文章编号:1008-1542(2021)04-0360-09

非线性二阶差分方程三点边值问题的研究

魏文英[1],纪玉德[2],郭彦平[2]

(1.河北工程技术学院软件学院,河北石家庄　050091;2.河北科技大学理学院,河北石家庄　050018)

摘　要:为了拓展非线性离散边值问题的基本理论,研究了一类非线性二阶差分方程三点边值问题正解存在性的充分条件。首先,给出了相应的二阶差分方程三点边值问题解的表达式并证明其性质;其次,在 Banach 空间中构造合适的锥和积分算子,运用锥上的 Krasnoselskii's 不动点定理,在非线性项允许变号的条件下,获得非线性二阶差分方程三点边值问题正解存在性的充分条件;最后,通过 2 个例子证明主要定理和结果的有效性。结果表明,定理条件得证且离散边值问题满足正解的存在性。所研究的方法在二阶离散边值问题理论证明方面效果良好,对探究非线性高阶多点离散边值问题具有一定的借鉴意义。

关键词:差分方程;离散边值问题;不动点定理;锥;正解;存在性

中图分类号:O175　　**文献标识码:**A　　**doi:**10.7535/hbkd.2021yx04006

Research of the three-point boundary value problems for nonlinear second-order difference equation

WEI Wenying[1],JI Yude[2],GUO Yanping[2]

(1. School of Software, Hebei Polytechnic Institute, Shijiazhuang, Hebei 050091, China; 2. School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: In order to extend the basic theory of nonlinear discrete boundary value problems, this paper studied the sufficient conditions for the existence of positive solutions for a class of nonlinear second-order difference equations with three-point boundary value problems. Firstly, the expressions of the solutions for the corresponding three-point boundary value problems for second-order difference equations were given and their properties were proved; Secondly, by constructing suitable cone and integral operator in Banach space and utilizing Krasnoselskii's fixed point theorem in cones, the sufficient conditions for the existence of positive solutions of three-point boundary value problems for nonlinear second-order difference equations were obtained under the condition that the nonlinear term was allowed to change sign. Finally, two examples were given to illustrate the validity of the main theorems and results. The results show that the conditions of the theorem are proved and the discrete boundary value problems satisfies the existence condition of positive solutions. The method is effective in the theoretical proof

收稿日期:2021-05-11;修回日期:2021-06-09;责任编辑:张士莹

基金项目:河北省自然科学基金(A2015208051);河北省高等学校科学技术研究指导项目(Z2019027)

第一作者简介:魏文英(1982—),女,河北邯郸人,讲师,硕士,主要从事常微分方程及差分方程方面的研究。

通讯作者:纪玉德副教授。E-mail:ji_yude@163.com

魏文英,纪玉德,郭彦平.非线性二阶差分方程三点边值问题的研究[J].河北科技大学学报,2021,42(4):360-368.

WEI Wenying,JI Yude,GUO Yanping.Research of the three-point boundary value problems for nonlinear second-order difference equation [J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2021,42(4):360-368.

of the second-order discrete boundary value problem, and has reference for the study of the nonlinear high-order multi-point discrete boundary value problems.

Keywords: difference equation; discrete boundary value problem; fixed point theorem; cone; positive solution; existence

多点边值问题的研究起源于应用数学和物理领域。例如，弹力稳定性理论中的很多问题，都可以用多点边值问题的方法进行处理。因此，多点边值问题受到了很多研究者的关注，参见文献[1]、文献[2]及其参考文献。

在文献[3]和文献[4]中，研究人员应用不动点定理，证明了如下三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(u(t))=0, & 0<t<1, \\ u(0)=0, & u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases}$$

多个正解的存在性，其中非线性项 f 是超线性的或次线性的，$0<\eta<1, 0<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$，$f\in C([0,+\infty),(0,+\infty))$，$a\in C([0,1],[0,+\infty))$，且存在 $t_0\in[0,1]$，使得 $a(t_0)>0$。而后，XU 等[5-6]证明了上述三点边值问题至少存在 1 个和 3 个解的存在性，其中 $0<\alpha,\eta<1, f\in C(\mathrm{R},\mathrm{R})$。

LI 等[7]利用 Krasnoselskii's 不动点定理研究了如下三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)u'(t)+\lambda f(t,u(t))=0, & 0<t<1, \\ u'(0)=0, & u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases}$$

至少有 1 个正解的存在性，其中 $0<\alpha,\eta<1, \lambda>0, a\in C([0,1],(-\infty,0))$，且非线性项 $f\in C([0,1]\times\mathrm{R},\mathrm{R})$。

