文章编号:1008-1542(2022)05-0495-10

# double-order Hilfer 分数阶共振边值问题解的存在性

孟凡猛,江卫华,郭春静

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

**摘 要:**为了拓展分数阶微分方程边值问题的基本理论,研究了共振情形下 double-order Hilfer 分数阶微分方程在 Riemann-Stieltjes 积分边界条件下解的存在性。首先,构造 2 个合适的 Banach 空间;然后,在 Banach 空间中定义恰当的算子并使用 Mawhin 重合度理论,获得 double-order Hilfer 分数阶共振边值问题解的存在性;最后,通过例子验证结果的正确性。结果表明,在合适的 Banach 空间中,double-order Hilfer 分数阶共振边值问题的解具有存在性。采用 Mawhin 重合度理论方法研究 double-order Hilfer 分数阶共振边值问题解的存在性,扩展了微分算子阶数的取值范围,丰富了分数阶微分方程的可解性理论,为微分方程在空气动力学、经济学、控制理论等领域的应用提供了理论参考。

**关键词:**常微分方程;边值问题;共振;double-order Hilfer 分数阶导数;Mawhin 的重合度理论

**中图分类号:**O175.8 **文献标识码:**A **DOI:**10.7535/hbkd.2022yx05005

# Existence of solutions for double-order Hilfer fractional boundary value problems at resonance

MENG Fanmeng, JIANG Weihua, GUO Chunjing

(School of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

**Abstract:** In order to expand the basic theory of boundary value problems of fractional differential equations, the existence of solutions of double-order Hilfer fractional differential equations under Riemann-Stieltjes integral boundary conditions under resonance conditions was studied. Firstly, two suitable Banach spaces were constructed. Secondly, appropriate operators in Banach spaces were defined and Mawhin's coincidence theory was used to prove the existence of the solution to the double-order Hilfer fractional resonance boundary value problem. Finally, an example was given to illustrate the correctness of the results. The results show that the solution of the double-order Hilfer fractional resonant boundary value problem exists in a suitable

---

收稿日期:2021-10-25;修回日期:2021-12-21;责任编辑:张士莹

基金项目:国家自然科学基金(11775169);河北省自然科学基金(A2018208171)

第一作者简介:孟凡猛(1996—),男,河北承德人,硕士研究生,主要从事应用泛函分析、微分方程边值问题方面的研究。

通讯作者:江卫华教授。E-mail:jianghua64@163.com

孟凡猛,江卫华,郭春静.double-order Hilfer 分数阶共振边值问题解的存在性[J].河北科技大学学报,2022,43(5):495-504.

MENG Fanmeng,JIANG Weihua,GUO Chunjing.Existence of solutions for double-order Hilfer fractional boundary value problems at resonance[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2022,43(5):495-504.

Banach space. Using Mawhin's coincidence degree theory to study the existence of solutions to the double-order Hilfer fractional resonance boundary value problem expands the range of orders in the differential operator, enriches the theory of solvability of fractional differential equations and provides an important theoretical basis for the study of fractional differential equations in aerodynamics, economics, control theory and other fields.

**Keywords**: ordinary differential equation; boundary value problem; resonance; double-order Hilfer fractional derivative; Mawhin's coincidence degree theory

分数阶微分方程广泛用于解决物理、化学、经济等学科的实际问题[1-5]。边值问题研究起源于应用数学和物理领域[6-8]，弹力稳定性理论中很多问题都可以采用边值问题方法加以解决。因此，分数阶微分方程边值问题受到很多专家和学者的关注[9-12]。

许多研究者研究了常见的 Riemann-Liouville 导数和 Caputo 导数的边值问题。例如，WANG 等[13]研究了 Riemann-Liouville 分数阶微分方程三点边值问题

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0, \quad 0<t<1, \\ u(0)=0, \quad u(1)=\eta u(\xi) \end{cases}$$

解的存在性，其中 $1<\alpha<2$，$0<\xi<1$，$\eta\xi^{\alpha-1}=1$。将共振边值问题转化为非共振边值问题，再运用不动点定理，可得到 Riemann-Liouville 分数阶微分方程三点边值问题解的存在性。TANG[14]研究了共振情形下 Caputo 分数阶微分方程四点边值问题

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,u(t),u'(t)), \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \\ u'(0)-\beta u(\xi)=0, \quad u'(1)+\gamma u(\eta)=0 \end{cases}$$

解的存在性，其中 $1<\alpha\leqslant 2$，$0<\xi,\eta<1$。运用 Mawhin 的重合度理论，可得到共振情形下 Caputo 分数阶微分方程四点边值问题解的存在性。HILFER[15]对 Riemann-Liouville 导数和 Caputo 导数进行了推广，得到介于这 2 个导数之间且包含这 2 个导数的 Hilfer 分数阶导数。具有 Hilfer 导数的分数阶微分方程在近 10 年取得了一些成果[16-19]。RI 等[20]研究了共振情形下 Hilfer 分数阶微分方程多点边值问题

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\beta}x(t)=f(t,x(t)), \quad 0<\alpha<1, \quad 0\leqslant\beta\leqslant 1, \quad t\in(0,T], \\ I_{0+}^{1-\gamma}x(0)=\sum_{i=1}^{m}c_i x(\tau_i), \quad \tau_i\in(0,T] \end{cases}$$

