第 40 卷第 4 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol.40,No.4
2019 年 8 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Aug. 2019

文章编号:1008-1542(2019)04-0294-07　　doi:10.7535/hbkd.2019yx04002

具有变号非线性项的分数阶微分方程边值问题正解的存在性

江卫华[1],韩晴晴[1],杨君霞[2]

(1.河北科技大学理学院,河北石家庄　050018;2.石家庄城市经济职业学院基础部,河北石家庄　052165)

摘　要: 为了进一步研究非线性项的分数阶微分方程边值问题的性质,讨论了带有变号非线性项的 $(n-1,1)$ 分数阶微分方程特征值问题正解的存在性,其中分数阶导数是 Riemann-Liouville 型。首先利用给定边值问题的 Green 函数,将微分方程转化为等价的积分方程,然后在非线性项 $f(t,x)$ 满足 Caratheodory 条件(即任意选取变量 x,非线性项 $f(t,x)$ 为可测函数,对 $(0,1)$ 区间内几乎所有 t,非线性项 $f(t,x)$ 为 x 的连续函数)下。通过构造适当的 Banach 空间,运用锥拉伸与锥压缩不动点定理和 Leray-Schauder 非线性抉择得出边值问题正解存在的充分条件。结果表明,非线性项 $f(t,x)$ 中的 t 可以在 $(0,1)$ 区间内任何点处具有奇性,同时还改变了使边值问题的解存在的特征值 λ 的取值范围。研究结果为现存结论的深入研究打下了基础。

关键词: 常微分方程;不动点定理;巴拿赫空间;格林函数;正解;分数阶微分方程

中图分类号: O175.8　　**文献标志码:** A

Existence of positive solutions for boundary value problems of fractional differential equations with sign-changing nonlinear term

JIANG Weihua[1], HAN Qingqing[1], YANG Junxia[2]

(1. School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China; 2. Foundation Department, Shijiazhuang City Economic Vocational College, Shijiazhuang, Hebei 052165, China)

Abstract: In order to further study the properties of boundary value problems for fractional differential equations with non-linear terms, we discusses the existence of positive solutions for eigenvalue problems of $(n-1,1)$ fractional differential equations with sign-changing nonlinear terms, where the fractional derivative is Riemann-Liouville. First we use the Green function for a given boundary value problem and convert the differential equation into an equivalent integral equation. Then, under the condition that the nonlinear term $f(t, x)$ satisfies Caratheodory conditions (that is to say, the non-linear term $f(t,x)$ is measurable function when the variable x was chosen arbitrarily, and the non-linear term $f(t,x)$ is continuous function of x when the variable t was fixed). By constructing a suitable Banach space, we use the cone-stretching and compression fixed point theorem

---

收稿日期:2019-03-16;修回日期:2019-05-23;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金(11775169);河北省自然科学基金(A2018208171)

第一作者简介:江卫华(1964—),女,河北邯郸人,教授,博士,主要从事应用泛函分析、常微分方程边值问题方面的研究。

E-mail:jianghua64@163.com

江卫华,韩晴晴,杨君霞.具有变号非线性项的分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J].河北科技大学学报,2019,40(4):294-300.

JIANG Weihua, HAN Qingqing, YANG Junxia.Existence of positive solutions for boundary value problems of fractional differential equations with sign-changing nonlinear term[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2019,40(4):294-300.

and Leray-Schauder nonlinear selection to obtain the sufficient conditions for the existence of positive solutions of boundary value problems. The results show that the nonlinear term $f(t,x)$ can be singular at any point t. At the same time, the range of the eigenvalue which makes the solution of the boundary value problem exist was changed. The results lay a foundation for further study of the existing conclusions.

