矛盾，因此对合 (M^{32+k},T) 不存在。

综合以上讨论，命题3成立。下面讨论 q 为奇数的情况。

由于 $\omega(\lambda)=(1+a+a^2+b)(1+a)^m(1+a+b)^q=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^{q-1}(q\geqslant 1)$，在下面的证明中，应用 $\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^{q-1}$。

命题4 若 q 为奇数，则对合 (M^{32+k},T) 存在且协边于零。

证明 分以下2种情形说明。

情形1：$\binom{q-1}{2}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 时，由于 $0<q<16$，则 $q=1,5,9,13$。

1)当 $q=1$ 时，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m=(1+a^2b+b^2)\left[1+\binom{m}{1}a+\binom{m}{2}a^2\right]=$$
$$1+\binom{m}{1}a+\binom{m}{2}a^2+a^2b+\binom{m}{1}ab^2+b^2+\binom{m}{2}a^2b^2。$$

由于 $\omega(P(2,15))=(1+a)^2$，所以穷尽所有情况，在计算示性类时，所有项中都不会出现 a^2b^{15}，类似于命题2的证明，对合 (M^{32+k},T) 存在且协边于零。

2)当 $q=5$ 时，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^4=(1+a)^m(1+b^4+a^2b+a^2b^5+b^2+b^6)=$$
$$\left[1+\binom{m}{1}a+\binom{m}{2}a^2\right](1+b^4+a^2b+a^2b^5+b^2+b^6)=$$
$$1+\binom{m}{1}a+\binom{m}{2}a^2+(a^2b+b^2)+\binom{m}{1}ab^2+\binom{m}{2}a^2b^2+b^4+\binom{m}{1}ab^4+\binom{m}{2}a^2b^4+$$
$$(a^2b^5+b^6)+\binom{m}{1}ab^6+\binom{m}{2}a^2b^6。$$

由于 $\omega(P(2,15))=(1+a)^2$，所以穷尽所有情况，在计算示性类时，所有项中都不会出现 a^2b^{15}，所以对合存在且协边于零。

3)当 $q=9$ 时，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^8=\left[1+\binom{m}{1}a+\binom{m}{2}a^2\right](1+a^2b+b^2+b^8+a^2b^9+b^{10})=$$
$$1+\binom{m}{1}a+\binom{m}{2}a^2+(a^2b+b^2)+\binom{m}{1}ab^2+\binom{m}{2}a^2b^2+b^8+\binom{m}{1}ab^8+\binom{m}{2}a^2b^8+(a^2b^9+$$
$$b^{10})+\binom{m}{1}ab^{10}+\binom{m}{2}a^2b^{10}。$$

由于 $\omega(P(2,15))=(1+a)^2$，所以穷尽所有情况，在计算示性类时，所有项中都不会出现 a^2b^{15}，所以对合存在且协边于零。

4)当 $q=13$ 时，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^{12}=\left[1+\binom{m}{1}a+\binom{m}{2}a^2\right]\times$$
$$(1+b^4+b^8+b^{12}+a^2b+a^2b^5+a^2b^9+a^2b^{13}+b^2+b^6+b^{10}+b^{14})=$$
$$1+\binom{m}{1}a+\binom{m}{2}a^2+(a^2b+b^2)+\binom{m}{1}ab^2+\binom{m}{2}a^2b^2+b^4+\binom{m}{1}ab^4+\binom{m}{2}a^2b^4+$$
$$(a^2b^5+b^6)+\binom{m}{1}ab^6+\binom{m}{2}a^2b^6+b^8+\binom{m}{1}ab^8+\binom{m}{2}a^2b^8+(a^2b^9+b^{10})+\binom{m}{1}ab^{10}+$$
$$\binom{m}{2}a^2b^{10}+b^{12}+\binom{m}{1}ab^{12}+\binom{m}{2}a^2b^{12}+(a^2b^{13}+b^{14})+\binom{m}{1}ab^{14}+\binom{m}{2}a^2b^{14}。$$

由于 $\omega(P(2,15))=(1+a)^2$，所以穷尽所有情况，在计算示性类时，所有项中都不会出现 a^2b^{15}，所以对合存在且协边于零。

综上所述，在这种情况下，对合 (M^{32+k},T) 存在且协边于零。

情形 2：$\binom{q-1}{2}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 时，因 $0<q<16$，则 $q=3,7,11,15$，分别对这几种情况进行讨论。

1）当 $q=3$ 时，若 m 是奇数，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^2=(1+a^2b+b^2)(1+a+b)^2(1+a)^m=$$
$$(1+a^2+a^2b+a^2b^3+a^2b^2+b^4)\left[1+a+\binom{m}{2}a^2\right]=$$
$$1+a+\left[a^2+\binom{m}{2}a^2\right]+a^2b+a^2b^2+(b^4+a^2b^3)+ab^4+\binom{m}{2}a^2b^4。$$