解的存在性，其中 $\Gamma(\gamma)=\sum_{i=1}^{m}c_i(\tau_i)^{\gamma-1}$，$D_{0+}^{\alpha,\beta}$ 是 $\alpha$ 阶 $\beta$ 型 Hilfer 分数阶导数，作者将共振边值问题转化为非共振边值问题，然后采用上下解的方法得到 Hilfer 分数阶微分方程多点边值问题解的存在性。double-order Hilfer 分数阶导数[21]是广义的 Hilfer 分数阶导数，目前有关 double-order Hilfer 导数分数阶微分方程的研究成果尚少[22-23]。BULAVATSKY[24]研究了具有广义 Hilfer 导数的反常扩散方程边值问题：

$$\begin{cases} D_{0+}^{(\alpha,\beta)\mu}u(x,t)=\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \\ u(0,t)=\varphi_1(t), \quad u(l,t)=\varphi_2(t), \quad I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)}u(x,0+)=\zeta_0(x), \end{cases}$$

其中 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C[0,T]$，$\zeta_0(x)\in C[0,l]$。文献详细介绍了广义 Hilfer 导数的概念，给出了它的拉普拉斯变换公式，讨论了反常扩散方程边值问题的封闭解，但并没有详细说明 double-order Hilfer 分数阶微分方程边值问题的可解性问题。

目前，研究人员已经对 Riemann-Liouville 和 Caputo 分数阶微分方程边值问题的可解性进行了广泛研究。从文献来看，尚未对共振情形下具有 double-order Hilfer 导数的分数阶微分方程边值问题展开研究。因此，基于前人的研究基础，笔者研究共振条件下 double-order Hilfer 分数阶微分方程积分边值问题

$$\begin{cases} D_{0+}^{(\alpha,\beta)\delta}u(t)=f(t,u(t)), \quad t\in(0,1], \\ D_{0+}^{\gamma-1}u(0)=D_{0+}^{\gamma-2}u(0)=\cdots=D_{0+}^{\gamma-n+1}u(0)=0, \quad u(1)=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t) \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 $D_{0+}^{(\alpha,\beta)\delta}$ 是 $\alpha,\beta$ 阶 $\delta$ 型 double-order Hilfer 分数阶导数，$m-1<\alpha<m$，$n-1<\beta<n$，

$0 \leqslant \delta \leqslant 1$，$\gamma = \beta + n\beta - \delta\beta$，$n = 2,3,4,\cdots$，$m = 1,2,3,\cdots$，$A(t)$ 是一个有界变差函数。

## 1 预备知识

为了方便起见，引入一些符号和定理。

设 $X$，$Y$ 是实 Banach 空间，$L:domL \subset X \to Y$ 是指数为零的 Fredholm 算子，$P:X \to X$ 和 $Q:Y \to Y$ 是连续投影算子，且满足 $\mathrm{Im}\ P = KerL$，$KerQ = \mathrm{Im}\ L$，$X = KerL \oplus KerP$，$Y = \mathrm{Im}\ L \oplus \mathrm{Im}\ Q$。由此可知，$L:domL \cap KerP \to \mathrm{Im}\ L$ 是可逆的，用 $K_p$ 表示它的逆。

**定义 1**[25]　设 $\Omega$ 为 $X$ 的有界开子集，且 $domL \cap \Omega \neq \phi$，算子 $N:X \to Y$，如果 $QN(\overline{\Omega})$ 有界，且 $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ 是紧的，则称 $N$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 $L$- 紧的。

**引理 1**[25]　设 $L$ 是指数为零的 Fredholm 算子，$N$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 $L$- 紧的，假设下列条件成立：

1）$\forall (u,\lambda) \in [(domL \backslash KerL) \cap \partial\Omega] \times (0,1)$，$Lu \neq \lambda Nu$；

2）$\forall u \in KerL \cap \partial\Omega$，$Nu \notin \mathrm{Im}\ L$；

3）$\deg(JQN|_{KerL}, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$，这里 $J:KerL \to \mathrm{Im}\ Q$ 是一个同构映射，则 $Lu = Nu$ 在 $domL \cap \overline{\Omega}$ 中至少有一个解。

**定义 2**[5]　函数 $y:(0,+\infty) \to R$ 的 $\alpha > 0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$I_{0+}^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) \mathrm{d}s \text{ , } t > 0 \text{ ,}$$

其中等号右边是在 $(0,+\infty)$ 上逐点有意义。

**定义 3**[5]　函数 $y:(0,+\infty) \to R$ 的 $\alpha > 0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数定义为

$$D_{0+}^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} \mathrm{d}s \text{ , } t > 0 \text{ ,}$$

其中等号右边是在 $(0,+\infty)$ 上逐点有意义，$n = [\alpha] + 1$。

**定义 4**[21]　函数 $y:(0,+\infty) \to R$ 的 $\alpha,\beta$ 阶 $\delta$ 型 double-order Hilfer 分数阶导数定义为

$$D_{0+}^{(\alpha,\beta)\delta} y(t) = I_{0+}^{\delta(m-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (I_{0+}^{(1-\delta)(n-\beta)}) y(t) \text{ ,} \tag{2}$$

其中 $(m-1) < \alpha < m$，$n-1 < \beta < n$，$0 \leqslant \delta \leqslant 1$。

**注 1**[21]：

1）算子 $D_{0+}^{(\alpha,\beta)\delta}$ 也能写为 $D_{0+}^{(\alpha,\beta)\delta} = I_{0+}^{\delta(m-\alpha)} D_{0+}^{\gamma}$，$\gamma = \beta + n\delta - \beta\delta$；

2）如果 $\delta = 0$，那么式(2)就表示为 $\beta$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数，即 $D_{0+}^{(\alpha,\beta)0} = D_{0+}^{\beta}$；

3）如果 $\delta = 1$ 且 $m = n$，那么式(2)就表示为 $\alpha$ 阶 Caputo 分数阶导数，即 $D_{0+}^{(\alpha,\beta)1} = {}^{c}D_{0+}^{\alpha}$。

