

基于 Laplace 调和方程的网格重构算法

陈华伟¹, 伍 权¹, 徐卫平¹, 余泽云²

(1. 贵州师范大学机电工程学院, 贵州贵阳 550025; 2. 威斯康辛大学密尔沃基分校计算机系, 美国密尔沃基 53206)

摘 要: 针对三角形网格向四边形网格的转化问题, 基于调和方程构建模型梯度场, 追踪表面流线, 实现了参数化网格重构。首先, 建立了基于离散 Laplace 方程的三角网格梯度场理论模型、数据结构模型和稀疏矩阵求解方案; 其次, 提出了局部坐标变换和参数方程相结合求解流线节点的统一算法, 并针对流线跟踪无交点、有多个交点等特殊情形, 提出了梯度收敛、最短距离和参数极值等优选策略; 最后, 通过模型实验验证了算法。结果表明, 流线网格具有等参、闭合特点, 复杂模型网格划分没有歧义, 而且网格质量随网格密度增加而提高。因此, 相对于传统几何重构算法, 数学方法对网格重构表达具有鲁棒性和唯一性, 且应用场景更广泛。

关键词: 算法理论; 网格重构; 参数化网格; 调和方程; 流线追踪

中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A

Mesh reconstruction algorithm based on Laplace harmonic equation

CHEN Huawei¹, WU Quan¹, XU Weiping¹, YU Zeyun²

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Guizhou Normal University, Guiyang, Guizhou 550025, China; 2. Department of Computer Science, University of Wisconsin-Milwaukee, Milwaukee 53206, USA)

Abstract: Upon the problem of transforming triangular mesh into quadrilateral mesh, gradient field via harmonic equation is created, integral flow is tracked, and parameterized mesh is reconstructed. First, gradient field construction theory, data structure model and solution scheme of sparse matrix are constructed. Then, one uniform algorithm for solving flow line node by integration of local coordinate transformation and parameterized equation is advanced, and schemes like gradient convergence, shortest distance and extreme parameter are optimally occupied upon special cases of no intersection or multiple intersections when tracing flow line. Finally, the algorithm is verified via case studies. The result shows that flow lines are characterized as iso-parameterized and closed, mesh reconstruction of complicate models has no bifurcation, and mesh quality is increased with its density. The result proves that mathematical method has robustness and uniqueness for mesh reconstruction representation compared with traditional geometry method, and it will have more application scenarios.

Keywords: theory of algorithms; mesh reconstruction; parameterized mesh; harmonic equation; integral flow tracking

收稿日期: 2019-03-04; 修回日期: 2019-05-05; 责任编辑: 冯 民

基金项目: 国家自然科学基金(51365037); 贵州师范大学资助博士科研项目(GZNU[2017]5号)

第一作者简介: 陈华伟(1977—), 男, 湖北当阳人, 副教授, 博士, 主要从事逆向工程、图像处理方面的研究。

E-mail: chwei0130@126.com

陈华伟, 伍权, 徐卫平, 等. 基于 Laplace 调和方程的网格重构算法[J]. 河北科技大学学报, 2019, 40(3): 199-207.

CHEN Huawei, WU Quan, XU Weiping, et al. Mesh reconstruction algorithm based on Laplace harmonic equation[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2019, 40(3): 199-207.

非结构化网格没有规则的拓扑结构,网格划分灵活性强,但是占用内存大,后续应用的数值计算量大;结构化网格有更好的网格质量,边界拟合性好,数值计算性能高、扩散性小。网格转化、重构及其衍生问题是学者持续关注的课题。以 Q-Morph 算法^[1-2]为代表的几何推演迭代方法存在计算量大,优质网格生成还需要相当的后置处理等问题。其他的如方向场法^[3]、边界简化法^[4]、最少奇异点模板法^[5]、体素法^[6]等,可以通过参数优化生成自适应四边形网格,但都存在单元方向和单元密度难以控制等问题。在数学上,离散网格模型即为分段流形。基于 Morse 理论,为流形曲面选择合适的 Morse 函数,就能保证 Morse-Smale 复形将该曲面划分为纯四边形结构^[7-8]。该方法很容易实现模型特征约束和单元密度控制,但是由于模型的复杂性和标量场数据的多样性,很难鲁棒地构建 Morse-Smale 复形。为此,越来越多的学者开始采用调和方程进行等参数化网格的重构研究^[9-11]。本文以三角网格模型为研究对象,展开离散 Laplace 调和方程创建和求解、流线跟踪及流线网格重构方面的研究。该研究可扩展至有限元网格划分,用于材料、流体力学等综合性能分析;可扩展至图像处理领域,用于医学分层图像、地理等高图像重构和网格分析;还可扩展至仿生结构设计,用于多孔结构、微观分形结构建模。