对于二阶差分方程满足局部（混合周期）和非局部边界条件解的存在性和多解性，人们进行了广泛研究[8-18]。从文献来看，关于非线性差分方程多点边值问题解的存在性的研究成果还很少。受上述文献中研究方法的启发，本文利用锥上的 Krasnoselskii's 不动点定理，研究非线性二阶三点离散边值问题

$$\Delta^2 u(t)+a(t)\Delta u(t)+\lambda f(t,u(t))=0, \quad t\in\{0,1,\cdots,n-2\}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \Delta u(0)=0, \\ u(n)=\alpha u(\eta) \end{cases} \tag{2}$$

正解存在性的充分条件，其中 $\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)$，且有 $\sum\limits_{t=t_0}^{n-1}\Delta u(t)=u(n)-u(t_0)$ 和 $\Delta\Big(\sum\limits_{t=t_0}^{n-1}u(t)\Big)=u(n)$ 成立。

假设条件：

(H_1) $\lambda>0, 0<\alpha<1, \eta\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 和 $a(t)<0, t\in\{0,1,\cdots,n\}$；

(H_2) $f\in C(\{0,1,\cdots,n\}\times\mathrm{R},\mathrm{R})$，且当 $(t,u)\in\{0,1,\cdots,n\}\times\mathrm{R}$ 时，存在 $M>0$，使得 $f(t,u)>-M$。

利用锥上的 Krasnoselskii's 不动点定理，获得离散边值问题(1)和问题(2)至少存在 1 个正解的充分条件。

1　预备知识

引理 1[19]（Krasnoselskii's 不动点定理）　设 E 是 Banach 空间，K 是 E 上的 1 个锥，并且 Ω_1 和 Ω_2 是 E 的有界开集，满足 $0\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，假设算子 $A: K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是全连续算子，且满足如下 2 个条件之一：

1) $\|Au\|\leqslant\|u\|, \quad u\in K\cap\partial\Omega_1$，且 $\|Au\|\geqslant\|u\|, \quad u\in K\cap\partial\Omega_2$，

2) $\|Au\|\geqslant\|u\|, \quad u\in K\cap\partial\Omega_1$，且 $\|Au\|\leqslant\|u\|, \quad u\in K\cap\partial\Omega_2$，

那么，算子 A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中至少存在 1 个不动点。

对于 $u\in\{u_0,u_1,\cdots,u_n\}$，令 $\|u\|=\max\limits_{t\in\{0,1,\cdots,n\}}|u(t)|$，易知 $X=\{(u_0,u_1,\cdots,u_n)\mid u_i\in R, i=0,1,\cdots,n\}$ 关于范数 $\|\cdot\|$ 构成 Banach 空间。

引理 2　假设条件 (H_1) 成立，则对任意 $y\in X$，二阶离散三点边值问题

$$\Delta^2 u(t)+a(t)\Delta u(t)+y(t)=0, \quad t\in\{0,1,\cdots,n-2\}, \tag{3}$$

$$\begin{cases}\Delta u(0)=0,\\ u(n)=\alpha u(\eta)\end{cases} \tag{4}$$

有唯一解，

$$u(t)=-\sum_{j=1}^{t-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)+\frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)-\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}p(i+1)y(i)\right), \tag{5}$$

其中 $p(t)=\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{1-a(i)}$。

证明 假设 $u(t)$ 满足边值问题(3)和问题(4)。因为 $p(t)=\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{1-a(i)}$，有 $p(t)\geqslant 0$，$p(0)=1$。用 $p(t)$ 乘以式(3)的两边，得到 $\Delta(p(t)\Delta u(t))+p(t+1)y(t)=0$，
由差分的性质可推出：

$$p(1)\Delta u(1)-p(0)\Delta u(0)=-p(1)y(0),$$
$$p(2)\Delta u(2)-p(1)\Delta u(1)=-p(2)y(1),$$
$$p(t)\Delta u(t)-p(t-1)\Delta u(t-1)=-p(t)y(t-1),$$
$$p(t)\Delta u(t)-p(0)\Delta u(0)=-\sum_{i=0}^{t-1}p(i+1)y(i)。$$

由边界条件 $\Delta u(0)=0$，得 $p(t)\Delta u(t)=-\sum_{i=0}^{t-1}p(i+1)y(i)$，
所以

$$\Delta u(t)=-\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{t-1}p(i+1)y(i)。 \tag{6}$$