**定义 5**[5]　对任意的 $0 \leqslant \eta < 1$，函数 $y$ 的加权空间定义为

$$C_{\eta}(0,1] := \{ y \mid t^{\eta} y(t) \in C[0,1] \} \text{ ,}$$

且范数为 $\| y \|_{C_{\eta}} = \| t^{\eta} y \|_{C}$，那么 $C_{\eta}(0,1]$ 是 Banach 空间。

**引理 2**[5]　对任意的 $\alpha > 0$，分数阶微分方程 $D_{0+}^{\alpha} u(t) = 0$ 的解：

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n} \text{ ,}$$

其中 $c_i \in R$，$i = 1,2,\cdots,n$，$n = [\alpha] + 1$。

**引理 3**[5]　如果 $\alpha > 0$，$\beta > -1$，且 $\beta \neq \alpha - i$，$i = 1,2,\cdots,[\alpha]+1$，那么

$$D_{0+}^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \text{ , } D_{0+}^{\alpha} t^{\alpha-i} = 0 \text{ 。}$$

**引理 4**[5]　如果 $\alpha > 0$，$\beta > 0$，且 $y \in L^1(\mathbb{R}^+)$，那么

$$I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} y(t) = I_{0+}^{\alpha+\beta} y(t) \text{ , } D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} y(t) = y(t) \text{ 。}$$

**引理 5**[5]　如果 $\alpha > \beta > 0$，且 $y \in L^1(\mathbb{R}^+)$，那么

$$D_{0+}^{\beta} I_{0+}^{\alpha} y(t) = I_{0+}^{\alpha-\beta} y(t) \text{ 。}$$

特别地，当 $\beta = k \in \mathbb{N}$ 且 $\alpha > k$ 时，有

$$\frac{d^k}{dt^k} (I_{0+}^{\alpha} y(t)) = I_{0+}^{\alpha-k} y(t) \text{ 。}$$

**引理6**[26] 在 $[a,b]$ 上的任一有界变差函数 $f(x)$ 都可以表示为2个增函数之差,即存在2个增函数 $h(x)$ 和 $g(x)$,使得 $f(x)=h(x)-g(x)$。

设 $X=C_{n-\gamma}(0,1]$,$Y=C[0,1]$。

假设以下条件成立。

$(\mathrm{H}_1)$ $\int_0^1 t^{\gamma-n}\mathrm{d}A(t)=1$;

$(\mathrm{H}_2)$ 映射 $f:(0,1]\times R\to R$ 满足 Carathéodory 条件:对几乎所有的 $t\in(0,1]$,$f(t,x)$ 是 $x$ 的连续函数,对每一个 $x$,$f(t,x)$ 是 $t$ 在 $(0,1]$ 上的可测函数,并且对 $\forall r>0$,存在 $\varphi_r\in Y$,满足 $|f(t,x)|\leqslant\varphi_r(t)$,$|x|\leqslant r$,a.e. $t\in(0,1]$。

定义算子 $L:domL\subset X\to Y$ 和算子 $N:X\to Y$ 分别如下:

$$Lu=D_{0+}^{(\alpha,\beta)\delta}u(t),\ u\in domL,\ Nu=f(t,u(t)),\ u\in X,$$

其中,

$$domL=\left\{u\,\middle|\,u\in X,D_{0+}^{(\alpha,\beta)\delta}u(t)\in Y,D_{0+}^{\gamma-1}u(0)=D_{0+}^{\gamma-2}u(0)=\cdots=D_{0+}^{\gamma-n+1}u(0)=0,u(1)=\int_0^1u(t)\mathrm{d}A(t)\right\},$$ 则微分方程边值问题(1)等价于 $Lu=Nu$,$u\in domL$。

## 2 主要结果

**引理7** 设$(\mathrm{H}_1)$成立,则 $L:domL\subset X\to Y$ 是一个零指标的 Fredholm 算子。

**证明:** 显然 $KerL=\{u\in domL\,|\,u(t)=ct^{\gamma-n},\forall t\in(0,1],c\in R\}$。

下面求 $\mathrm{Im}\,L$。一方面,取 $y\in\mathrm{Im}\,L$,则 $\exists u\in domL$,有 $Lu=y$,即 $D_{0+}^{(\alpha,\beta)\delta}u(t)=y(t)$。

通过注1可以得到

$$I_{0+}^{\delta(m-\alpha)}D_{0+}^{\gamma}u(t)=y(t)\text{。}\tag{3}$$

对式(3)两边同时应用 $D_{0+}^{\delta(m-\alpha)}$ 之后再应用 $I_{0+}^{\gamma}$,得到

$$u(t)=I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)+c_1t^{\gamma-1}+c_2t^{\gamma-2}+\cdots+c_nt^{\gamma-n}\text{。}$$

因为 $D_{0+}^{\gamma-1}u(0)=D_{0+}^{\gamma-2}u(0)=\cdots=D_{0+}^{\gamma-n+1}u(0)=0$,所以

$$u(t)=I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)+ct^{\gamma-n},$$

再依据 $u(1)=\int_0^1u(t)\mathrm{d}A(t)$ 和条件$(\mathrm{H}_1)$,得到

$$I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\big|_{t=1}-\int_0^1I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\mathrm{d}A(t)=0\text{。}\tag{4}$$

也就是说,$\mathrm{Im}\,L\subseteq\left\{y\in Y\,\middle|\,I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\big|_{t=1}-\int_0^1I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\mathrm{d}A(t)=0\right\}$。

