第 39 卷第 2 期 河 北 科 技 大 学 学 报 Vol.39,No.2
2018 年 4 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Apr. 2018

文章编号:1008-1542(2018)02-0135-07 **doi:10.7535/hbkd.2018yx02006**

一类三维系统的分支分析

王永文,乔志琴,薛亚奎

(中北大学理学院,山西太原 030051)

摘 要:为了丰富三维混沌系统的定性与分支理论,以具有三重零奇异平衡点的二次截断规范型系统为研究对象,研究了此系统在不同参数条件下的平衡点的存在性及其附近的稳定性与分支问题。使用数学分析的方法讨论了在不同参数条件下,平衡点所对应的特征方程实根的存在性,从而得到平衡点处丰富的局部流形情况,引出系统可能会产生的分支情形。利用卡尔丹诺公式仔细分析了平衡点为鞍焦点的参数条件,分析了产生一维 Hopf 分支的参数条件,通过计算得到超临界 Hopf 分支与亚临界 Hopf 分支的前提条件,结果表明系统具有丰富的稳定性与分支情况,可为以后证明产生连接鞍焦点的同宿环或异宿环的存在性和产生 Silnikov 型混沌证明提供理论前提。研究方法可推广到对其他高维非线性系统的研究。

关键词:定性理论;鞍焦点;Hopf 分支;超临界;亚临界

中图分类号:O175.12 **MSC(2010)主题分类:**16S40 **文献标志码:**A

Bifurcation analysis of a three dimensional system

WANG Yongwen, QIAO Zhiqin, XUE Yakui

(School of Science, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China)

Abstract: In order to enrich the stability and bifurcation theory of the three dimensional chaotic systems, taking a quadratic truncate unfolding system with the triple singularity equilibrium as the research subject, the existence of the equilibrium, the stability and the bifurcation of the system near the equilibrium under different parametric conditions are studied. Using the method of mathematical analysis, the existence of the real roots of the corresponding characteristic equation under the different parametric conditions is analyzed, and the local manifolds of the equilibrium are gotten, then the possible bifurcations are guessed. The parametric conditions under which the equilibrium is saddle-focus are analyzed carefully by the Cardan formula. Moreover, the conditions of codimension-one Hopf bifucation and the prerequisites of the supercritical and subcritical Hopf bifurcation are found by computation. The results show that the system has abundant stability and bifurcation, and can also supply theorical support for the proof of the existence of the homoclinic or heteroclinic loop connecting saddle-focus and the Silnikov's chaos. This method can be extended to study the other higher nonlinear systems.

Keywords: stability theory; saddle-focus; Hopf bifurcation; supercritical; subcritical

---

收稿日期:2017-12-25;修回日期:2018-03-03;责任编辑:张 军

基金项目:国家自然科学基金(11401541);山西省自然科学基金(2015011009)

第一作者简介:王永文(1980—),男,山西繁峙人,硕士研究生,主要从事生物数学方面的研究。

通信作者:薛亚奎教授。E-mail:ykxue@nuc.edu.cn

王永文,乔志琴,薛亚奎.一类三维系统的分支分析[J].河北科技大学学报,2018,39(2):135-141.

WANG Yongwen, QIAO Zhiqin, XUE Yakui. Bifurcation analysis of a three dimensional system[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2018, 39(2): 135-141.

随着洛仑兹系统的发现，许多学者致力于研究各种非线性系统现象，其中包含广义的 Lorenz 系统[1]，吕系统[2-3]，陈系统[4]，Genesio 系统[5]，Chua 系统[6]等。除了利用李雅普诺夫指数证明一类系统具有混沌之外，更多学者利用 Silnikov 条件去构造自治系统出现混沌，陈关荣等[1]根据 Silnikov 准则构造了同时具有洛仑兹吸引子和陈吸引子的吕系统。ZHOU 等[5]在 Genesio 系统里找到一条 Silnikov 形式的同宿轨，得到 Genesio 系统里存在马蹄混沌结论。ZHOU 等[7]构造了一类新的简单的具有连接鞍焦点的同宿轨的三维二次混沌系统。王炜等[8]对改进的 PID 控制系统求出具有 Silnikov 形式的同宿轨的解析表达式，从而说明具有混沌现象的发生。其他学者[9-18]也对不同的系统做了相应的分析。本研究主要在 FRIEIRE 等[19]讨论三重零线性退化的标准型开折的基础上，讨论以下一类三维自治系统：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3,\\ \dot{x}_3=ax_1+b_2x_2+cx_3+A_1x_1x_3+A_2x_1x_2-\dfrac{x_1^2}{2}\end{cases}\tag{1}$$