一方面，可得

$$\Delta u(1)=u(2)-u(1)=-\frac{1}{p(1)}\sum_{i=0}^{0}p(i+1)y(i),$$
$$\Delta u(2)=u(3)-u(2)=-\frac{1}{p(2)}\sum_{i=0}^{1}p(i+1)y(i),$$
$$\vdots$$
$$\Delta u(t-1)=u(t)-u(t-1)=-\frac{1}{p(t-1)}\sum_{i=0}^{t-2}p(i+1)y(i)。$$

将上述方程两边相加，得

$$u(t)-u(0)=-\sum_{j=1}^{t-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)。 \tag{7}$$

另一方面，有

$$\Delta u(n-1)=u(n)-u(n-1)=-\frac{1}{p(n-1)}\sum_{i=0}^{n-2}p(i+1)y(i),$$
$$\Delta u(n-2)=u(n-1)-u(n-2)=-\frac{1}{p(n-2)}\sum_{i=0}^{n-3}p(i+1)y(i),$$
$$\vdots$$
$$\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)=-\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{t-1}p(i+1)y(i)。$$

类似的，将上述方程两边相加，得

$$u(n)-u(t)=-\sum_{j=t}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)。 \tag{8}$$

将式(7)和式(8)两边相加，得到

$$u(0)=u(n)+\sum_{j=t}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)+\sum_{j=1}^{t-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)。$$

由边界条件 $u(n)=\alpha u(\eta)$，可得

$$u(0)=\alpha u(\eta)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)=$$
$$\alpha\left(u(0)-\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right),$$

则

$$u(0)=\frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)-\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)y(i)\right)。\tag{9}$$

因此，合并式(7)和式(9)，可得到式(5)。反之，假设 $u(t)$ 是由式(5)给出的，带入式(3)和式(4)成立。证毕。

引理 3　假设条件 (H_1) 成立。如果 $y\in X$ 且 $y(t)\geqslant 0$，$t\in\{0,1,\cdots,n\}$，则离散边值问题(3)和问题(4)的解 $u(t)$ 满足

$$\min_{t\in\{0,1,\cdots,n\}}u(t)\geqslant\gamma\|u\|,\tag{10}$$

其中 $\gamma=\dfrac{\alpha(n-\eta)}{n-\alpha\eta}$。

证明　分 2 步进行证明。

第 1 步，对任意 $t\in\{0,1,\cdots,n\}$，证明 $u(t)\geqslant 0$。

由式(6)和 $y(t)\geqslant 0$，可知对任意 $t\in\{0,1,\cdots,n\}$，$\Delta u(t)\leqslant 0$，因此 $u(t)$ 是单调递减函数。如果 $u(n)\geqslant 0$，由于 $u(t)$ 是单调递减函数，因而很容易得到上述结论；如果 $u(n)<0$，由边界条件 $u(n)=\alpha u(\eta)$，有 $u(\eta)<u(n)<0$，这与 $u(t)$ 是单调递减函数相矛盾。因此，$u(t)\geqslant 0, t\in\{0,1,\cdots,n\}$。

第 2 步，证明式(10)成立。

由 $u(t)$ 的单调性，可知 $u(0)=\max\limits_{t\in\{0,1,\cdots,n\}}u(t)$，$u(n)=\min\limits_{t\in\{0,1,\cdots,n\}}u(t)$。

因为 $\Delta^2u(t)=-a(t)\Delta u(t)-y(t)\leqslant 0$，所以可得到 $u(t)$ 在 $\{0,1,\cdots,n\}$ 上的离散点图形是凹的。由于 $u(t)$ 是单调递减函数，因而有 $\Delta u(t)\leqslant 0$，根据差分性质可知

$$\frac{|\Delta u(n-1)+\cdots+\Delta u(\eta)|}{n-\eta}=\frac{u(\eta)-u(n)}{n-\eta}\geqslant\frac{|\Delta u(n-1)+\cdots+\Delta u(0)|}{n-0}=\frac{u(0)-u(n)}{n},$$

即

$$u(0)\leqslant u(n)+\frac{n(u(\eta)-n(n))}{n-\eta}=u(n)+\frac{n(u(n)-\alpha u(\eta))}{\alpha(n-\eta)}=u(n)\frac{n-\alpha\eta}{\alpha(n-\eta)}=\frac{1}{\gamma}u(n),$$

可以得出 $u(n)\geqslant\gamma u(0)$，即 $\min\limits_{t\in\{0,1,\cdots,n\}}u(t)\geqslant\gamma\|u\|$。