1 三角网格模型的场求解

在拓扑几何上,三角网格模型为节点 V 和三角面 F 集合构成的分段线性流形,即 $M=(V, F)$ 。根据应用需求,为每个节点 $v_i \in V$ 赋标量值 u_i ,即构造 M 上的标量场 $u:V$ 。

1.1 理论分析

对标量场 u 构造 Laplace 调和方程^[12-13]:

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

给定第一类边界条件,即狄利克雷(Dirichlet)条件:

$$u|_C = \varphi, \tag{2}$$

其中: C 为边界; φ 为边界函数。

对式(1)和式(2)构成的约束 Laplace 方程进行离散化,有:

$$\Delta u_i = \sum_{j \in N_i} \omega_{ij} (u_j - u_i) = 0, \tag{3}$$

$$u_i = c_i, c_i \in C. \tag{4}$$

N_i 表示节点 i 的一阶邻域,三角网格中 N_i 为 i 的一环(1-ring)邻域。三角网格离散化,一般使用 cotangent 余切值计算 Laplace 系数^[14]:

$$\omega_{ij} = [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})]/2, \tag{5}$$

式(3)一式(5)构成线性方程组,通过方程组的求解,得标量场 $u_i \in u$ 。

进一步地,可求解其对应的梯度场(矢量场)。对于分段线性流形,在每个分段内梯度矢量为常量。如图 1 所示,已知三角形 $T_0(v_0, v_1, v_2)$ 或 (e_0, e_1, e_2) , 对应的标量参数 u_0, u_1, u_2 , 三角形面的单位法矢为 \mathbf{N} , 则 T_0 的梯度 \mathbf{G}_0 可通过以下线性系统求解:

$$[e_0, e_1, \mathbf{N}]^T [\mathbf{G}_0] = [v_1 - v_0, v_2 - v_1, n]^T [\mathbf{G}_0] = [u_1 - u_0, u_2 - u_1, 0]^T. \tag{6}$$

观察式(6)易知, \mathbf{G}_0 是边 e_0 和 e_1 的线性组合,即:

$$\mathbf{G}_0 = a e_0 + b e_1 = [e_0, e_1] [a, b]^T. \tag{7}$$

将式(7)代入式(6),则有:

$$[e_0, e_1]^T [\mathbf{G}_0] = [e_0, e_1]^T [e_0, e_1] [a, b]^T = [v_0^2, v_0 v_1; v_1 v_0, v_1^2] [a, b]^T = [u_1 - u_0, u_2 - u_1]^T. \tag{8}$$

至此,系统降为二维线性系统,可直接通过手工计算求解参数 a, b 。令 $\Delta = v_0^2 \times v_1^2 - (v_0 v_1)^2$, 则有:

$$a = [(u_1 - u_0) \times v_1^2 - (u_2 - u_1) \times v_0 v_1] / \Delta, \\ b = [(u_2 - u_1) \times v_0^2 - (u_1 - u_0) \times v_0 v_1] / \Delta.$$

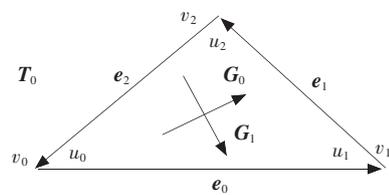


图 1 三角形上的标量和矢量
Fig.1 Scalar and vector on triangle

把参数 a, b 代入式(7)即可得 G_0 , 对应地, 可求正交梯度:

$$G_{\perp} = n \times G_0. \quad (9)$$

1.2 数据准备

面向 Laplace 方程的构造, 三角网格模型的数据准备工作主要有 2 个方面, 即节点数据结构的创建和节点类型划分。

1) 节点数据结构的创建

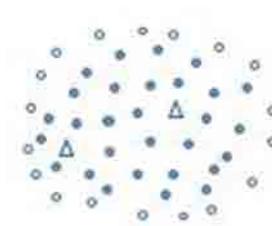
节点数据结构应同时反映邻域点和邻域三角形, 因此, 最简单的方法是记录节点的一环邻域边, 本文节点结构体 NodeDetail 中主要记录节点的对边:

```
struct NodeDetail
{
    long v[2]; //记录对边两点的序号
    long idxF; //记录三角形的序号
    long posF; //posF=0, 1, 2, 记录当前点在该三角形三点中的顺序号
};
```

显然 1 个 NodeDetail 对象代表了节点的 1 个邻接三角形, 如果节点 i 有 N_i 个邻接三角形, 则应有 N_i 个 NodeDetail 对象。

2) 节点分类

为了保证 Laplace 方程有非零解, 还需要设置边界约束条件。对应于 Laplace 方程, 将三角形网格中事先指定的约束点和网格边界点都归为约束节点, 其他节点(均为内部节点)全部归为非约束节点, 如图 2 所示。如果模型为闭合曲面, 则认为模型无边界点, 只有事先指定点为约束节点。