若 m 是偶数，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a+b)^2(1+a)^m=(1+a^2b+a^2+a^2b^2+a^2b^3+b^4)\left[1+\binom{m}{2}a^2\right]=$$
$$1+\left[a^2+\binom{m}{2}a^2\right]+a^2b+a^2b^2+(a^2b^3+b^4)+\binom{m}{2}a^2b^4。$$

由于 $\omega(P(2,15))=(1+a)^2$，所以穷尽所有情况，在计算示性类时，所有项中都不会出现 a^2b^{15}，所以对合存在且协边于零。

2）当 $q=7$ 时，若 m 是奇数，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^6=$$
$$\left[1+a+\binom{m}{2}a^2\right][1+a^2+a^2b+a^2b^2+a^2b^3+a^2b^4+a^2b^5+a^2b^6+(a^2b^7+b^8)]。$$

若 m 是偶数，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^6=$$
$$\left[1+\binom{m}{2}a^2\right][1+a^2+a^2b+a^2b^2+a^2b^3+a^2b^4+a^2b^5+a^2b^6+(a^2b^7+b^8)]。$$

由于 $\omega(P(2,15))=(1+a)^2$，所以穷尽所有情况，在计算示性类时，所有项中都不会出现 a^2b^{15}，所以对合存在且协边于零。

3）当 $q=11$ 时，若 m 是奇数，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^{10}=$$
$$\left[1+a+\binom{m}{2}a^2\right][1+a^2+a^2b+a^2b^2+(a^2b^3+b^4)+b^8+a^2b^8+a^2b^9+a^2b^{10}+$$
$$(a^2b^{11}+b^{12})]=1+a+\left[a^2+\binom{m}{2}a^2\right]+a^2b+a^2b^2+(a^2b^3+b^4)+ab^4+\binom{m}{2}a^2b^4+b^8+$$
$$ab^8+\left[a^2b^8+\binom{m}{2}a^2b^8\right]+a^2b^9+a^2b^{10}+(a^2b^{11}+b^{12})+ab^{12}+\binom{m}{2}a^2b^{12}。$$

若 m 是偶数，有

$$\omega(\lambda)=(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^{10}=$$
$$\left[1+\binom{m}{2}a^2\right][1+a^2+a^2b+a^2b^2+(a^2b^3+b^4)+b^8+a^2b^8+a^2b^9+a^2b^{10}+(a^2b^{11}+b^{12})]=$$
$$1+\left[a^2+\binom{m}{2}a^2\right]+a^2b+a^2b^2+(a^2b^3+b^4)+\binom{m}{2}a^2b^4+b^8+\left[a^2b^8+\binom{m}{2}a^2b^8\right]+a^2b^9+$$
$$a^2b^{10}+(a^2b^{11}+b^{12})+\binom{m}{2}a^2b^{12}。$$

由于 $\omega(P(2,15))=(1+a)^2$，所以穷尽所有情况，在计算示性类时，所有项中都不会出现 a^2b^{15}，所以对合存在且协边于零。

4）当 $q=15$ 时，若 m 是奇数，有

$$\sigma_1(1+y,z)=\binom{k}{1}+a,\quad \sigma_4(1+y,z)=\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}a+a^2+\binom{k-2}{2}\binom{m}{2}a^2+a^2b,$$

取

$$f(x)=1+\left\{\sigma_4(x)+\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}\left[\sigma_1(x)+\binom{k}{1}\right]+\left[\binom{k-2}{2}\binom{m}{2}+1\right]\left[\sigma_1(x)+\binom{k}{1}\right]^2\right\},$$

其中 $\deg(f(x))=4<32+k$，故 $f(x)[M]=0$，但根据引理1，有

$$\begin{aligned}
f(x)[M]=&\frac{f(1+y,z)}{\omega(\lambda)}[P(2,15)]=\frac{1+a^2b}{(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^{14}}[P(2,15)]=\\
&\frac{(1+a^2b)(1+a^2b+b^2)^7}{(1+a)^m(1+a+b)^{14}}[P(2,15)]=\\
&\frac{(\sum_{i=0}^{7}b^{2i}+a^2b^3+a^2b^7+a^2b^{11}+a^2b^{15})(1+a+b)^{2^N}}{(1+a)^m(1+a+b)^{14}}[P(2,15)]=\\
&\frac{(a^2b^3+a^2b^7+a^2b^{11}+a^2b^{15})(1+a+b)^{2^N-14}}{(1+a)^m}[P(2,15)]=\\
&\frac{(a^2b^3+a^2b^7+a^2b^{11}+a^2b^{15})\sum_{i=0}^{2^N-14}(1+a)^{2^N-14-i}b^i}{(1+a)^m}[P(2,15)]=\\
&a^2b^3\sum_{i=0}^{2^N-14}\binom{2^N-14}{i}(1+a)^{2^N-14-i-m}b^i[P(2,15)]+a^2b^7\sum_{i=0}^{2^N-14}\binom{2^N-14}{i}(1+a)^{2^N-14-i-m}b^i\times\\
&[P(2,15)]+a^2b^{11}\sum_{i=0}^{2^N-14}\binom{2^N-14}{i}(1+a)^{2^N-14-i-m}b^i[P(2,15)]+a^2b^{15}[P(2,15)]=\\
&\binom{2^N-14}{12}a^2b^{15}[P(2,15)]+\binom{2^N-14}{8}a^2b^{15}[P(2,15)]+\binom{2^N-14}{4}a^2b^{15}[P(2,15)]+1=1,
\end{aligned}$$