证毕。

注 1　关于引理 3，若 $\alpha>1$ 和 $u(n)>0$，由 $u(n)=\alpha u(\eta)$，得到 $u(n)>u(\eta)$，这与单调性矛盾；若 $u(n)=0$，由函数的单调性得到 $u(t)\equiv 0$，$t\in[\eta,n]$，但需要 $y(t)\equiv 0$，$t\in\{0,1,\cdots,n\}$。因此，本文要求 $0<\alpha<1$。

引理 4　假设条件 (H_1) 成立，$\bar{w}(t)$ 是如下边值问题的解：

$$\Delta^2u(t)+a(t)\Delta u(t)+1=0,\quad t\in\{0,1,\cdots,n-2\},$$
$$\begin{cases}\Delta u(0)=0,\\ u(n)=\alpha u(\eta),\end{cases}$$

则当 $t\in\{0,1,\cdots,n\}$ 时，存在 $S>0$，使得 $0\leqslant\bar{w}(t)\leqslant S$。

证明　由引理 3 的证明，可知 $\bar{w}(0)=\max\limits_{t\in\{0,1,\cdots,n\}}\bar{w}(t)$，且 $\bar{w}(t)\geqslant 0$，$t\in\{0,1,\cdots,n\}$。由式(9)可得

$$\bar{w}(0)=\frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)-\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)=$$
$$\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)+\frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)。$$

因此，令

$$S=\bar{w}(0)=\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)+\frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)。$$

则当 $t \in \{0,1,\cdots,n\}$ 时，$0 \leqslant \bar{w}(t) \leqslant S$ 。

证毕。

设 $w(t)=\lambda M\bar{w}(t)$ ，则 $w(t) \leqslant \lambda MS$（$\lambda$ 和 M 来自条件 (H_1) 和 (H_2)），若 $u(t)$ 是边值问题(1)和问题(2)的解，则

$$\begin{aligned}&\Delta^2(u(t)+w(t))+a(t)\Delta(u(t)+w(t))=\\&\Delta^2u(t)+a(t)\Delta u(t)+\lambda M(\Delta^2\bar{w}(t)+a(t)\Delta\bar{w}(t))=\\&-\lambda f(t,u(t))-\lambda M=\\&-\lambda(f(t,u(t))+M)\ 。\end{aligned}$$

令 $g(t,u)=f(t,u)+M$ ，对任意 $(t,u) \in \{0,1,\cdots,n\}\times \mathrm{R}$， $g(t,u)>0$。

因此可得到引理5。

引理5 函数 $u(t)$ 是边值问题(1)和问题(2)的解，当且仅当 $\tilde{u}(t)=u(t)+w(t)$ 是如下边值问题的1个解，

$$\Delta^2\tilde{u}(t)+a(t)\Delta\tilde{u}(t)+\lambda g(t,\tilde{u}(t)-w(t))=0,\quad t \in \{0,1,\cdots,n-2\}\ , \tag{11}$$

$$\Delta\tilde{u}(0)=0,\quad \tilde{u}(n)=\alpha\tilde{u}(\eta)\ , \tag{12}$$

其中 $\tilde{u}(t)>w(t)$， $t \in \{0,1,\cdots,n\}$ 。

2 主要结果

定理1 假设条件 (H_1) 和 (H_2) 成立，且函数 $f(t,u)$ 满足

$$\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in\{\eta,\cdots,n\}}\frac{f(t,u)}{u}=+\infty, \tag{13}$$

则存在一个常数 $\lambda^*>0$，对任意 $\lambda \in (0,\ \lambda^*)$ ，使得离散边值问题(1)和问题(2)至少有1个正解。

证明 由引理2，易知边值问题(11)和问题(12)有一个正解 $\tilde{u}=\tilde{u}(t)$ ，当且仅当 $\tilde{u}$ 是方程算子 $u(t)=Au(t)$ 的1个正解，其中：

$$\begin{aligned}Au(t)=&-\lambda\sum_{j=1}^{t-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right)+\\&\frac{\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right)-\\&\frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right)\ 。\end{aligned} \tag{14}$$

令 $K=\{u\,|\,u \in X,u \geqslant 0,\ \min_{t\in\{0,1,\cdots,n\}}u(t) \geqslant \gamma\|u\|\}$ 。显然 K 是 X 上的锥，并且依据引理3，$AK \subset K$ 。根据文献[20]，容易看出 $A:K\to K$ 是全连续的。证明 A 满足引理1的条件。