空心点: 边界点
三角点: 约束点
实心点: 非约束点

1.3 Laplace 方程的构造与求解

式(3)中, 每个节点只与其临近的一阶邻域节点存在系数关系, 与其他非邻接节点无系数关系, 具有局部影响性。因此, 面向全局网格节点构建 Laplace 方程, 其系数矩阵是稀疏矩阵^[15], 对此本文采用了 SuperLU 稀疏矩阵求解方案, 其时间和空间复杂度分别为 $T(n) = O(n^{1.5})$, $S(n) = O(n \log n)$ 。

为了减少数据存贮量, 需在程序设计中直接构造稀疏矩阵。建立 LaplaceData 数据结构, 存贮与当前节点邻接节点的索引和权重系数, 并使用 SortLaplaceData 函数按节点索引对邻接节点进行排序。

```
struct LaplaceData
{
    long idx; //节点索引
    float data; //cotangent 计算值
};
static int SortLaplaceData(const void * e1, const void * e2)
{
    LaplaceData * e11 = (LaplaceData *)e1;
    LaplaceData * e22 = (LaplaceData *)e2;
    return e11->idx - e22->idx;
}
```

直观上, 邻域节点的 LaplaceData 数据按行存贮。但 SuperLU 采用 Harwell-Boeing 矩阵存贮格式^[16], 即列压缩格式, 需要使用 dCompRow_to_CompCol 函数将行存贮参数转换为列存贮参数, 再使用 dCreate_CompCol_Matrix 函数构造列压缩存贮的稀疏矩阵。最后, 使用 dgssv 函数解矩阵方程, 求解结果就是对应于每个节点的参数 $u_i \in u$ 。进一步地, 可求解三角网格上的梯度场。

图 2 节点分类

Fig.2 Node classification

2 流线跟踪

交互输入种子点,即可通过该点沿梯度方向追踪一条唯一的流线。设种子三角形 $T_s(v_0, v_1, v_2)$, T_0 内一点 $ptSeed$ 为种子点, T_s 内的梯度矢量为 G_s , T_s 中梯度线交点为 $ptInt_0$ 和 $ptInt_1$, 对应的共边三角形为 T_0 和 T_1 , 如图 3 所示。

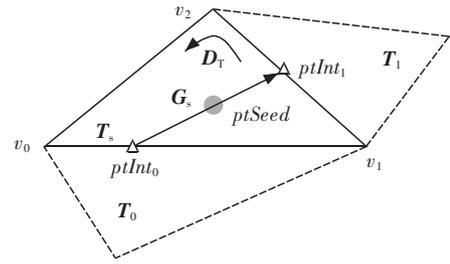


图 3 三角形流线追踪

Fig.3 Integral flow track in triangle

设最小极点和最大极点分别为 v_{min} 和 v_{max} , 则有如下流线跟踪的总体过程:

- 1) 在 T_s 内, 过点 $ptSeed$ 和方向 G_s 做直线, 与 T_s 的 2 个交点 $ptInt_0$ 和 $ptInt_1$, 即为初始节点;
- 2) 在共边三角形 T_0 内, 从 $ptInt_0$ 出发, 沿 T_0 的负梯度方向搜索下一个交点, 记为 $ptInt_2$;
- 3) 重复步骤 2), 直到 $ptInt_2 = v_{min}$;
- 4) 在共边三角形 T_1 内, 从 $ptInt_1$ 出发, 沿 T_1 的梯度方向搜索下一个交点, 记为 $ptInt_2$;
- 5) 重复步骤 4), 直到 $ptInt_2 = v_{max}$;
- 6) 以上交点按 v_{min} 至 v_{max} 的正梯度方向整理输出为流线。

2.1 初始梯度线的计算

该问题可描述为求过 $ptSeed$ 且方向为 G_s 的直线 L 与 T_s 各边的 2 个交点 $ptInt_0$ 和 $ptInt_1$ 。为了便于叙述, 假设网格内三角形方向 D_T 为逆时针, 法向为 N 。令直线 L 与 T_s 的三条边分别求交, 最终解出 2 个交点。

本文使用局部坐标变换和参数方程法统一求解。首先, 以三角形一个角点为坐标原点, 以该点的下一条有序边 (D_T 方向) 为 X 轴, 使用 $Y = N \times X$, 即 X 轴沿 D_T 方向旋转 90° 构造 Y 轴, 形成三角面上的局部坐标系 XOY 。假设当前角点为 v_0 , 则 X 轴与 v_0v_1 边重合, 方向一致。接下来, 将原三维坐标系参数转换至 XOY 二维坐标系, 分别构造直线 L 和 v_0v_1 的参数方程, 并联立求解即可求得直线 L 和 v_0v_1 的交点, 如图 4 所示。