另一方面,若 $y\in Y$ 且满足式(4),则取 $u(t)=I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)+ct^{\gamma-n}$,其中 $c$ 是常数。易证 $u$ 满足边值问题(1)的边界条件,并且

$$Lu(t)=I_{0+}^{\delta(m-\alpha)}D_{0+}^{\gamma}I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)+cI_{0+}^{\delta(m-\alpha)}D_{0+}^{\gamma}t^{\gamma-n}=I_{0+}^{\delta(m-\alpha)}D_{0+}^{\delta(m-\alpha)}y(t)=y(t)\text{。}$$

因此

$$\mathrm{Im}\,L\supseteq\left\{y\in Y\,\middle|\,I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\big|_{t=1}-\int_0^1I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\mathrm{d}A(t)=0\right\}\text{。}$$

综上所述,得到

$$\mathrm{Im}\,L=\left\{y\in Y\,\middle|\,I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\big|_{t=1}-\int_0^1I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\mathrm{d}A(t)=0\right\}\text{。}$$

定义线性算子 $P:X\to X$,

$$Pu(t)=t^{\gamma-n}\int_0^1u(t)\mathrm{d}A(t)\text{。}$$

显然,$P^2u=Pu$,$\mathrm{Im}\,P=KerL$,$KerP=\left\{u\in X\,\middle|\,\int_0^1u(t)\mathrm{d}A(t)=0\right\}$,$X=KerL\oplus KerP$。

定义线性算子 $Q:Y\to Y$,

$$Qy(t)=\frac{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha)+1)}{1-\int_0^1 t^{\gamma-\delta(m-\alpha)}\mathrm{d}A(t)}\left(I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\big|_{t=1}-\int_0^1 I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\mathrm{d}A(t)\right)。$$

通过计算得到 $Q^2y=Qy$,即 $Q$ 是一个幂等算子,是 $Y$ 上的线性投影算子。显然,$\operatorname{Im} L=KerQ$。

任取 $y\in Y$,可写成 $y=(y-Qy)+Qy$,其中 $(y-Qy)\in KerQ=\operatorname{Im} L$,$Qy\in \operatorname{Im} Q$,因此 $Y=\operatorname{Im} L+\operatorname{Im} Q$。取 $y\in \operatorname{Im} L\cap \operatorname{Im} Q$,由 $y\in \operatorname{Im} Q$ 得 $y=Qy$;由 $y\in \operatorname{Im} L=KerQ$,得 $Qy=0$,因此 $y=0$,$Y=\operatorname{Im} L\oplus \operatorname{Im} Q$。又 $\dim KerL=1=co\dim \operatorname{Im} L$,所以,$L$ 是一个零指标的 Fredholm 算子。

**引理 8**　定义线性算子 $K_p:\operatorname{Im} L\to domL\cap KerP$,

$$K_py(t)=I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)-t^{\gamma-n}\int_0^1 I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\mathrm{d}A(t),$$

则 $K_p=(L|domL\cap KerP)^{-1}$。

**证明:**取 $y\in \operatorname{Im} L$,可以得到 $K_py\in domL\cap KerP$,且

$$LK_py(t)=I_{0+}^{\delta(m-\alpha)}D_{0+}^{\gamma}I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)-I_{0+}^{\delta(m-\alpha)}D_{0+}^{\gamma}t^{\gamma-n}\int_0^1 I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}y(t)\mathrm{d}A(t)=I_{0+}^{\delta(m-\alpha)}D_{0+}^{\delta(m-\alpha)}y(t)=y(t)。$$

另一方面,若 $u\in domL\cap KerP$,由引理 4 和引理 5 可得:

$$\begin{aligned}K_pLu(t)=&I_{0+}^{\gamma}D_{0+}^{\delta(m-\alpha)}I_{0+}^{\delta(m-\alpha)}D_{0+}^{\gamma}u(t)-t^{\gamma-n}\int_0^1 I_{0+}^{\gamma}D_{0+}^{\delta(m-\alpha)}I_{0+}^{\delta(m-\alpha)}D_{0+}^{\gamma}u(t)\mathrm{d}A(t)=\\
&I_{0+}^{\gamma}D_{0+}^{\gamma}u(t)-t^{\gamma-n}\int_0^1 I_{0+}^{\gamma}D_{0+}^{\gamma}u(t)\mathrm{d}A(t)=\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\int_0^t(t-s)^{\gamma}\frac{d^n}{ds^n}I_{0+}^{n-\gamma}u(s)\mathrm{d}s\right\}-\\
&t^{\gamma-n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\int_0^t(t-s)^{\gamma}\frac{d^n}{ds^n}I_{0+}^{n-\gamma}u(s)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}A(t)=\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}I_{0+}^{n-\gamma}u(s)\mathrm{d}s-\frac{D_{0+}^{\gamma-1}u(0)}{\Gamma(\gamma+1)}t^{\gamma}\right\}-\\
&t^{\gamma-n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}I_{0+}^{n-\gamma}u(s)\mathrm{d}s-\frac{D_{0+}^{\gamma-1}u(0)}{\Gamma(\gamma+1)}t^{\gamma}\right\}\mathrm{d}A(t)=\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-2}\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}I_{0+}^{n-\gamma}u(s)\mathrm{d}s-\frac{D_{0+}^{\gamma-1}u(0)}{\Gamma(\gamma+1)}t^{\gamma}-\frac{D_{0+}^{\gamma-2}u(0)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}\right\}-\\
&t^{\gamma-n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}\int_0^t(t-s)^{\gamma-2}\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}I_{0+}^{n-\gamma}u(s)\mathrm{d}s-\frac{D_{0+}^{\gamma-1}u(0)}{\Gamma(\gamma+1)}t^{\gamma}-\frac{D_{0+}^{\gamma-2}u(0)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}\right\}\mathrm{d}A(t)=\\
&\cdots=\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_0^t u(s)\mathrm{d}s-\frac{D_{0+}^{\gamma-1}u(0)}{\Gamma(\gamma+1)}t^{\gamma}-\frac{D_{0+}^{\gamma-2}u(0)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}-\cdots-\frac{D_{0+}^{\gamma-n}u(0)}{\Gamma(\gamma-n+2)}t^{\gamma-n+1}\right\}-\\
&t^{\gamma-n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_0^t u(s)\mathrm{d}s-\frac{D_{0+}^{\gamma-1}u(0)}{\Gamma(\gamma+1)}t^{\gamma}-\frac{D_{0+}^{\gamma-2}u(0)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}-\cdots-\frac{D_{0+}^{\gamma-n}u(0)}{\Gamma(\gamma-n+2)}t^{\gamma-n+1}\right\}\mathrm{d}A(t)=\\
&u(t)-\frac{D_{0+}^{\gamma-n}u(0)}{\Gamma(\gamma-n+1)}t^{\gamma-n}-t^{\gamma-n}\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t)+\frac{D_{0+}^{\gamma-n}u(0)}{\Gamma(\gamma-n+1)}t^{\gamma-n}\int_0^1 t^{\gamma-n}\mathrm{d}A(t)=\\
&u(t)。\end{aligned}$$