的分支情况，其中 a,b,c,A_1,A_2 为参数，此系统比 Genesio 系统[5]更一般化。

若对系统(1)做变换 $x_1\to x_1+a$，$x_2\to x_2$，$x_3\to x_3$，那么系统(1)可简化为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=\dfrac{a^2}{2}+(b+aA_2)x_2+(c+aA_1)x_3+A_1x_1x_3+A_2x_1x_2-\dfrac{x_1^2}{2},\end{cases}$$

FRIEIRE 等[19]主要研究了形如以上系统的三次截断，当考虑参数为 a,b,c 时平衡点处的余维 2 的分支。本文第 1 节主要研究系统(1)的平衡点的存在性以及局部稳定性，第 2 节主要分析平衡点为系统(1)鞍焦点的参数条件，最后讨论系统(1)产生 Hopf 分支的条件以及此分支为超临界和亚临界的参数条件。

1 平衡点处的局部定性分析

显然，当 $a=0$ 时，系统(1)仅有一个平衡点 $E_1(0,0,0)$，而当 $a\neq0$ 时，系统(1)有 2 个平衡点 $E_1(0,0,0)$ 和 $E_2(2a,0,0)$，且此系统在平衡点 E_1 和 E_2 处的线性雅可比矩阵分别为

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&b&c\end{pmatrix} 与 \boldsymbol{D}_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a&b+2aA_2&c+2aA_1\end{pmatrix},$$

其对应的特征方程分别为

$$\det(\lambda_1 I-\boldsymbol{D}_1)=\lambda_1^3-c\lambda_1^2-b\lambda_1-a=0\tag{2}$$

与

$$\det(\lambda_2 I-\boldsymbol{D}_2)=\lambda_2^3-(c+2aA_1)\lambda_2^2-(b+2aA_2)\lambda_2+a=0。\tag{3}$$

特征方程(3)与方程(2)类似，因此笔者仅分析特征方程(2)，利用数学分析的方法判断特征方程左边函数单调性以及凹凸性，然后分析与横轴交点的情况，得到在各系数 a,b,c 不同条件下方程(2)的根的情况(若是重根，按重根个数算)以及 E_1 局部流形的详细分析，并且由赫尔维兹判据可判断出，方程(2)的 3 个根均为负实根(其中必有 1 个负实根)的充要条件为 $a<0,c<0,bc+a>0$，此时 E_1 局部渐近稳定，如表 1 所示。对于特征方程(3)的根及 E_2 处的局部形态可对照系数做相应的分析，此处不再赘述。

从表 1 可以看出：

a)当 $a=b=c=0$ 时，平衡点 E_1 处产生了三重零特征根线性退化；

b)当 $c\neq0,a=b=0$ 时，平衡点 E_1 处产生了二重零特征根线性退化，FRIEIRE 等[19]研究结果显示参数 $a=b=0$ 时，系统(1)可产生 BT 分支；

c)当 $b<0,a=c=0$ 时，平衡点 E_1 处产生了一重零特征根和一对共轭的纯虚根退化情形；且当 $b<0$，$A_1\neq0,A_2\neq0$ 时，FRIEIRE 等[19]证明当 $a=c=0$ 时，系统(1)可产生 Hopf-zero 分支。

表 1　E_1 的局部分析

Tab.1　Local analysis of E_1

a	b	c	特征方程(2)根的情况	E_1 的局部特性
$=0$	$=0$	$=0$	3 个零根	三维 W^c_{loc}
		>0	2 个零根与 1 个正实根	二维 W^c_{loc} 与一维 W^u_{loc}
		<0	2 个零根与 1 个负实根	二维 W^c_{loc} 与一维 W^s_{loc}
	>0	任意	1 个零根、1 个正实根与 1 个负实根	一维 W^c_{loc}、一维 W^s_{loc} 与 1 维 W^u_{loc}
	<0	$=0$	1 个零根与 2 个共轭纯虚根	三维 W^c_{loc}
		>0	1 个零根与 2 个正实根/正实部复根	一维 W^c_{loc} 与二维 W^u_{loc}
		<0	1 个零根与 2 个相同负实根/负实部复根	一维 W^c_{loc} 与二维 W^u_{loc}
>0	$=0$	$=0$	1 个正实根与 2 个负实部复根	一维 W^u_{loc} 与二维 W^s_{loc}
		>0	1 个正实根与 2 个复根	见第 2 节讨论 $\Delta_1>0$
		<0	$4c^3+27a\leqslant 0$ 时 1 个正实根与 2 个负实根	一维 W^u_{loc} 与二维 W^s_{loc}
			$4c^3+27a>0$ 时 1 个正实根与 2 个复根	见第 2 节讨论 $\Delta_1>0$
	>0	$=0$	$4b^3-27a^2\geqslant 0$ 时 1 个正实根与 2 个负实根	一维 W^u_{loc} 与二维 W^s_{loc}
			$4b^3-27a^2<0$ 时 1 个正实根与 2 个复根	见第 2 节讨论 $\Delta_1>0$
	<0	$=0$	1 个正实根与 2 个复根	见第 2 节讨论 $\Delta_1>0$
<0	$=0$	$=0$	1 个负实根与 2 个正实部复根	一维 W^s_{loc} 与二维 W^u_{loc}
		>0	$4c^3+27a\geqslant 0$ 时 1 个负实根与 2 个正实根	一维 W^s_{loc} 与二维 W^u_{loc}
			$4c^3+27a<0$ 时 1 个负实根与 2 个复根	见第 2 节讨论 $\Delta_1>0$
		<0	1 个负实根与 2 个复根	见第 2 节讨论 $\Delta_1>0$
	>0	$=0$	$4b^3-27a^2\geqslant 0$ 时 1 个负实根与 2 个正实根	一维 W^s_{loc} 与二维 W^u_{loc}
			$4c^3+27a<0$ 时 1 个负实根与 2 个复根	见第 2 节讨论 $\Delta_1>0$
	<0	$=0$	1 个负实根与 2 个复根	见第 2 节讨论 $\Delta_1>0$
		<0	$bc+a>0$ 时根据赫尔维兹判据知 1 个负实根与 2 个负实部特征根	三维 W^s_{loc}