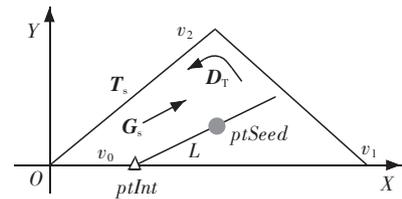


图 4 Case1: 从种子点(三角形内一点)出发追踪

Fig.4 Case1: Track from seed in triangle

v_0v_1 直线方程为

$$\begin{cases} y=0, \\ 0 \leq x \leq v_1.x. \end{cases}$$

直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = ptSeed.x + t \times G_s.x, \\ y = ptSeed.y + t \times G_s.y, \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

联立求解, 可得交点参数 t , 记为 t_0 :

$$t_0 = -ptSeed.y / ptSeed.x.$$

相应地:

$$x_0 = ptSeed.x + t_0 \times G_s.x.$$

接下来, 验证 x_0 的取值范围, 如果满足 $0 \leq x_0 \leq v_1.x$, 则求得一个交点 $(x_0, 0)$, 否则直线 L 与三角形边 v_0v_1 无交点。

如果有交点, 则需要如下的后置处理:

- 1) 通过逆变换将二维点 $(x_0, 0)$ 转换至原三维坐标系, 求得交点的三维坐标;
- 2) 搜索与 T_s 共 v_0v_1 边的三角形 T_0 或 T_1 , 用于梯度线的连续搜索。

依次将原点轮换至另外 2 个三角形角点, 按上述过程继续求解直线 L 与三角形另外两条边 v_1v_2, v_2v_0 的交点。三次求解结束后, 最终可得 2 个交点 $ptInt_0$ 和 $ptInt_1$ 。

2.2 从边出发追踪交点

该问题可描述如下:已知三角形 $T_0(v_0, v_1, v_2)$, T_0 内的梯度矢量为 G_0 , 其中一边(假设为 v_0v_1)上有一点 $ptSeed$, 过 $ptSeed$ 且方向为 G_0 的直线 L 与 T_0 的另外两边有一个交点 $ptInt$, 求该交点, 如图 5 所示。

1) L 与 v_1v_2 求交

构造图 5 所示的局部坐标系 XOY 。显然, XOY 坐标系中, $ptSeed.y=0$ 。直线 L 的参数方程同 2.1 节, 直线 v_1v_2 采用斜截式方程:

$$x = ky + b。$$

不难得出, 斜率 $k = (v_2.x - v_1.x) / v_2.y$, X 轴截距 $b = v_1.x$ 。以上各式联立求解, 得交点坐标:

$$(x_0, y_0) = (ptSeed.x + t_0 \times G_0.x, t_0 \times G_0.y)。$$

接下来, 判断交点有效性。构造直线 v_1v_2 的参数方程:

$$\begin{cases} x = v_1.x + s \times (v_2.x - v_1.x), \\ y = s \times v_2.y, \\ 0 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

将 y_0 代入, 可解参数 s :

$$s = y_0 / v_2.y。$$

如果满足 $0 \leq s \leq 1$, 则说明交点 (x_0, y_0) 在线段 v_1v_2 之内, 为有效交点, 否则认为直线 L 与 v_1v_2 边无交点。有交点的情况下, 按前述方法做后置处理, 提前结束搜索; 否则, 继续求解 L 与 v_2v_0 的交点。

2) L 与 v_2v_0 求交

图 5 中, v_0v_2 的直线方程可表示为

$$x/y = v_2.x / v_2.y。$$

参数方程可表示为

$$\begin{cases} x = s \times v_2.x, \\ y = s \times v_2.y, \\ 0 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

同理求解交点坐标, 并判断参数 s 的有效性。

上述计算中, 需要针对以下 2 种情况做特殊处理:

1) 当 $s=0$ 或 1 , 说明交点与节点重合。此时, 无法输出共边三角形, 只能按 2.3 节的方法继续搜索。

2) 如果均不满足 $0 \leq s \leq 1$ 条件, 即有向直线 L 与线段 v_1v_2 和 v_2v_0 均无交点, 此时, 将会出现梯度收敛现象。如图 6 所示, 当前三角形 T_0 内, 过点 $ptSeed$ 沿 G_0 方向, 无交点。但是, 综合 T_0 及其共边三角形 T_2 可知, 梯度矢量 G_0 和 G_2 是向节点 v_1 收敛的。可见, 该情况下节点 v_1 应为所求点。

2.3 从节点出发追踪交点

当搜索起点为三角形节点时, 本文按以下方法处理: 遍历当前节点的所有邻接三角形, 在每个三角形内分别求交点, 并判断交点有效性。

该问题可描述如下: 已知节点 v_0 及其一阶邻域三角形 $T_i, i=0, 1, \dots, m, m$ 为邻域三角形数, 对应梯度矢量为 G_i , 对每个三角形 T_i , 求过 v_0 且方向为 G_i 的直线 L 与 v_0 对边(v_1v_2)的交点, 最终在所有有效交点中输出一个最优点, 如图 7 所示。