Keywords: ordinary differential equation; fixed point theorem; Banach space; Green's function; positive solution; fractional differential equations

近年来，随着分数阶微分方程在物理、化学、工程等领域的广泛应用，越来越多的学者意识到了它的重要性[1-7]，对分数阶微分方程的边值问题正解的存在性的研究成为热点问题之一[8-24]。

2010 年，YUAN[8] 用 Leray-Schauder 定理和 Krasnosel'ski 不动点定理研究了 $(n-1,1)$ 型带 Riemann-Liouville分数阶导数的非线性微分方程共轭边值问题：

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)+\lambda f(t,u(t))=0, \quad 0<t<1, \lambda>0, \\ u^{(j)}(0)=0, \quad 0\leqslant j\leqslant n-2, \\ u(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 λ 为参数，$\alpha\in(n-1,n]$ 是实数，$n\geqslant 3$，D_{0+}^{α} 是 Riemann-Liouville 分数阶导数，$f:(0,1)\times[0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ 是可变号连续函数。

受上述文献的启发，笔者对文献[8]进行改进，改变了使原方程的解存在的参数 λ 的范围。同时放宽了对非线性项 $f(t,x)$ 的限制，原文需要非线性项 $f(t,x)$ 连续，本文仅需非线性项 $f(t,x)$ 满足 Caratheodory 条件，且文中的 $f(t,x)$ 在 $t\in[0,1]$ 中任何一点都可以具有奇性，原文仅在 $t=0,1$ 两端点奇异。

1　预备知识

定义 1[8]　函数 $f:[0,+\infty)\to R$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$I_{0+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t, \quad x>0,$$

其中右边是在 $(0,+\infty)$ 上逐点有意义。

定义 2[8]　函数 $f:[0,+\infty)\to R$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数定义为

$$D_{0+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t, \quad x>0,$$

其中 $n=[\alpha]+1$，$[\alpha]$ 表示取整，右边在 $(0,+\infty)$ 上逐点有意义。

引理 1[8]　当 $\alpha>0$ 时，分数阶微分方程 $D_{0+}^{\alpha}u(t)=0$ 有解，$u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}$，其中 $c_i\in R$，$i=1,2,\cdots,n$，n 为大于等于 α 的最小整数。

引理 2[8]　当 $\alpha>0$ 时，$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}$，其中，$c_i\in R$，$i=1,2,\cdots,n$，$n$ 是大于等于 α 的最小整数。

定理 1[8]　令 X 是一个 Banach 空间，$\Omega\subset X$ 是凸闭集，假设 $U\subset\Omega$ 且 $0\in U$，并且 $S:\overline{U}\to\Omega$ 是紧连续映射，则以下之一成立：

i) S 在 $\overline{U}$ 中有一个不动点；

ii) 存在 $u\in\partial U$，$v\in(0,1)$ 使得 $u=vSu$。

定理 2[8]　令 X 是一个 Banach 空间，$P\subset X$ 是 X 中的锥，假设 Ω_1，Ω_2 是 X 中的相对开集且满足 $0\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，并且 $S:P\to P$ 是一个全连续算子，如果

i) $\|Sw\|\leqslant\|w\|$，$w\in P\cap\partial\Omega_1$，$\|Sw\|\geqslant\|w\|$，$w\in P\cap\partial\Omega_2$

或

ii) $\|Sw\|\geqslant\|w\|$，$w\in P\cap\partial\Omega_1$，$\|Sw\|\leqslant\|w\|$，$w\in P\cap\partial\Omega_2$

中有一个成立，则 S 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点。

引理 3[8]　已知函数 $h(t)\in L^1[0,1]$，边值问题：

$$\begin{cases}D_{0+}^{\alpha}u(t)+h(t)=0, & 0<t<1, \quad 2\leqslant n-1<\alpha\leqslant n,\\ u^{(j)}(0)=0, & 0\leqslant j\leqslant n-2,\\ u(1)=0\end{cases}\tag{2}$$

有唯一解：

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s,\tag{3}$$

其中：

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}\tag{4}$$

这里 $G(t,s)$ 称作边值问题(3)的格林函数。

引理4[8] 由方程(4)定义的函数 $G(t,s)$ 有以下性质：

1) $G(t,s)=G(1-s,1-t)$, $t,s\in[0,1]$；

2) $\Gamma(\alpha)k(t)q(s)\leqslant G(t,s)\leqslant(\alpha-1)q(s)$, $t,s\in[0,1]$；