因此,$K_p=(L|_{domL\cap KerP})^{-1}$。

**引理 9**　设 $\Omega$ 是 $X$ 的有界开子集,且 $domL\cap\Omega\neq\phi$,则 $N$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 $L$- 紧的。

**证明:**取 $\Omega\subset X$ 有界集,存在 $r>0$,$\|u\|_X\leqslant r$,$u\in\overline{\Omega}$,由条件($H_2$)可知存在非负函数 $\varphi_r(t)\in Y$,使得

$$|f(t,u(t))|\leqslant\varphi_r(t),\ t\in(0,1]。$$

对 $u\in\overline{\Omega}$,有

$$|QNu(t)|=\left|\frac{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha)+1)}{1-\int_0^1 t^{\gamma-\delta(m-\alpha)}\mathrm{d}A(t)}\left(I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}Nu(t)\big|_{t=1}-\int_0^1 I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}Nu(t)\mathrm{d}A(t)\right)\right|=$$

$$\frac{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha)+1)}{1-\int_0^1 t^{\gamma-\delta(m-\alpha)}\mathrm{d}A(t)}\left|\left(I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}Nu(t)\big|_{t=1}-\int_0^1 I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}Nu(t)\mathrm{d}A_1(t)+\int_0^1 I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}Nu(t)\mathrm{d}A_2(t)\right)\right|\leqslant$$

$$\frac{\gamma-\delta(m-\alpha)}{1-\int_0^1 t^{\gamma-\delta(m-\alpha)}\mathrm{d}A(t)}\left(\int_0^1 (1-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}|f(s,u(s))|\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^1\int_0^t (t-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}|f(s,u(s))|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}(A_1(t)+A_2(t))\right)\leqslant$$

$$\frac{(\gamma-\delta(m-\alpha))\,\|\varphi_r\|_Y}{1-\int_0^1 t^{\gamma-\delta(m-\alpha)}\mathrm{d}A(t)}\left(\int_0^1 (1-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^1\int_0^t (t-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}(A_1(t)+A_2(t))\right)\leqslant$$

$$\frac{\|\varphi_r\|_Y}{1-\int_0^1 t^{\gamma-\delta(m-\alpha)}\mathrm{d}A(t)}\left(1+\int_0^1 t^{\gamma-\delta(m-\alpha)}\mathrm{d}(A_1(t)+A_2(t))\right):=K,$$

其中 $A(t)=A_1(t)-A_2(t)$，$A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 均为增函数。故 $QN(\overline{\Omega})$ 有界。

对 $u\in\overline{\Omega}$，有

$$|t^{n-\gamma}K_p(I-Q)Nu(t)|\leqslant$$

$$\left|t^{n-\gamma}I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}(I-Q)Nu(t)-\int_0^1 I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}(I-Q)Nu(t)\mathrm{d}A(t)\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\left(\int_0^t (t-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}|(I-Q)Nu(s)|\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^1\int_0^t (t-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}|(I-Q)Nu(s)|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}(A_1(t)+A_2(t))\right)\leqslant$$

$$\frac{\|\varphi_r\|_Y+K}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\left(1+\int_0^1 t^{\gamma-\delta(m-\alpha)}\mathrm{d}(A_1(t)+A_2(t))\right),$$

故 $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ 有界。

任取 $u\in\overline{\Omega}$，$0<t_1\leqslant t_2\leqslant 1$，有

$$|t_2^{n-\gamma}K_p(I-Q)Nu(t_2)-t_1^{n-\gamma}K_p(I-Q)Nu(t_1)|\leqslant$$

$$|t_2^{n-\gamma}I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}(I-Q)Nu(t_2)-t_1^{n-\gamma}I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}(I-Q)Nu(t_1)|+$$

$$\left|\int_0^1 I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}(I-Q)Nu(t_1)\mathrm{d}A(t_1)-\int_0^1 I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}(I-Q)Nu(t_2)\mathrm{d}A(t_2)\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\left(\int_0^{t_1}[t_2^{n-\gamma}(t_2-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}-t_1^{n-\gamma}(t_1-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}]\,|(I-Q)Nu(s)|\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_{t_1}^{t_2}t_2^{n-\gamma}(t_2-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}|(I-Q)Nu(s)|\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$\frac{\|\varphi_r\|_Y+K}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\left(\int_0^{t_1}(t_2^{n-\gamma}-t_1^{n-\gamma})(t_2-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}+t_1^{n-\gamma}[(t_2-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}-\right.$$

$$\left.(t_1-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}]\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$\frac{\|\varphi_r\|_Y+K}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha)+1)}[(t_2^{n-\gamma}-t_1^{n-\gamma})+(t_2^{\gamma-\delta(m-\alpha)}-t_1^{\gamma-\delta(m-\alpha)})],$$