首先，设 $\tilde{g}(r_1)=\sup_{t\in\{0,1,\cdots,n\},0\leqslant u\leqslant r_1}g(t,u)$ ，其中 $r_1>0$。由式(13)可得 $\lim_{r_1\to+\infty}\frac{r_1}{\tilde{g}(r_1)}=0$，则存在1个常数 $R_1>0$，使得

$$\frac{R_1}{\tilde{g}(R_1)}=\max_{r_1>0}\left\{\frac{r_1}{\tilde{g}(r_1)}\right\}\ 。 \tag{15}$$

记 $G=\tilde{g}(R_1)$ ，设

$$\lambda^*=\min\left\{\frac{\gamma R_1}{MS},\quad \frac{(1-\alpha)R_1}{GS}\right\}\ , \tag{16}$$

并且对任意 $\lambda<\lambda^*$ ，令 $\Omega_1=\{u \in X:\|u\|<R_1\}$ ，当 $u \in K\cap\partial\Omega_1$ 时，根据式(16)，有

$$R_1 \geqslant u(s)-w(s) \geqslant \gamma R_1-\lambda MS>\gamma R_1-\lambda^*MS \geqslant 0,\quad 0<\gamma<1 \tag{17}$$

和

$$g(s,u(s)-w(s)) \leqslant \tilde{g}(R_1)=G,\quad s \in \{0,1,\cdots,n\}\ 。$$

因此，由式(14)和引理4可得：

$$Au(t) \leqslant -\frac{\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right) \leqslant$$

$$\frac{\lambda G}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)\leqslant$$
$$\frac{\lambda^{*}G}{1-\alpha}\left(\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)+\frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)\right)=$$
$$\frac{\lambda^{*}GS}{1-\alpha}\leqslant R_1,$$

对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_1$，得

$$\|Au\|\leqslant\|u\|。\tag{18}$$

另一方面，由式(13)，有

$$\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in\{\eta,\cdots,n\}}\frac{g(t,u)}{u}=\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in\{\eta,\cdots,n\}}\frac{f(t,u)+M}{u}=+\infty。$$

因此，令 $R_2=nR_1$（n 是大于 1 的正整数），使得对任意 $t\in\{\eta,\cdots,n\}$，$u\geqslant\frac{\gamma(n-1)}{n}R_2$，有 $g(t,u)\geqslant\xi u$，其中 $\xi>0$ 满足

$$\frac{\alpha\gamma\lambda\xi(n-1)}{n(1-\alpha)}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)\geqslant 1。\tag{19}$$

令 $\Omega_2=\{u\in X:\|u\|<R_2\}$，当 $u\in K\cap\partial\Omega_2$ 时，有

$$u(s)-w(s)\geqslant\gamma R_2-\lambda^{*}MS>\gamma R_2-\gamma R_1\geqslant\frac{\gamma(n-1)}{n}R_2,$$

且

$$g(s,u(s)-w(s))\geqslant\xi(u(s)-w(s))\geqslant\frac{\gamma\xi(n-1)}{n}R_2,\quad s\in\{0,1,\cdots,n\}。$$

由式(14)和式(19)，可得

$$\begin{aligned}Au(n)=&-\lambda\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right)+\\&\frac{\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right)-\\&\frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right)=\\&\frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right)-\\&\frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right)=\\&\frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right),\end{aligned}$$

所以

$$Au(n)=\frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)g(i,u(i)-w(i))\right),\tag{20}$$

$$Au(n)\geqslant\frac{\alpha\gamma\lambda\xi(n-1)R_2}{n(1-\alpha)}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)\geqslant R_2>\|u\|。$$

即对 $u\in K\cap\partial\Omega_2$ 时，有

$$\|Au\|\geqslant\|u\|。\tag{21}$$

因此由式(18)、式(21)和引理 1，可得到算子 A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上有 1 个不动点使 $R_1\leqslant\|\tilde{u}\|\leqslant R_2$。根据式(17)，得到 $\tilde{u}(t)>w(t)$，因此 $\tilde{u}(t)$ 是边值问题(1)和问题(2)的 1 个正解。

证毕。

定理 2　假设条件 (H_1) 和 (H_2) 成立，并且函数 $f(t,u)$ 满足

$$\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in\{\eta,\cdots,n\}}f(t,u)=+\infty\text{和}\lim_{u\to+\infty}\sup_{t\in\{0,1,\cdots,n\}}\frac{f(t,u)}{u}=0,\tag{22}$$

则存在1个常数 $\lambda^* > 0$,对任意 $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$,使得离散边值问题(1)和(2)至少有1个正解。