3) $\Gamma(\alpha)k(t)q(s)\leqslant G(t,s)\leqslant(\alpha-1)k(t)$, $t,s\in[0,1]$。

其中：$k(t)=\dfrac{t^{\alpha-1}(1-t)}{\Gamma(\alpha)}$，$q(s)=\dfrac{s(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$。

2 主要结论

记 $[y(t)]^*=\begin{cases}y(t), & y(t)\geqslant 0,\\ 0, & y(t)<0。\end{cases}$ 有以下假设。

H_1) $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to R$ 为 L^1-Caratheodory 函数，即 f 满足下述3个条件：

1) 对于每个 $u\in R$，$f(t,u)$ 是 t 的可测函数；

2) 对于几乎所有的 $t\in[0,1]$，$f(t,u)$ 是 u 的连续函数；

3) 对于任意 $r>0$，$\exists h_r\in L^1[0,1]$，使得对于几乎所有的 $t\in[0,1]$ 以及任意的 $u\in[0,r]$，$|f(t,u)|\leqslant h_r(t)$。

存在非负函数 $g(t)\in L^1[0,1]$，使得 $f(t,u)\geqslant -g(t)$，其中，$t\in(0,1)$，$u\in[0,+\infty)$。

H_2) $\inf\limits_{t\in[0,1]}f(t,0)>0$，且 $f(t,x)$ 在 $x=0$ 点连续。

H_3) 记

$$\bar{f}_0=\overline{\lim_{x\to 0+}}\sup_{s\in[0,1]}\frac{f(s,[x-v(s)]^*+g(s)}{x}>0,$$

$$\underline{f}_{\infty}=\underline{\lim_{x\to+\infty}}\inf_{s\in[\theta_1,\theta_2]}\frac{f(s,[x-v(s)]^*)+g(s)}{x}>0,\quad 0<\theta_1<\theta_2<1,$$

其中 $v(s)=\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s$。

H_4) $\exists R^*>0$，当 $\|x\|>R^*$ 时，有 $\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,[x(s)-v(s)]^*)\mathrm{d}s>0$。

考虑边值问题：

$$\begin{cases}D_{0+}^{\alpha}x(t)+\lambda(f(t,[x(t)-v(t)]^*)+g(t))=0, & 0<t<1, \quad n-1<\alpha\leqslant n, \quad \lambda>0,\\ x^{(j)}(0)=0, & 0\leqslant j\leqslant n-2,\\ x(1)=0,\end{cases}\tag{5}$$

易知，若 $x(t)>v(t)$ 为问题(5)的解，则 $x(t)-v(t)$ 为问题(1)的正解。

由引理3可知，问题(5)的解等价于

$$x(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant 1。\tag{6}$$

取 Banach 空间 $X=C[0,1]$，定义范数 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$，$x\in X$。取 X 上的锥 P 为

$$P=\{x\in X\,|\,x(t)\geqslant\frac{t^{\alpha-1}(1-t)}{\alpha-1}\|x\|,t\in[0,1],\alpha\in(n-1,n],n\geqslant 3\}。$$

定义算子 $T:P\to X$

$$Tx(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad x\in P。\tag{7}$$

引理 5　假设 H_1)成立，则积分算子 $T:P\to P$ 为全连续且有界算子。

证明　取 $\Omega\subset X$ 有界，$\exists r>0,x\in\Omega,\|x\|<r,\exists h_r\in L^1[0,1],f(t,[x-v]^*)\leqslant h_r(t),t\in[0,1]$，$|x-v|<r$。则有：

$$\|Tx\|=\lambda\int_0^1 G(t,s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{\lambda(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1}(h_r(s)+g(s))\mathrm{d}s,$$