如 2.2 节所述, 只需将搜索起点置于原点, 即 $ptSeed = v_0$, 即可同理求解。

接下来根据参数 t_0 和 s 判断交点有效性, 如表 1 所示。

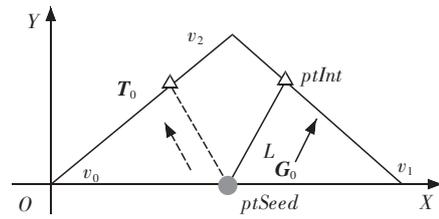


图 5 Case2: 从边出发追踪
Fig.5 Case2: Track from edge

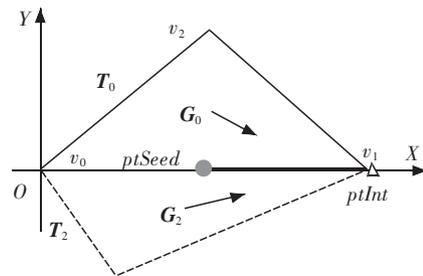


图 6 无交点(梯度收敛)
Fig.6 No intersection(gradient convergence)

表 1 交点有效性的判断

Tab. 1 Validity judgement of intersection points

序号	条件	交点
1	$t > 0, s \leq 0$	v_1
2	$t > 0, s \geq 1$	v_2
3	$t > 0, 0 < s < 1$	$ptInt$
4	$t_0 \leq 0$	无交点

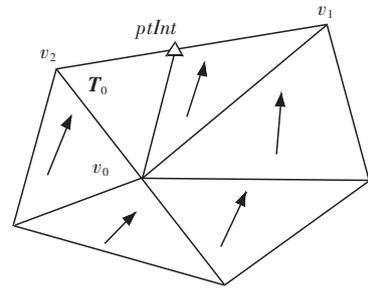


图 7 Case3:从节点出发追踪
Fig.7 Case3: Track from node

如果出现多个有效节点,则需要进行冲突消解处理。可根据实验效果,实施以下 2 种消解策略。

1)最短距离策略

对所有有效交点,计算至 v_0 的距离,将最短距离的交点作为输出。

2) s 极值策略

对所有有效交点,比较对应的参数 $s, s < 0$ 时,令 $s_0 = |s|, s > 1$ 时,令 $s_0 = |s - 1|$,将 s_0 极小值对应的交点作为输出。

3 流线网格生成

按上述方法,可在三角网格表面追踪一条过种子点 $ptSeed$,且两端分别抵达极点 v_{min}, v_{max} 的流线,记为种子线 $lnSeed$ 。接下来基于种子线,重建模型表面的四边形网格。设梯度方向及其正交方向网格密度为 $n_u \times n_v$,则有以下重建流程:

- 1)分段累计种子线 $lnSeed$ 的长度,等分 $lnSeed$ 为 n_u 份,得到 $(n_u - 1)$ 个等分点 $ptSeg_i, i = 0, 1, \dots, n_u - 2$;
- 2)以等分点 $ptSeg_i$ 为新的种子点 $ptSeed_i$,从该点出发,沿 G_{\perp} 方向跟踪正交流线(等参线);
- 3)在 $(n_u - 1)$ 条 G_{\perp} 向流线中,选择最长的一条作为 G_{\perp} 向种子线 $lnSeed_{\perp}$;
- 4)等分 $lnSeed_{\perp}$ 为 n_v 份,再从这些等分点出发沿 G 向追踪,得到 $(n_v - 1)$ 条 G 向流线。

4 实验

在 Windows 系统下,以 VC 和 OpenGL 为开发平台,集成 SuperLU 稀疏矩阵求解方案,实现了上述算法。图 8 使用球体网格模型(节点数 $N = 2\ 562$, 三角形数 $T = 5\ 120$)展示了算法各主要步骤的结果。