则 $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ 是等度连续的。因此，由 Arzela-Ascoli 定理可知，$N$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 $L$- 紧的。

**定理 1** 假设($H_1$)和($H_2$)以及下面的 3 个条件成立：

($H_3$)存在常数 $M>0$，使得当 $u\in domL$，$\forall t\in(0,1]$，$|u(t)|>M$ 时，$QNu\neq 0$。

($H_4$)存在非负函数 $a(t)\in X$，$b(t)\in Y$，使得

$$|f(t,x)|\leqslant a(t)+b(t)|x|,\ t\in(0,1],\ x\in R,$$

其中 $\|b\|_Y<\dfrac{\Gamma(2\gamma-\delta(m-\alpha)-n+1)}{2\Gamma(\gamma-n+1)}$。

($H_5$)存在常数 $B>0$，如果 $|c|>B$，那么 $cQNu(t)>0$ 或 $cQNu(t)<0$(其中 $u(t)=ct^{\gamma-n}$)中有一个

不等式成立，边值问题(1)至少有一个解。

为证明该结论，首先证明如下 3 个引理。

**引理 10** 若条件($H_3$)和($H_4$)成立，则 $\Omega_1=\{u\,|\,u\in domL\backslash KerL,Lu=\lambda Nu,\lambda\in(0,1)\}$ 在 $X$ 上是有界的。

**证明**：任取 $u\in\Omega_1$，则 $Lu(t)=\lambda Nu(t)$，因此

$$u(t)=\lambda I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}Nu(t)+ct^{\gamma-n}\ ,\ c\in R\ 。$$

依据 $\lambda Nu\in \mathrm{Im}\,L=KerQ$，得 $QNu(t)=0$。通过条件($H_3$)可知，存在 $t_0\in(0,1]$，使得 $|u(t_0)|\leqslant M$。将 $t=t_0$ 代入 $u(t)$ 中，得

$$u(t_0)=\frac{\lambda}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\int_0^{t_0}(t_0-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s+ct_0^{\gamma-n}\ ,$$

那么有

$$|c|\leqslant t_0^{n-\gamma}|u(t_0)|+\frac{\lambda t_0^{n-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\int_0^{t_0}(t_0-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}|f(s,u(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$M+\frac{t_0^{n-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\int_0^{t_0}(t_0-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}s^{\gamma-n}s^{n-\gamma}(a(s)+b(s)|u(s)|)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$M+\frac{\|a\|_X+\|b\|_Y\|u\|_X}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\int_0^{t_0}t_0^{n-\gamma}(t_0-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}s^{\gamma-n}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$M+\frac{\Gamma(\gamma-n+1)(\|a\|_X+\|b\|_Y\|u\|_X)}{\Gamma(2\gamma-\delta(m-\alpha)-n+1)}。$$

因此

$$|t^{n-\gamma}u(t)|=|\lambda t^{n-\gamma}I_{0+}^{\gamma-\delta(m-\alpha)}Nu(t)+c|\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\int_0^t t^{n-\gamma}(t-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}|f(s,u(s))|\mathrm{d}s+|c|\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma-\delta(m-\alpha))}\int_0^t t^{n-\gamma}(t-s)^{\gamma-\delta(m-\alpha)-1}s^{\gamma-n}s^{n-\gamma}(a(s)+b(s)|u(s)|)\mathrm{d}s+|c|\leqslant$$

$$M+\frac{2\Gamma(\gamma-n+1)(\|a\|_X+\|b\|_Y\|u\|_X)}{\Gamma(2\gamma-\delta(m-\alpha)-n+1)}。$$

整理得

$$\|u\|_X\leqslant\frac{M\Gamma(2\gamma-\delta(m-\alpha)-n+1)+2\Gamma(\gamma-n+1)\|a\|_X}{\Gamma(2\gamma-\delta(m-\alpha)-n+1)-2\Gamma(\gamma-n+1)\|b\|_Y}\ ,$$

故 $\Omega_1$ 是有界的。

**引理 11** 若条件($H_1$)—($H_3$)成立，则 $\Omega_2=\{u\mid u\in KerL,Nu\in \mathrm{Im}\,L\}$ 在 $X$ 上是有界的。

**证明**：令 $u\in\Omega_2$，则 $u(t)=ct^{\gamma-n}$，$c\in R$。因此，$|t^{n-\gamma}u(t)|=|c|$。又 $QNu=0$，由条件($H_3$)可知，存在 $t_0\in(0,1]$，使得 $|u(t_0)|\leqslant M$。将 $t=t_0$ 代入 $u(t)=ct^{\gamma-n}$ 中，可得 $|c|\leqslant M$，故 $\Omega_2$ 是有界的。

**引理 12** 若条件($H_1$)—($H_3$)和($H_5$)成立，则集合

$$\Omega_3=\{u\in KerL\,|\lambda Ju+(1-\lambda)\theta QNu=0,\lambda\in[0,1]\}$$

在 $X$ 中是有界的。其中 $J:KerL\to\mathrm{Im}\,Q$，$J(ct^{\gamma-n})=c$，($c\in R$，$t\in(0,1]$)是线性同构映射，

$$\theta=\begin{cases}1,\text{如果}(H_5)(1)\text{ 成立；}\\-1,\text{如果}(H_5)(2)\text{ 成立。}\end{cases}$$