证明 显然 $A: K \to K$ 是全连续算子,下面的证明与定理1的证明过程类似。

证明算子 A 满足引理1的条件。

令

$$\zeta = \frac{2MS(1-\alpha)}{\alpha\gamma}\left(\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right)\right)^{-1}。\tag{23}$$

一方面,由式(22)的第1个极限,有

$$\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in\{\eta,\cdots,n\}} g(t,u) = \lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in\{\eta,\cdots,n\}}(f(t,u)+M) = +\infty,$$

则存在 $N > 0$, $t \in \{\eta,\cdots,n\}$ 和 $u \geqslant N$,使得

$$g(t,u) \geqslant \zeta。$$

设 $\lambda^* = \dfrac{N}{MS}$ 和 $R_1 = \dfrac{2\lambda MS}{\gamma}$,则对任意 $\lambda \geqslant \lambda^*$, $u \in K$ 和 $\|u\| = R_1$,有

$$u(s) - w(s) \geqslant \gamma R_2 - \lambda MS = \lambda MS \geqslant \lambda^* MS \geqslant N \tag{24}$$

和 $g(s, u(s) - w(s)) \geqslant \zeta$ 成立。

由式(20)和式(23),可知

$$\begin{aligned} Au(n) = {} & \frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\,g(i,u(i)-w(i))\right) \geqslant \\ & \frac{\alpha\lambda\zeta}{1-\alpha}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right) = \\ & \frac{\alpha\lambda\zeta}{1-\alpha}\times\frac{2MS(1-\alpha)}{\alpha\gamma\zeta} = \frac{2\lambda MS}{\gamma} = R_1 = \|u\|。 \end{aligned}\tag{25}$$

令 $\Omega_1 = \{u \in X: \|u\| < R_1\}$,则通过式(25)可得,当 $u \in K \cap \partial\Omega_1$ 时,

$$\|Au\| \geqslant \|u\|。\tag{26}$$

另一方面,由式(22)的第2个极限,可知

$$\lim_{u\to+\infty}\sup_{t\in\{0,1,\cdots,n\}}\frac{g(t,u)}{u} = \lim_{u\to+\infty}\sup_{t\in\{0,1,,\cdots,n\}}\frac{f(t,u)+M}{u} = 0。$$

因此,对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\tilde{R}_2 > R_1$, $t \in \{0,1,\cdots,n\}$ 和 $u \geqslant \tilde{R}_2$,使得 $g(t,u) \leqslant \varepsilon u$。这里 ε 满足

$$\frac{\varepsilon\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right) \leqslant 1。\tag{27}$$

因为 $g(t,u)$ 非负连续函数,存在 $\sigma > 0$,使得

$$0 \leqslant g(t,u) \leqslant \varepsilon\sigma, \quad t \in \{0,1,\cdots,n\}, \quad N \leqslant u \leqslant \tilde{R}_2。$$

令 $R_2 = \max\{\tilde{R}_2, \sigma\}$ 和 $\Omega_2 = \{u \in X: \|u\| < R_2\}$,则当 $u \in K \cap \partial\Omega_2$ 时,有 $N \leqslant u(s) - w(s) \leqslant R_2$ 和 $g(t,u) \leqslant \varepsilon R_2$ 成立。

由式(14)和式(27),可得

$$\begin{aligned} Au(n) \leqslant {} & \frac{\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\,g(i,u(i)-w(i))\right) \leqslant \\ & \frac{\varepsilon R_2\lambda}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1}p(i+1)\right) \leqslant R_2, \end{aligned}$$

即,当 $u \in K \cap \partial\Omega_2$ 时,

$$\|Au\| \leqslant \|u\|。\tag{28}$$

因此,由式(26)、式(28)和引理1,得到 A 在 $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 上有1个不动点,使得 $R_1 \leqslant \|\tilde{u}\| \leqslant R_2$。根据式(24),得到 $\tilde{u}(t) > w(t)$,因此 $\tilde{u}(t)$ 是边值问题(1)和问题(2)的1个正解。证毕。

注2 若 $a(t) \equiv 0$, $t \in \{0,1,\cdots,n\}$,则定理1和定理2仍然成立,文献[16]所研究的问题就是该特殊情况。

注3 在定理1和定理2中,非线性项 f 的有界性假设是至关重要的。因为确定 $g(t,u) = f(t,u) + M$ 是根据这个假设,然后可得出引理5的结论,最后利用Krasnoselskii's不动点定理,获得2个重要的结果。