从而推出矛盾，对合不存在。

若 m 是偶数，有

$$\sigma_2(1+y,z)=\binom{k}{2}+\binom{m}{2}a^2,\quad \sigma_4(1+y,z)=\binom{k}{4}+\binom{k-2}{2}\binom{m}{2}a^2+a^2+a^2b,$$

取

$$f(x)=1+\left\{\sigma_4(x)+\binom{k}{4}+\binom{k-2}{2}\left[\sigma_2(x)+\binom{k}{2}\right]\right\},$$

其中 $\deg(f(x))=4<32+k$，故 $f(x)[M]=0$，但根据引理1，有

$$\begin{aligned}
f(x)[M]=&\frac{f(1+y,z)}{\omega(\lambda)}[P(2,15)]=\frac{1+a^2b+a^2}{(1+a^2b+b^2)(1+a)^m(1+a+b)^{14}}[P(2,15)]=\\
&\frac{(1+a^2b+a^2)(1+a^2b+b^2)^7}{(1+a)^m(1+a+b)^{14}}[P(2,15)]=\\
&\frac{(\sum_{i=0}^{7}b^{2i}+a^2b^3+a^2b^7+a^2b^{11}+a^2b^{15}+\sum_{i=0}^{7}a^2b^{2i})(1+a+b)^{2^N}}{(1+a)^m(1+a+b)^{14}}[P(2,15)]=\\
&\frac{(a^2b^3+a^2b^7+a^2b^{11}+a^2b^{15})(1+a+b)^{2^N-14}}{(1+a)^m}[P(2,15)]=1,
\end{aligned}$$

从而推出矛盾，对合不存在。

综上所述，在这种情况下，对合 (M^{32+k},T) 存在且协边于零，命题4得证。

综合命题1—命题4，定理1得证。

3 结 语

本文利用微分周期映射、示性类理论等，借助 Kosniowski-Stong 给出的 M 的示性数与不动点集法丛

(F,λ) 示性数之间的关系，通过构造合适的对称多项式出现矛盾，否定对合流形的存在性，或者证明对任意对称多项式都满足 Kosniowski-Stong 定理，说明对合的存在性，证明了不动点集 F 为 Dold 流形 $P(2,15)$ 时，带有对合 T 的光滑闭流形 (M,T) 存在且协边于零。研究结果丰富了不动点集是 Dold 流形的对合的等变协边分类问题，也为研究不动点集其他特殊流形的对合提供了借鉴和参考。

本文研究的仅是不动点集 F 为特殊维数的 Dold 流形对合的协边分类，对于不动点集为 $F=P(2,2n+1)$ 的情形还需要做进一步研究。

参考文献/References：

[1] STONG R E. Involutions fixing projective spaces[J]. The Michigan Mathematical Journal，1966，13(4)：445-447.

[2] ROYSTER D C. Involutions fixing the disjoint union of two projective spaces[J]. Indiana University Mathematics Journal，1980，29(2)：267-276.

[3] 吴振德，刘宗泽. 不动点集为 $RP(2m)\cup RP(2n)$ 的带有对合的流形[J]. 数学季刊，1986，1(2)：19-41.
WU Zhende，LIU Zongze. Manifolds with involutions whose fixed point set is $RP(2m)\cup RP(2n)$[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，1986，1(2)：19-41.

[4] HOU D，TORRENCE B. Involutions fixing the disjoint union of copies of even projective space[J]. Acta Mathematica Sinica，1996，12(2)：162-166.

[5] 赵素倩，李京艳. 不动点集为有限个奇数维复射影空间并的对合[J]. 吉林大学学报(理学版)，2015，53(6)：1201-1206.
ZHAO Suqian，LI Jingyan. Involutions of the disjoint union of fixed point set with odd-dimensional complex projective spaces[J]. Journal of Jilin University(Science Edition)，2015，53(6)：1201-1206.