**证明**：任取 $u\in\Omega_3$，则 $u=ct^{\gamma-n}$，$\lambda J(ct^{\gamma-n})+(1-\lambda)\theta QN(ct^{\gamma-n})=0$。

如果 $\lambda=1$，则 $c=0$；如果 $\lambda=0$，由条件($H_5$)，得到 $|c|\leqslant B$；如果 $\lambda\in(0,1)$，假设 $|c|>B$，由条件($H_5$)可得到 $\lambda c^2=-(1-\lambda)\theta cQNu(t)<0$ 是矛盾的。因此 $\Omega_3$ 有界。

下面证明定理 1。

**证明**：取 $X$ 中的一个有界开集 $\Omega\supset\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2\cup\overline{\Omega}_3\cup\{0\}$，由引理 9 可知 $N$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 $L$- 紧的。由引理 10 和引理 11 得到：

a) $\forall(u,\lambda)\in[(domL\backslash KerL)\cap\partial\Omega]\times(0,1)$，$Lu\neq\lambda Nu$；

b) $\forall u\in KerL\cap\partial\Omega$，$Nu\notin\mathrm{Im}\,L$。

证明 $\deg(JQN|_{KerL},\Omega\cap KerL,0)\neq 0$。

令 $H(u,\lambda)=\lambda Ju+\theta(1-\lambda)QNu$，由引理 12 可知，$H(u,\lambda)\neq 0$，$u\in\partial\Omega\cap KerL$。

由度的同伦不变性可得：

$$\begin{aligned}\deg(JQN|_{KerL},\Omega\cap KerL,0)=&\deg(\theta H(\cdot,0),\Omega\cap KerL,0)=\\&\deg(\theta H(\cdot,1),\Omega\cap KerL,0)=\\&\deg(\theta J,\Omega\cap KerL,0)\neq 0。\end{aligned}$$

由此应用引理 1，可知微分方程边值问题(1)在 $X$ 上至少有一个解。证毕。

## 3 举 例

考虑下述共振边值问题：

$$\begin{cases}D_{0+}^{(\frac{3}{2},\frac{5}{2})\frac{1}{2}}u(t)=t+\dfrac{1}{2}\sin u(t)+\dfrac{1}{3}u(t),\quad t\in(0,1],\\ D_{0+}^{\frac{7}{4}}u(0)=D_{0+}^{\frac{3}{4}}u(0)=0,\quad u(1)=\displaystyle\int_0^1 u(t)\mathrm{d}(\frac{7}{10}t)。\end{cases}\tag{5}$$

对应边值问题(1)，有 $\alpha=\dfrac{3}{2}$，$\beta=\dfrac{5}{2}$，$\delta=\dfrac{1}{2}$，$\gamma=\dfrac{11}{4}$，$f(t,x)=t+\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{3}x$。

令 $a(t)=t+\dfrac{1}{2}$，$b(t)=\dfrac{1}{3}$，得到

$$|f(t,u(t))|\leqslant t+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}|u(t)|=a(t)+b(t)|u(t)|,$$

并且

$$\|b\|_Y=\frac{1}{3}<\frac{\Gamma(2\gamma-\delta(m-\alpha)-n+1)}{2\Gamma(\gamma-n+1)}\approx 1.039,$$

则条件($H_4$)成立。

令 $M=5$，对任意的 $t\in(0,1]$，如果 $u(t)>M$，那么

$$f(t,u(t))\geqslant\frac{2M-3}{6}>0,$$

因此

$$\begin{aligned}QNu(t)=&\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{1-\frac{7}{10}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})}\int_0^1(1-s)^{\frac{3}{2}}f(s,u(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})}\int_0^1\int_0^t(t-s)^{\frac{3}{2}}f(s,u(s))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}(\frac{7}{10}t)\right)>\\&\frac{25(2M-3)}{48}\left(\int_0^1(1-s)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s-\frac{7}{10}\int_0^1\int_0^t(t-s)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right)>\\&\frac{2M-3}{6}>0。\end{aligned}$$

对任意的 $t\in(0,1]$，如果 $u(t)<-M$，那么

$$f(t,u(t))\leqslant\frac{9-2M}{6}<0,$$

因此

$$\begin{aligned}QNu(t)=&\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{1-\frac{7}{10}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})}\left(\int_0^1(1-s)^{\frac{3}{2}}f(s,u(s))\mathrm{d}s-\int_0^1\int_0^t(t-s)^{\frac{3}{2}}f(s,u(s))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}(\frac{7}{10}t)\right)\right]<\\&\frac{25(9-2M)}{48}\left(\int_0^1(1-s)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s-\frac{7}{10}\int_0^1\int_0^t(t-s)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right)<\\&\frac{9-2M}{6}<0。\end{aligned}$$

故得到条件($H_3$)成立。

最后，令 $B=6$，如果 $c>B$，有

$$\frac{25c}{8}\left(\int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{2}} f(s,cs^{-\frac{1}{4}})\mathrm{d}s-\frac{7}{10}\int_0^1\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}} f(s,cs^{-\frac{1}{4}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)>$$

$$\frac{25c}{8}\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s+\frac{1}{3}c\int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}s-\right.$$

$$\left.\frac{7}{10}\int_0^1\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}} s\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s+\frac{1}{3}c\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)>0。$$

如果 $c<-B$，有

$$\frac{25c}{8}\left(\int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{2}} f(s,cs^{-\frac{1}{4}})\mathrm{d}s-\frac{7}{10}\int_0^1\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}} f(s,cs^{-\frac{1}{4}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)<$$

$$\frac{25c}{8}\left(\int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{2}} s\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s+\frac{1}{3}c\int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\frac{7}{10}\int_0^1\int_0^t \frac{1}{2}(t-s)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s-\frac{1}{3}c\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)<0。$$