2　鞍焦点存在性

因为具有 Silnikov 条件的鞍焦点意味着混沌的产生，笔者主要寻找系统(1)平衡点为鞍焦点的参数条件。

为了叙述简单，记 $\Delta_i=\left(\frac{q_i}{2}\right)^2+\left(\frac{p_i}{3}\right)^3$ 和 $\gamma_i=\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}+\sqrt{\Delta_1}}+\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}-\sqrt{\Delta_i}}$，

$\rho_i=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}+\sqrt{\Delta_i}}+\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}-\sqrt{\Delta_i}}\right)$，$\omega_i=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}+\sqrt{\Delta_i}}-\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}-\sqrt{\Delta_i}}\right)$，　$i=1,2$。

令 $\lambda_1=\mu_1+\frac{c}{3}$，特征方程(2)可简化为 $\mu_1^3+p_1\mu_1+q_1=0$，其中 $p_1=-\frac{1}{3}c^2-b$，$q_1=-\frac{2}{27}c^3-\frac{1}{3}bc-a$，整理可得，$\Delta_1=\frac{a^2}{4}-\frac{b^3}{27}+\frac{a}{27}c^3-\frac{b^2}{108}c^2+\frac{ab}{6}c$。

由卡尔丹诺式可得：

情形一　当 $\Delta_1>0$ 时，方程(2)有 1 个实根与 2 个复根分别为

$$\lambda_{11}=\frac{c}{3}+\gamma_1,\quad \lambda_{12}=\frac{c}{3}+\rho_1+\mathrm{i}\omega_1,\quad \lambda_{13}=\frac{c}{3}+\rho_1-\mathrm{i}\omega_1。$$

情形二　当 $\Delta_1=0$ 时，方程(2)有 2 个实根分别为

$$\lambda_{11}=\frac{c}{3}+2\sqrt[3]{-\frac{q_1}{2}},\quad \lambda_{12}=\frac{c}{3}-\sqrt[3]{-\frac{q_1}{2}},（二重根）。$$

情形三 当 $\Delta_1<0$ 时，$p_1<0$ 成立，从而方程(2)的根有3个不相等的实根分别为

$$\lambda_{11}=\frac{c}{3}-\frac{2\sqrt{-3p_1}}{3}\cos\frac{\theta}{3},\quad \lambda_{12}=\frac{c}{3}+\frac{\sqrt{-3p_1}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)$$

与

$$\lambda_{13}=\frac{c}{3}+\frac{\sqrt{-3p_1}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

其中 $\theta=\arccos\dfrac{9q_1}{2p_1\sqrt{-3p_1}}$。

表1中未确定出复根的实部的正负分析均属于情形一，若 $\Delta_1>0$ 时，方程(2)有1个实根 λ_{11} 与2个复根 λ_{12}，λ_{13}，由根与系数关系，可得 $\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{13}=a$，若 $a>0$ 可知，$\lambda_{11}>0$；若 $a<0$ 可知，$\lambda_{11}<0$。则可得到以下结果。

在参数 $a>0$，$\dfrac{c}{3}+\rho_1<0$ 时，平衡点 E_1 处具有一维 W^u_{loc} 与二维 W^s_{loc}；当 $\dfrac{c}{3}+\rho_1=0$ 时，平衡点 E_1 处具有一维 W^u_{loc} 与二维 W^c_{loc}；当 $\dfrac{c}{3}+\rho_1>0$ 时，平衡点 E_1 处具有三维 W^u_{loc}。