[6] ZHAO Suqian，PERGHER P L Q. $(Z_2)^k$-actions fixing the disjoint union of odd-dimensional quaternionic projective spaces[J]. Houston Journal of Mathematics，2021，47(2)：517-533.

[7] PERGHER P L Q，RAMOS A. Involutions fixing two copies of projective spaces under different rings[J]. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society New Series，2022，53(3)：1043-1051.

[8] 吴振德. 不动点集为 Dold 流形 $P(2m,2n)$ 的带有对合的流形[J]. 数学学报，1988，31(1)：72-82.

[9] 刘秀贵. 不动点集是 Dold 流形 $P(2m+1,2n+1)$ 的对合[J]. 数学年刊，2002，23(6)：779-788.
LIU Xiugui. Involutions fixing the Dold manifold $P(2m+1,2n+1)$[J]. Chinese Annals of Mathematics，2002，23(6)：779-788.

[10] 刘秀贵. 不动点集是 Dold 流形 $P(2m,2n+1)$ 的对合[J]. 四川大学学报(自然科学版)，2003，40(5)：795-797.
LIU Xiugui. Involutions fixing the Dold manifold $P(2m,2n+1)$[J]. Journal of Sichuan University(Natural Science Edition)，2003，40(5)：795-797.

[11] 丁雁鸿，赵彦，李珊珊. 不动点集为 $P(2m,2l+1)\cup P(2m,2n+1)$ 的对合[J]. 数学学报，2008，51(5)：971-978.
DING Yanhong，ZHAO Yan，LI Shanshan. Involutions with fixed point set $P(2m,2l+1)\cup P(2m,2n+1)$[J]. Acta Mathematica Sinica，2008，51(5)：971-978.

[12] 丁雁鸿，赵彦，李日成. 不动点集为 $P(2^m,2^m)\cup P(2^m,2^m+1)$ 的对合[J]. 吉林大学学报(理学版)，2010，48(4)：588-594.
DING Yanhong，ZHAO Yan，LI Richeng. Involutions with fixed point set $P(2^m,2^m)\cup P(2^m,2^m+1)$[J]. Journal of Jilin University(Science Edition)，2010，48(4)：588-594.

[13] MORITA A M M，MATTOS D D，PERGHER P L Q. The cohomology ring of orbit spaces of free Z_2-actions on some Dold manifolds[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society，2018，97(2)：340-348.

[14] NATH A，SANKARAN P. A note on the equivariant cobordism of generalized Dold manifolds[J]. Topology and Its Applications，2021，293：1-8.

[15] 赵彦，丁雁鸿，毛婷. 不动点集为 $P(6,2n+1)$ 的对合[J]. 河北师范大学学报(自然科学版)，2014，38(1)：19-24.
ZHAO Yan，DING Yanhong，MAO Ting. Involutions with fixed point set $P(6,2n+1)$[J]. Journal of Hebei Normal University(Natural Science Edition)，2014，38(1)：19-24.

[16] 赵彦，王丹婷，丁雁鸿. 不动点集为 $P(5,2n+1)$ 的对合[J]. 河北师范大学学报(自然科学版)，2016，40(1)：10-16.
ZHAO Yan，WANG Danting，DING Yanhong. Involutions with fixed point set $P(5,2n+1)$[J]. Journal of Hebei Normal University(Natural Science Edition)，2016，40(1)：10-16.

[17] 赵彦，李倩，丁雁鸿. 不动点集为 Dold 流形 $P(2,1)$ 的对合[J]. 价值工程，2013，32(15)：266-268.
ZHAO Yan，LI Qian，DING Yanhong. Involutions fixing the Dold manifold $P(2,1)$[J]. Value Engineering，2013，32(15)：266-268.

[18] 孟成芳，李倩，谢世伟. 不动点集为 Dold 流形 $P(2,3)$ 的对合[J]. 石家庄职业技术学院学报，2014，26(2)：7-10.
MENG Chengfang，LI Qian，XIE Shiwei. Involutions with fixed point set[J]. Journal of Shijiazhuang Vocational Technology Institute，2014，26(2)：7-10.

[19] 曹颖，王玉玉. 不动点集是 Dold 流形 $P(2,5)$ 的对合[J]. 南开大学学报(自然科学版)，2014，47(6)：85-90.
CAO Ying，WANG Yuyu. Involutions fixing with the Dold manifold $P(2,5)$[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis (Natural Science Edition)，2014，47(6)：85-90.

[20] CONNER P E. Differentiable Periodic Maps[M]. 2nd ed. Berlin：Springer，1979.

[21] KOSNIOWSKI C，STONG R E. Involutions and characteristic numbers[J]. Topology，1978，17(4)：309-330.

[22] STONG R E. Vector bundles over Dold manifolds[J]. Fundamenta Mathematicae，2001，169：85-95.