所以 T 为有界算子。

由假设 H_1)可知，$G(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$一致连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$|t_1-t_2|<\delta$，有

$$|G(t_2,s)-G(t_1,s)|<\frac{\varepsilon}{M},$$

其中 $M\geqslant\lambda\int_0^1(h_r(s)+g(s))\mathrm{d}s$。

下面证明对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|t_2-t_1|<\eta$ 时，对 $\forall x\in P,\|x\|<r$ 都有 $|Tx(t_2)-Tx(t_1)|<\varepsilon$。

$$\begin{aligned}
&|Tx(t_2)-Tx(t_1)|=\\
&\lambda\left|\int_0^1 G(t_2,s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s-\right.\\
&\left.\int_0^1 G(t_1,s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\\
&\lambda\int_0^1|G(t_2,s)-G(t_1,s)|(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s\leqslant\\
&\frac{\lambda\varepsilon}{M}\int_0^1(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s\leqslant\\
&\frac{\lambda\varepsilon}{M}\int_0^1(h_r(s)+g(s))\mathrm{d}s<\\
&\frac{\lambda\varepsilon}{M}\frac{M}{\lambda}<\\
&\varepsilon。
\end{aligned}$$

因此，可得 $|Tx(t_2)-Tx(t_1)|<\varepsilon$，由 Arzela-Ascoli 定理可得 $T:P\to P$ 全连续。

定理 3　假设 H_1) 和假设 H_2) 成立，当 $0<\lambda<\dfrac{1}{\bar{\lambda}(\alpha-1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s}<+\infty$ 时，其中 $\bar{\lambda}=\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\sup\limits_{s\in[0,1]}\dfrac{f(s,[x-v(s)]^*)+g(s)}{x}$，则边值问题(1) 至少有 1 个正解。

证明　由假设 H_2)可得：

$$\exists r_0>0,\text{当}\ 0<x<r_0,\quad f(t,x)\geqslant 0,t\in[0,1]。\tag{8}$$

因为$\lambda<\dfrac{1}{\bar{\lambda}(\alpha-1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s}$，所以 $\exists\theta>0$，使得：

$$\lambda<\frac{1}{(\bar{\lambda}+\theta)(\alpha-1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s},\tag{9}$$

又因为

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\sup_{s\in[0,1]}\frac{f(s,[x-v(s)]^*)+g(s)}{x}<(\bar{\lambda}+\theta),$$

则有 $\exists R>0$，　当 $0<x\leqslant R$，有

$$f(s,[x-v(s)]^*)+g(s)<(\bar{\lambda}+\theta)x。\tag{10}$$

取 $r=\min\{R,r_0\},\Omega_r=\{x\mid\|x\|<r,x\in P\}$，要证 $\|x\|\neq\gamma\|Tx\|,\gamma\in(0,1),x\in\partial\Omega_r$，反证，若有 $\gamma\in(0,1),x\in\partial\Omega_r$，使得 $\|x\|=\gamma\|Tx\|$，则由引理 4 和式(2)、式(9)和式(10)可得：

$$
\begin{aligned}
\|x\| = \gamma\|Tx\| \leqslant \\
&\gamma\lambda\int_0^1(\alpha-1)q(s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s \leqslant \\
&\gamma\lambda\int_0^1(\alpha-1)q(s)(\bar{\lambda}+\theta)\mathrm{d}s\|x\| < \\
&\gamma\|x\| < \\
&\|x\|。
\end{aligned}
$$

这与假设矛盾,因此 $\|x\|\neq\gamma\|Tx\|,\gamma\in(0,1)x\in\partial\Omega_r$,由定理1可知 T 有不动点 x。

下明证明 $x(t)\geqslant v(t)$。

由题意得:$x(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,[x(s)-v(s)]^*)\mathrm{d}s+v(t),0\leqslant t\leqslant 1$。又因为 $\|x\|<r_0$,$0\leqslant\|[x(s)-v(s)]^*\|\leqslant r_0$,由式(8)可知,$f(s,[x(s)-v(s)]^*)\geqslant 0$,所以 $x(t)\geqslant v(t)$,即 $u(t)=x(t)-v(t)\geqslant 0$。从而 $x(t)-v(t)$ 为边值问题(1)的正解。