3 例　证

为了说明本文所获得的结果，举出如下 2 个例子。

例 1　考虑二阶离散边值问题

$$\Delta^2 u - \Delta u + \lambda(u^2 - 5e^t \cos u) = 0, \quad t \in \{0,1,\cdots,n-2\}, \tag{29}$$

$$\begin{cases} \Delta u(0) = 0, \\ u(n) = \dfrac{4}{5} u\left(\dfrac{n}{2}\right)。 \end{cases} \tag{30}$$

易知 $\alpha = \dfrac{4}{5}, \eta = \dfrac{n}{2}, a(t) = -1, f(t,u) = u^2 - 5e^t \cos u$。

令 $M = 5e^n$，则对于 $t \in \{0,1,\cdots,n\}$，$f(t,u) > -5e^n$，且 $\lim\limits_{u \to +\infty} \inf\limits_{t \in \{\eta,\cdots,n\}} f(t,u) = +\infty$，因此满足定理 1 的条件。再令 $\gamma = \dfrac{1}{2}$，可得

$$S = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1} p(i+1)\right) - \frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{\eta-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1} p(i+1)\right) = n^2 - \frac{9n}{4} + \frac{1}{2}。$$

令 $R_1 = (5e^n - 5)^{\frac{1}{2}}$，则式(15)成立，且 $G = \tilde{g}(R_1) = 10(e^n - 1)$。

因此，根据定理 1，对于任何 $\lambda < \lambda^* = \dfrac{R_1(1-\alpha)}{GS} = \dfrac{(5e^n - 5)^{\frac{1}{2}}}{50(e^n - 1)(n^2 - \frac{9n}{4} + \frac{1}{2})}$，边值问题(29)和问题(30)至少存在 1 个正解 $\tilde{u}(t)$，并且满足 $\|\tilde{u}(t)\| \geqslant (5e^n - 5)^{\frac{1}{2}}$。

例 2　考虑二阶离散边值问题

$$\Delta^2 u - \Delta u + \lambda(u^{\frac{2}{3}} - 5t^2 \cos u) = 0, \quad t \in \{0,1,\cdots,n-2\}, \tag{31}$$

$$\begin{cases} \Delta u(0) = 0, \\ u(n) = \dfrac{4}{5} u\left(\dfrac{n}{2}\right)。 \end{cases} \tag{32}$$

易知 $\alpha = \dfrac{4}{5}, \eta = \dfrac{n}{2}, a(t) = -1, f(t,u) = u^{\frac{2}{3}} - 5t^2 \cos u$。

令 $M = 5n^2$，则对于 $t \in \{0,1,\cdots,n\}$，$f(t,u) > -5n^2$，且

$$\lim_{u \to +\infty} \inf_{t \in \{\eta,\cdots,n\}} f(t,u) = +\infty \text{和} \lim_{u \to +\infty} \sup_{t \in \{0,1,\cdots,n\}} f(t,u) = 0,$$

因此满足定理 2 的条件。再令 $\gamma = \dfrac{1}{2}$，可得

$$S = n^2 - \frac{9n}{4} + \frac{1}{2}, \ \zeta = \frac{2MS(1-\alpha)}{\alpha\gamma}\left(\sum_{j=\eta}^{n-1}\left(\frac{1}{p(j)}\sum_{i=0}^{j-1} p(i+1)\right)\right)^{-1} = \frac{40n^2\left(n^2 - \frac{9n}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}n^2 - 3n\right)}。$$

对任意 $N \geqslant (\zeta)^{\frac{1}{2}}$，有 $g(t,u) \geqslant \zeta$ 成立。

因此，根据定理 2，对于任何 $\lambda \geqslant \lambda^* = \dfrac{N}{MS} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}\left(n^2\left(n^2 - \frac{9n}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}n^2 - 3n\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$，边值问题(31)和问题(32)至少存在 1 个正解 $\tilde{u}(t)$，并且满足 $\|\tilde{u}(t)\| \geqslant \dfrac{2\lambda MS}{\gamma} = 20n^2\lambda(n^2 - \frac{9n}{4} + \frac{1}{2})$。

4 结　语

1)利用锥上的 Krasnoselskii's 不动点定理，在非线性项允许变号的情形下，研究了非线性二阶三点离散边值问题正解存在性的充分条件，通过 2 个数值例子验证了所获得理论结果的正确性。

2)结果表明，离散边值问题满足定理正解的存在性条件。所提出的研究方法在二阶离散边值问题理论证明方面效果良好，对探究非线性高阶多点离散边值问题具有一定的借鉴意义。

3)本研究仅考虑了非线性二阶三点离散边值问题，未能完全体现出弹力稳定性理论中的更多问题，且仅

考虑了非线性项在有界情形下正解的存在性问题;此外,所使用的锥上不动点定理仅能获得至少 1 个正解的存在性,对于非线性项更一般化的条件以及多解的存在性还有待于进一步研究。下一步计划对非线性高阶多点离散边值问题以及分数阶 q-差分边值问题解的存在性进行深入探讨,并在多种非线性项情形下进行数值验证。

参考文献/References:

[1] LIU Yang,LIU Xiping,JIA Mei.Multiplicity results for second-order m-point boundary value problem[J].Journal of Mathematical Analysis & Applications,2006,324(1):532-542.