所以条件($H_5$)成立。由定理 1 得到问题(5)至少有一个解。

## 4　结　语

本文运用 Mawhin 重合度理论，研究了共振情形下 double-order Hilfer 分数阶微分方程在积分边界条件下解的存在性，扩展了导数阶数的取值范围，丰富了分数阶微分方程可解性的理论，为微分方程在空气动力学、经济学、控制理论等领域的应用提供了理论参考。

本研究仅考虑了共振微分方程 $Lx=Nx$ 边值问题中 $L$ 是线性算子且 $Nx$ 连续时的可解性，条件要求过高，未能体现出更一般化的结果。因此，在未来的研究中，将对含有 $p$-Laplacian 算子的非线性 double-order Hilfer 分数阶微分方程在一般化条件下解的存在性进行深入探讨，并对得到的结果进行验证。

## 参考文献/References：


[1] AFSHARI H，BALEANU D. Applications of some fixed point theorems for fractional differential equations with Mittag-Leffler kernel[J]. Advances in Difference Equations，2020(1)：140-150.

[2] SOUSA J V，KUCCHE K D，de OLIVEIRA E C. Stability of $\psi$-Hilfer impulsive fractional differential equations[J]. Applied Mathematics Letters，2019，88：73-80.

[3] ATANGANA A，AKGÜL A，OWOLABI K M. Analysis of fractal fractional differential equations[J]. Alexandria Engineering Journal，2020，59(3)：1117-1134.

[4] CUI Yujun，MA Wenjie，SUN Qiao，et al. New uniqueness results for boundary value problem of fractional differential equation[J]. Nonlinear Analysis：Modelling and Control，2018，23(1)：31-39.

[5] KILBAS A A，SRIVASTAVA H M，TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations[M]. Amsterdam：Elsevier，2006.

[6] BALEANU D，ETEMAD S，REZAPOUR S. On a fractional hybrid integro-differential equation with mixed hybrid integral boundary value conditions by using three operators[J]. Alexandria Engineering Journal，2020，59(5)：3019-3027.

[7] HAJIPOUR M，JAJARMI A，BALEANU D. On the accurate discretization of a highly nonlinear boundary value problem[J]. Numerical Algorithms，2018，79(3)：679-695.

[8] HE Jihuan. Taylor series solution for a third order boundary value problem arising in architectural engineering[J]. Ain Shams Engineering Journal，2020，11(4)：1411-1414.

[9] JIANG Weihua. The existence of solutions to boundary value problems of fractional differential equations at resonance[J]. Nonlinear Analysis：Theory Methods & Applications，2011，74(5)：1987-1994.

[10] CHENG Lingling，LIU Wenbin，YE Qingqing. Boundary value problem for a coupled system of fractional differential equations with $p$-Laplacian operator at resonance[J]. Electronic Journal of Differential Equations，2014(60)：1-12.

[11] JIANG Weihua. Solvability for a coupled system of fractional differential equations at resonance[J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2012，13(5)：2285-2292.

[12] ZHANG Wei，LIU Wenbin，CHEN Taiyong. Solvability for a fractional $p$-Laplacian multipoint boundary value problem at resonance on

infinite interval[J].Advances in Difference Equations,2016(1):183-196.

[13] WANG Yongqing,LIU Lishan.Positive solutions for a class of fractional 3-point boundary value problems at resonance[J].Advances in Difference Equations,2017(1):7-19.

[14] TANG Xiaosong.Existence of solutions of four-point boundary value problems for fractional differential equations at resonance[J].Journal of Applied Mathematics and Computing,2016,51(1):145-160.

[15] HILFER R.Applications of Fractional Calculus in Physics[M].Singapore:World Scientific,2000.

[16] KAMOCKI R.A new representation formula for the Hilfer fractional derivative and its application[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2016,308:39-45.

[17] FURATI K M,KASSIM M D,TATAR N E.Non-existence of global solutions for a differential equation involving Hilfer fractional derivative[J].Electronic Journal of Differential Equations,2013,235:1-10.

[18] FURATI K M,KASSIM M D,TATAR N E.Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative[J].Computers & Mathematics with Applications,2012,64(6):1616-1626.

[19] GU Haibo,TRUJILLO J J.Existence of mild solution for evolution equation with Hilfer fractional derivative[J].Applied Mathematics and Computation,2015,257:344-354.

[20] RI Y D,CHOI H C,CHANG K J.Constructive existence of solutions of multi-point boundary value problem for hilfer fractional differential equation at resonance[J].Mediterranean Journal of Mathematics,2020,17(3):95-114.

[21] KARIMOV E,RUZHANSKY M,TOSHTEMIROV B.A Boundary-value Problem for a Mixed Type Equation Involving Hyper-Bessel Fractional Differential Operator and Hilfer's Double Order Fractional Derivative[DB/OL].[2021-07-15].https://arxiv.org/abs/2103.08989.

[22] KARIMOV E,KERBAL S.Tricomi type problem for mixed type equation with sub-diffusion and wave equation[J].Scientific Journal of the Fergana State University,2019,2(3):10-14.

[23] AWAD E.On the time-fractional Cattaneo equation of distributed order[J].Physica A:Statistical Mechanics and Its Applications,2019,518:210-233.

[24] BULAVATSKY V M.Closed form of the solutions of some boundary-value problems for anomalous diffusion equation with Hilfer's generalized derivative[J].Cybernetics and Systems Analysis,2014,50(4):570-577.

[25] MAWHIN J.Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations[C]// Topological Methods for Ordinary Differential Equations.Berlin,Heidelberg:Springer,1993:74-142.

[26] 程其襄,张奠宙,魏国强,等.实变函数与泛函分析基础[M].2版.北京:高等教育出版社,2003.