定理4 假设 $H_1)-H_3)$成立,若

$$\frac{\alpha-1}{\underline{f}_\infty\max\limits_{s\in[0,1]}\int_{\theta_1}^{\theta_2}G(t,s)s^{\alpha-1}(1-s)\mathrm{d}s}<\lambda<\frac{1}{\bar{f}_0(\alpha-1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s}, \tag{11}$$

则边值问题(1)至少存在1个正解。

证明 由假设 $H_2)$可得,$\exists r_0>0$,当 $0<x<r_0$,$f(t,x)\geqslant 0,t\in[0,1]$。

由条件(11)得,$\exists\bar{\theta}>0$,使得:

$$\lambda<\frac{1}{(\bar{f}_0+\bar{\theta})(\alpha-1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s}。\tag{12}$$

又因为

$$\bar{f}_0+\bar{\theta}>\overline{\lim_{x\to 0}}\sup_{s\in[0,1]}\frac{f(s,[x-v(s)]^*+g(s)}{x},$$

则有 $\exists R_0$,当 $0<x\leqslant R_0$,有:

$$f(s,[x-v(s)]^*)+g(s)<(\bar{f}_0+\bar{\theta})x, \tag{13}$$

取 $\Omega_1=\{x\mid\|x\|<r\}$,对于 $x\in\partial\Omega_1\cap P$,

$$
\begin{aligned}
Tx=&\lambda\int_0^1 G(t,s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s\leqslant \\
&\lambda(\alpha-1)\int_0^1 q(s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s\leqslant \\
&\lambda(\alpha-1)\int_0^1 q(s)(\bar{f}_0+\bar{\theta})\mathrm{d}s\|x\|\leqslant \\
&\|x\|,
\end{aligned}
$$

所以 $\|Tx\|\leqslant\|x\|,x\in\partial\Omega_1\cap P$。

由假设 $H_3)$和式(11)得 $\exists\underline{\theta}$,满足 $0<\underline{f}_\infty<\underline{\theta}$和

$$\lambda>\frac{\alpha-1}{(\underline{f}_\infty-\underline{\theta})\max\limits_{s\in[0,1]}\int_{\theta_1}^{\theta_2}G(t,s)s^{\alpha-1}(1-s)\mathrm{d}s}。\tag{14}$$

又因为

$$\underline{f}_\infty-\underline{\theta}<\lim_{x\to+\infty}\inf_{s\in[\theta_1,\theta_2]}\frac{f(x,[s-v(s)]^*)+g(s)}{x},$$

则有 $\exists R$,当 $s\in[\theta_1,\theta_2],x>R$,有:

$$f(s,[x-v(s)]^*)+g(s)>(\underline{f}_\infty-\underline{\theta})x。\tag{15}$$

取 $\Omega_2=\left\{x\mid x\in P,\|x\|<R_1,R_1=\max\limits_{t\in[\theta_1,\theta_2]}\left\{\frac{R(\alpha-1)}{m},r,R^*\right\}+1\right\}$,其中 $m=\min\limits_{t\in[\theta_1,\theta_2]}\{t^{\alpha-1}(1-t)\}$,$0<\theta_1<\theta_2<1$。

当 $x\in\partial\Omega_2\cap P$ 时,$\|x\|=R_1$,有 $x(t)\geqslant\frac{t^{\alpha-1}(1-t)}{\alpha-1}\|x\|\geqslant\frac{m}{\alpha-1}=\frac{m}{\alpha-1}R_1\geqslant R,t\in[\theta_1,\theta_2]$,

则有

$$\begin{aligned}Tx(t)=&\lambda\int_0^1 G(t,s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda\int_{\theta_1}^{\theta_2} G(t,s)(f(s,[x(s)-v(s)]^*)+g(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda\int_{\theta_1}^{\theta_2} G(t,s)(\underline{f}_\infty-\underline{\theta})x(s)\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda\int_{\theta_1}^{\theta_2} G(t,s)(\underline{f}_\infty-\underline{\theta})\frac{m}{(\alpha-1)}\mathrm{d}s\|x\|\geqslant\\&\|x\|。\end{aligned}$$