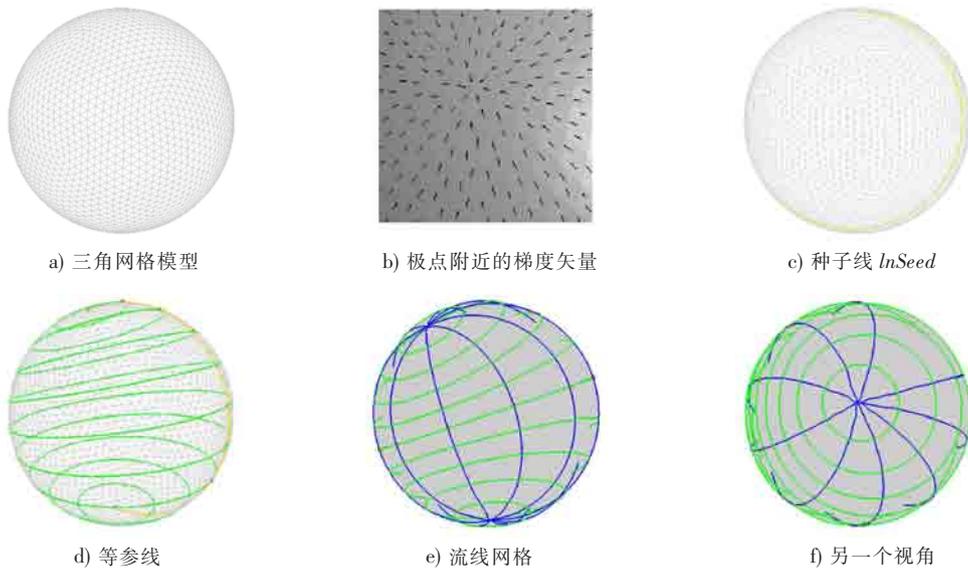


图 8 球体模型($N = 2\ 562, T = 5\ 120$)
Fig.8 Sphere model($N = 2\ 562, T = 5\ 120$)

图 8 b)中,极点附近梯度矢量从四面八方指向极点,这保证了所有 G 向流线都能最终收敛至极点,如图 8 f)所示;图 8 d)中, G_{\perp} 向流线即等参线均为闭合曲线,从 $lnSeed$ 上的每个等分点均可追踪出一条等参线,该等分点是对应等参线的起止点。

图 9 使用人体网格模型展示了不同种子点对流线网络的影响。图 9 a)和图 9 c)分别在人体正面和背面选定不同的种子点 $ptSeed$,可分别在人体正面和背面追踪种子线;图 9 b)和图 9 d)为 2 种情况下的流线网络,对比来看流线网络并未发生变化。理论上,只要极点 v_{min}, v_{max} 一定,所求的梯度场 G 及正交梯度场 G_{\perp} 就是确定的,对应地,模型表面流线和等参线也是确定的。

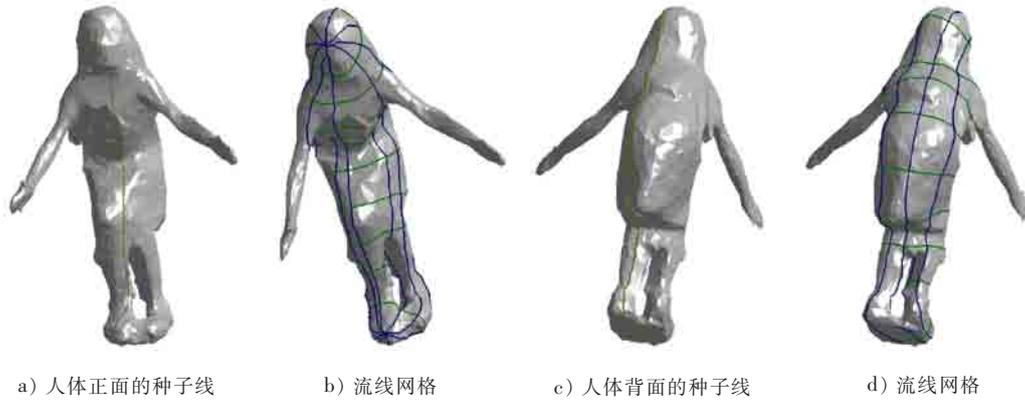


图 9 人体模型($N=2\ 000, T=4\ 000$)

Fig.9 Human model($N=2\ 000, T=4\ 000$)

图 10 使用股骨网格模型展示了不同网格密度下的流线网络。图 10 b)—d)分别是网格密度 $n_u \times n_v$ 为 $10 \times 10, 100 \times 20, 400 \times 100$ 的结果。图 10 c)中外侧髌部位(图示右上部)没有 G 向流线,图 10 d)中,在网格加密后,同一部位划分出了 G 向流线,对该部位及整体模型的表达也更准确。