[2] ZHANG Zhongxin,WANG Junyu.Positive solutions to a second-order there-point boundary-value problem[J].Journal of Mathematical Analysis & Applications,2003,285(1):237-249.

[3] MA Ruyun.Multiplicity of positive solutions for second-order there-point boundary-value problems[J].Computers & Mathematics with Applications,2000,40(2-3):193-204.

[4] LIU Bing.Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem[J].Computers & Mathematics with Applications, 2002, 44(1/2):201-211.

[5] XU Xian,SUN Jingxian.On sign-changing solution for some three-point boundary value problems[J].Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2004,59(4):491-505.

[6] XU Xian.Three solutions for three-point boundary value problems[J].Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2005,62(1):1053-1066.

[7] LI Gaoshang,LIU Xiping,JIA Mei.Positive solutions to a type of nonlinear three-point boundary value problem with sign changing nonlinearities[J].Computers & Mathematics with Applications,2009,57(3):348-355.

[8] 董士杰.非线性离散周期边值问题的可解性[J].河北科技大学学报,2012,33(5):381-383,458.
DONG Shijie.Solvability for nonlinear discrete periodic boundary value problems[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2012,33(5):381-383.

[9] 江卫华,韩晴晴,杨君霞.具有变号非线性项的分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J].河北科技大学学报,2019,40(4):294-300.
JIANG Weihua,HAN Qingqing,YANG Junxia.Existence of positive solutions for boundary value problems of fractional differential equations with sign-changing nonlinear term[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2019,40(4):294-300.

[10] GUO Yanping,WEI Wenying,CHEN Yuerong.Existence of three positive solutions for m-point discrete boundary value problems with p-Laplacian[J].Discrete Dynamics in Nature and Society,2009,9:1-15.

[11] LONG Yuhua,CHEN Jiali.Existence of multiple solutions to second-order discrete Neumann boundary value problems[J].Applied Mathematics Letters,2018,83:7-14.

[12] ZHOU Zhan,LING Jiaoxiu.Infinitely many positive solutions for a discrete two point nonlinear boundary value problem with φ-Laplacian [J].Applied Mathematics Letters,2019,91:28-34.

[13] AGARWAL Ravi P,LUCA Rodica.Positive solutions for a system of second-order discrete boundary value problems[J].Advances in Difference Equations,2018,18(1):1-17.

[14] KONG Lingju,WANG Min.Existence of solutions for a second order discrete boundary value problem with mixed periodic boundary conditions[J].Applied Mathematics Letters,2020,102:106138-106147.

[15] D'Aguì Giuseppina,MAWHIN Jean,SCIAMMETTA Angela.Positive solutions for a discrete two point nonlinear boundary value problem with p-Laplacian[J].Journal of Mathematical Analysis & Applications,2017,447(1):383-397.

[16] AHMAD B, NTOUYAS S K,TARIBOON J,et al.Impulsive fractional q-integrals-difference equations with separated boundary conditions[J].Applied Mathematics Computation,2016,281:199-213.

[17] 禹长龙,张博雅,韩获德.无穷区间上二阶三点 q-差分方程边值问题解的存在性[J].河北科技大学学报,2019,40(6):469-476.
YU Changlong,ZHANG Boya,HAN Huode.Existence of solutions to boundary value problems of second order three-point q-difference equations on a infinitein terval[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2019,40(4):294-300.

[18] 韩伟,孟晓宇,桑彦彬.一类分数阶 q 型差分边值问题中的混合单调方法[J].河北科技大学学报,2019,40(4):307-316.
HAN Wei,MENG Xiaoyu,SANG Yanbin.Mixed monotone method for a class of fractional q-difference boundary value problems[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2019,40(4):307-316.

[19] LIU Bing.Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problems[J].Applied Mathematics Computation,2002,132(1):11-18.

[20] GUO Yanping,ZHANG Jiehua,JI Yude.Existence of triple positive solutions for second-order discrete boundary value problems[J].Discrete Dynamics in Nature and Society,2007,7:1-10.