所以 $\|Tx\|\geqslant\|x\|,x\in\partial\Omega_2\cap P$。

下面证明 $x(t)>v(t)$。

由题意得:$x(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,[x(s)-v(s)]^*)\mathrm{d}s+v(t),0\leqslant t\leqslant 1$,再由假设 H_4)可知 $u(t)=x(t)-v(t)>0$。则 $u(t)$ 是边值问题(1)的正解。

3 结　论

笔者分别运用锥拉伸与锥压缩不动点定理和 Leray-Schauder 非线性抉择,在非线性项 $f(t,x)$不是连续函数的情况下,给出了具有特征值的分数阶微分方程两点边值问题正解存在的充分条件。使得非线性项 $f(t,x)$中的 t 可以在(0,1)区间内任何点处具有奇性,同时还改变了使边值问题的解存在的特征值 λ 的取值范围。研究结果为现存结论的深入研究打下了基础。

参考文献/References:

[1] 钟承奎.非线性泛函分析引论[M]. 兰州:兰州大学出版社,2004.

[2] 郑祖庥.分数微分方程的发展和应用[J].徐州师范大学学报(自然科学版),2008,26(2):1-10.
ZHENG Zuxiu.On the development and applications of fractional differential equations [J]. Journal of Xuzhou Normal University(Natural Science Edition),2008,26(2):1-10.

[3] 王高雄,周之铭,朱思铭,等.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,2006.

[4] 苏新卫,穆晓霞.非线性分数阶微分方程正解的存在性和唯一性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2006,34(4):9-12.
SU Xinwei, MU Xiaoxia. Existence and uniqueness of positive solutions for a system of nonlinear fractional differential equations [J]. Journal of Henan Normal University (Natural Science),2006,34(4):9-12.

[5] EIDELMAN S D, KOCHUBEI A N. Cauchy problem for fractional diffusion equations [J].Journal of Differential Equations,2004,199(2):211-255.

[6] BAI Zhanbing,GE Weigao,WANG Yifu. The method of lower and upper solutions for some fourth-order equations[J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2004, 5(1):124-131.

[7] KILBAS A A, TRUJILLO J J. Differential equations of fractional order: Methods, results and problems. Ⅱ[J].Applicable Analysis, 2002, 81(2):435-493.

[8] YUAN C. Multiple positive solutions for $(n-1,1)$-type semipositione conjugate boundary value problems of nonlinear fractional differential equations[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2010,36:1-12.

[9] 刘静.几类非线性项变号的微分方程边值问题解的存在性[D]. 曲阜:曲阜师范大学,2012.
LIU Jing. Existence of Solutions for Boundary Value Problems of Differential Equations with Several Kinds of Nonlinear Term Variations [D]. Qufu: Qufu Normal University,2012.

[10] 王亚平,刘立山,吴永洪.带有 Riemann-Stieltjes 积分边界条件的非线性奇异分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. 应用数学学报,2017,40(5):752-769.
WANG Yaping, LIU Lishan, WU Yonghong. Existence of multiplicity of positive solutions for nonlinear singular fractional differential equation with Riemann-Stieltjes integral boundary conditions[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2017,40(5):752-769.

[11] 江卫华,陈静,郭彦平.具有变号非线性项的二阶三点微分方程组的边值问题的 2 组正解[J].中国农业大学学报,2007,12(1):95-98.
JIANG Weihua, CHEN Jing, GUO Yanping. Two positive solutions to a second-order and three-point boundary value problem with sign changing nonlinear term[J]. Journal of China Agricultural University,2007,12(1):95-98.

[12] 江卫华，张强，郭巍巍.具有变号非线性项的脉冲微分方程边值问题的正解[J].河北科技大学学报，2013，34(1)：1-6.
JIANG Weihua，ZHANG Qiang，GUO Weiwei. Positive solutions of the boundary value problem for impulsive differential equations with sign-changing nonlinearterm[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2013，34(1)：1-6.