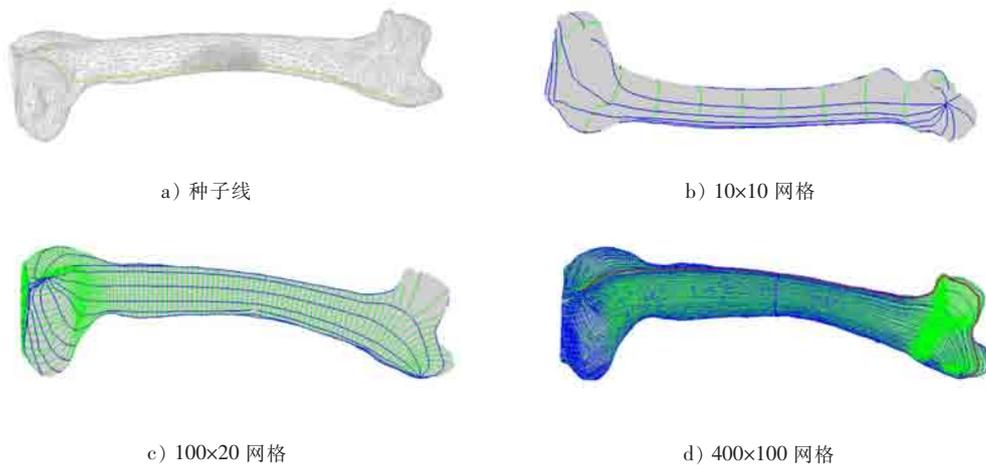


图 10 股骨模型($N=7\ 587, T=15\ 174$)

Fig.10 Femur model($N=7\ 587, T=15\ 174$)

以角度偏斜度(Skewness)为网格质量评价参数, $Skewness = \max[(\theta_{max} - \theta_e) / (180 - \theta_e), (\theta_e - \theta_{min}) / \theta_e]$,其中 θ_{max} 和 θ_{min} 为单元中的最大角和最小角, θ_e 为单元均衡角,本文网格在极点处为三角形网格(图 8 f)),因此 θ_e 有 60 (三角形)和 90 (四边形)2 个取值。对图 10 的网格质量进行分析, $10 \times 10, 100 \times 20, 400 \times 100$ 网格的平均偏斜度分别为 $0.68, 0.33, 0.25$, 分别达到良、优、优的网格质量等级,3 种情况下,均未出现偏斜度大于

0.90 的网格。

与传统几何方法相比,如文献[2]的 Q-Morph 方法,调和方程法是以底层网格的梯度场为指导重新划分网格,这一点对复杂网格同样实用,而且,网格精度和质量很容易通过网格密度进行调整。这些特点也体现在实验结果之中:1)分段流形的梯度场是流线追踪的依据,相对于传统几何方法,数学方法对网格重构表达的鲁棒性更高;2)给定模型、约束条件及网格密度等条件,可确定唯一的梯度场和流线网格;3)网格密度越高,流线网格越能准确表达原始模型,但网格密度过高,将延长流线追踪时间,增加存储空间。

此外,借助稀疏矩阵方案,以上实验模型的梯度场求解均没有时间和空间压力;而流线追踪过程主要是利用线性方程求解交点,也不会存在性能问题。

5 结 语

将调和理论应用至分段流形网格重构可有效解决几何重构法中存在的算法不稳定、迭代时间长等问题。论文针对三角化网格重构问题,使用离散 Laplace 调和方程求解模型梯度场,进而通过流线追踪重构等参数化网格,并通过算法设计、开发和模型实验验证了该过程。相对传统几何算法,调和理论算法更具鲁棒性和网格表达的唯一性,在参数化网格重构研究领域具有扩展应用的能力,具体如下。

1)双极点约束模型很好地验证了前文的理论和方法,而且每个网格内都有确定的梯度方向,因此能有效规避零曲率曲面或平面区域网格再划分问题。但是,双极点法只能表达一个方向的等参线(G_{\perp} 向的闭合流线),流线网格并非等参网格。而且,流线网格也非纯四边形网格,在极点处网格退化为三角形。通过改变约束条件可有效解决以上问题,例如,文献[17—18]使用 8 点约束在模型表面构造六面体模型,从而很好地重构出纯四边形的等参数化网格。

2)对多亏格(genius-n)模型^[19],本文的等参线追踪方法需要改进。如图 9,人体模型两腿之间有一个孔洞,为 genius-1 模型,在双腿部位,只在一侧追踪了等参线。genius-n 模型中,在同一高度参数下可能追踪出等参线,这一点可通过完善流线追踪方法实现。此外,也可以采用区域分割法将 genius-n 模型“降维”为无亏格(genius-0)模型进行处理。在分支特征(图 9 手臂部位)或尖锐特征(图 10 外侧髁部位)处,即使加密了整体网格,流线还是难以到达、局部网格加密困难等问题,此时可以采用区域分割法^[20]对这些特征区域单独划分网格。

参考文献/References:

- [1] 汪攀,张见明,韩磊,等.基于带约束前沿推进的四边形网格生成方法[J].湖南大学学报(自然科学版),2017,44(8):29-34.
WANG Pan, ZHANG Jianming, HAN Lei, et al. An advancing front quadrilateral mesh generation method with constraint[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2017, 44(8): 29-34.
- [2] 吴禄慎,王伟杰,陈华伟,等.基于区域划分的各向异性四边形网格重建方法[J].机械设计与制造,2015(3):212-216.
WU Lushen, WANG Weijie, CHEN Huawei, et al. Anisotropic quadrilateral remeshing based on region division[J]. Machinery Design & Manufacture, 2015(3): 212-216.
- [3] 李天华.基于方向场的四边形重网格化技术研究[D].长春:吉林大学,2017.
LI Tianhua. Research on Quad Remeshing based on Vector Field [D]. Changchun: Jilin University, 2017.
- [4] 徐岗,舒来新,朱亚光,等.边界简化与多目标优化相结合的高质量四边形网格生成[J].中国图象图形学报,2018,23(1):61-73.
XU Gang, SHU Laixin, ZHU Yaguang, et al. High-quality quadrilateral mesh generation by combining boundary simplification and multi-objective optimization[J]. Journal of Image and Graphics, 2018, 23(1):61-73.
- [5] VERMA C S, SURESH K. Alpha-MST: A robust unified algorithm for quadrilateral mesh adaptation[J]. Computer-Aided Design, 2018, 103(SI): 47-60.
- [6] 郑永川,关柏良,林淑金,等.针对密集点云的快速自适应四边形网格生成算法[J].计算机辅助设计与图形学学报,2019,31(1):39-46.
ZHENG Yongchuan, GUAN Boliang, LIN Shujin, et al. Rapid and adaptive quadrilateral mesh generation algorithm from dense point cloud [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2019, 31(1): 39-46.
- [7] PATANE G. Mesh-based and meshless design and approximation of scalar functions[J]. Computer Aided Geometric Design, 2017, 57:

23-43.

- [8] 袁洁, 周明全, 耿国华, 等. 基于 Morse-Smale 拓扑特征的文物碎片拼接算法[J]. 自动化学报, 2018, 44(8): 1486-1495.
YUAN Jie, ZHOU Mingquan, GENG Guohua, et al. Automatic reassembly of fractured fragments using Morse topological features[J]. ACTA Automatica Sinica, 2018, 44(8): 1486-1495.
- [9] 齐学义, 杨帆. 双调和方程生成正交曲线坐标网格技术的研究[J]. 水力发电学报, 2000(3): 84-89.
QI Xueyi, YANG Fan. Study on technique for generating boundary-orthogonal curvilinear coordinate grid using the biharmonic equations [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2000(3): 84-89.
- [10] LING R, HUANG J, SUN F, et al. Spectral quadrangulation with feature curve alignment and element size control[J]. ACM Transactions on Graphics, 2014, 34(1): 1-11.
- [11] MARCHANDISE E, WIART C, VOS W G, et al. High-quality surface remeshing using harmonic maps(part II): Surfaces with high genus and of large aspect ratio[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 86(11): 1303-1321.
- [12] ABDULHADI Z, MUHANNA Y, PONNUSAMY S. Dirichlet problem, univalence and schwarz lemma for biharmonic mappings[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2018, 15(4): 187.
- [13] BEZRODNYKH S, VALSOV V. On a problem of the constructive theory of harmonic mappings[J]. Journal of Mathematical Sciences, 2014, 201(6): 705-732.
- [14] GLICKENSTEIN D. Geometric triangulations and discrete Laplacians on manifolds[J]. Mathematics, 2005:1-43.
- [15] 纪国良, 丁勇, 周曼, 等. 工程计算中大型稀疏矩阵存储方法研究[J]. 数值计算与计算机应用, 2018, 39(3): 217-230.
JI Guoliang, DING Yong, ZHOU Man, et al. Research on the storage method of large-scale sparse matrix in engineering calculation[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2018, 39(3): 217-230.
- [16] 张永杰, 孙秦. 稀疏矩阵存储技术[J]. 长春理工大学学报, 2006, 29(3): 38-41.
ZHANG Yongjie, SUN Qin. Sparse storage technique for sparse matrix[J]. Journal of Changchun University of Science and Technology, 2006, 29(3): 38-41.
- [17] CHEN Huawei, GUO Ye, ROSTAMI R, et al. Porous structure design using parameterized hexahedral meshes and triply periodic minimal surfaces[C]// Computer Graphics International 2018. Bintan Island:[s.n.], 2018.
- [18] MARTIN T, COHEN E, KIRBY R M. Volumetric parameterization and trivariate B-spline fitting using harmonic functions[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009(26): 648-664.
- [19] 钱坤, 张家玲, 李映华, 等. 高亏格曲面共形参数化方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2017, 29(12): 2225-2234.
QIAN Kun, ZHANG Jialing, LI Yinghua, et al. Conformal parameterization for high genus surfaces[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2017, 29(12): 2225-2234.
- [20] LI Bo, QIN Hong. Feature-aware reconstruction of volume data via trivariate splines [C]// Pacific Graphics 2011. Kaohsiung:[s.n.], 2011.