[13] 姚庆六.带变号系数的非线性二阶两点边值问题的正解[J].郑州大学学报(理学版)，2007，39(1)：6-11.
YAO Qingliu. Positive solutions of a nonlinear second-order two-point boundary value problems with coefficient that changes sign[J]. Journal of Zhengzhou University (Natural Science Edition)，2007，39(1)：6-11.

[14] 杜睿娟.共振情形下二阶多点边值问题解的存在性[J].数学的实践与认识，2015，45(24)：272-278.
DU Ruijuan. Existence of solutions for second-order multi-point boundary value problems at resonance[J]. Mathematics in Practice and Theory，2015，45(24)：272-278.

[15] 田元生，李小平，葛渭高. p-Laplacian分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J].应用数学学报，2018，41(4)：529-539.
TIAN Yuansheng，LI Xiaoping，GE Weigao. Existence of positive solutions to boundary value problems of fractional differential equation with p-Laplacian[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2018，41(4)：529-539.

[16] 王威璇，翟成波.无穷区间上分数阶微分方程 m-点边值问题的正解[J].吉林大学学报(理学版)，2018，56(6)：1315-1323.
WANG Weixuan，ZHAI Chengbo. Positive solutions of m-point boundary value problems for fractional differential equations on infinite intervals [J].Journal of Jilin University (Science Edition)，2018，56(6)：1315-1323.

[17] 廖秀，韦煜明，冯春华.一类无穷区间上分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J].吉林大学学报(理学版)，2018，56(6)：1299-1306.
LIAO Xiu，WEI Yuming，FENG Chunhua. Existence of positive solutions for a class of boundary value problems of fractional differential equations on infinite interval[J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2018，56(6)： 1299-1306.

[18] 刘元彬，梅雪晖，胡卫敏.含 p-Laplacian算子的分数阶脉冲微分方程边值问题的解[J].数学的实践与认识，2018，48(20)：202-211.
LIU Yuanbin，MEI Xuehui，HU Weimin. Solutions of boundary value problems of fractional impulsive differential equations with p-Laplacian operator[J]. Mathematics in Practice and Theory，2018，48(20)：202-211.

[19] 黄燕萍，韦煜明.一类分数阶微分方程多点边值问题的多解性[J].广西师范大学学报(自然科学版)，2018，36(3)：41-49.
HUANG Yanping，WEI Yuming. Multiple solutions of multiple-points boundary value problem for a class of fractional differential equation[J]. Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition)，2018，36(3)：41-49.

[20] 宋姝，周碧波，张玲玲.一类Caputo分数阶脉冲微分方程的反周期边值问题[J].中北大学学报(自然科学版)，2018，39(4)：391-396.
SONG Shu，ZHOU Bibo，ZHANG Lingling. The anti-periodic boundary value problems for a class of impulsive differential equations of Caputo fractional order[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition)，2018，39(4)：391-396.

[21] 陈会.非线性分数阶微分方程边值问题解的存在性[J].淮阴师范学院学报(自然科学版)，2018，17(3)：205-211.
CHEN Hui. Existence of solutions for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations[J]. Journal of Huaiyin Teachers College(Natural Science Edition)，2018，17(3)：205-211.

[22] 杜炜，许和乾.一类具有 p-Laplacian算子的分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J].淮阴师范学院学报(自然科学版)，2018，17(3)：189-193.
DU Wei，XU Heqian. Existence of positive solutions for boundary value problem with p-Laplacian operators of fractional differential equations[J]. Journal of Huaiyin Teachers College(Natural Science Edition)，2018，17(3)：189-193.

[23] JIANG Weihua，SUN Bingzhi. Existence of solutions for functional boundary value problems of second-order nonlinear differential equations system at resonance[J]. Advances in Difference Equations，2017，2017(1)：269.

[24] CHEN Yi，TANG Xianhua. Positive solutions of fractional differential equations at resonance on the half-line[J]. Boundary Value Problems，2012，2012：64.