在参数 $a<0$，$\dfrac{c}{3}+\rho_1<0$ 时，平衡点 E_1 处具有三维 W^s_{loc}；当 $\dfrac{c}{3}+\rho_1=0$ 时，平衡点 E_1 处具有一维 W^s_{loc} 与二维 W^c_{loc}；当 $\dfrac{c}{3}+\rho_1>0$ 时，平衡点 E_1 处具有一维 W^s_{loc} 与二维 W^u_{loc}。

由以上分析可得到 E_1 是鞍焦点存在的条件结论。

定理1 当 $\Delta_1>0$，$a(c+3\rho_1)<0$ 时，平衡点 E_1 是系统（1）的一个鞍焦点。

同理，令 $\lambda_2=\mu_2+\dfrac{c+2aA_1}{3}$，方程（3）可简化为 $\mu_2^3+p_2\mu_2+q_2=0$，其中 $p_2=-\dfrac{1}{3}(c+2aA_1)^2-(b+2aA_2)$，$q_2=-\dfrac{2}{27}(c+2aA_1)^3-\dfrac{1}{3}(c+2aA_1)(b+2aA_2)+a$。由卡尔丹诺公式可知，当 $\Delta_2>0$ 时，方程(3)的3个根分别为

$$\lambda_{21}=\frac{c+2aA_1}{3}+\gamma_2,\quad \lambda_{22}=\frac{c+2aA_1}{3}+\rho_2+\mathrm{i}\omega_2,\quad \lambda_{23}=\frac{c+2aA_1}{3}+\rho_2-\mathrm{i}\omega_2。$$

因为 $\lambda_{21}\lambda_{22}\lambda_{23}=-a$，若 $a>0$，可知 $\lambda_{21}<0$；若 $a<0$，可知 $\lambda_{21}>0$，则当 $\dfrac{c+2aA_1}{3}+\rho_2<0$ 时，平衡点 E_2 处具有二维 W^s_{loc}，当 $\dfrac{c+2aA_1}{3}+\rho_2=0$ 时，平衡点 E_2 处具有二维 W^c_{loc}；而当 $\dfrac{c+2aA_2}{3}+\rho_2>0$ 时，平衡点 E_2 处具有二维 W^u_{loc}，从而可以得到以下结论。

定理2 当 $\Delta_2>0$，$a(c+2aA_1+3\rho_2)>0$ 时，平衡点 E_2 是系统（1）的一个鞍焦点。

3 Hopf 分支

假设方程(2)有2个共轭的纯虚根，令 $\hat{\lambda}_{12}=\mathrm{i}\omega$，$\hat{\lambda}_{13}=-\mathrm{i}\omega$，$\omega>0$，由根与系数的关系可知 $\hat{\lambda}_{11}+\hat{\lambda}_{12}+\hat{\lambda}_{13}=c$，因而 $\hat{\lambda}_{11}=c$ 与 $0=c^3-cc^2-bc-a=-(a+bc)$ 成立，即此时 $c\neq0$，$a+bc=0$ 时可求得 $\omega=\sqrt{-b}$，$b<0$，以下取 a 为扰动参数，记 $a_h=-bc$。

由特征方程(2)可得 $\lambda'_1(a)=\dfrac{1}{3\lambda_1^2-2c\lambda_1-b}$，通过计算可得：

$$\mathrm{Re}\,\lambda'_1(a_h)=\frac{3b^2-b}{3b^2-b-4c^2b}>0,\quad \mathrm{Im}\,\lambda'_1(a_h)=\frac{2c\sqrt{-b}}{3b^2-b-4c^2b}\neq0,$$

则若 $b<0$，$c\neq0$，系统(1)在 $a=a_h$ 时 E_1 处产生 Hopf 分支[1]。

当 $a=a_h$ 时，系统（1）可重新写成：

$$\dot{x}=\boldsymbol{D}_{1a}x+\frac{1}{2}B(x,x)+\frac{1}{6}C(x,x,x)+O(\|x\|^4),\tag{4}$$

其中,

$$\boldsymbol{D}_{1a} \triangleq \boldsymbol{D}_1|_{a=a_h} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bc & b & c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2A_1x_1y_3 + 2A_2x_1y_2 - x_1y_1 \end{pmatrix}$$

和 $\boldsymbol{C}(x,y,z)=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,z_3)^{\mathrm{T}}$。

下面计算满足 $\boldsymbol{D}_{1a}\boldsymbol{Q}_1=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{Q}_1$,$\boldsymbol{D}_{1a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{P}_1$ 和 $\langle\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1\rangle \triangleq \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{P}_{1i}\bar{\boldsymbol{Q}}_{1i}=1$ 条件的向量 $\boldsymbol{P}_1$,$\boldsymbol{Q}_1$。通过繁琐的计算,可得:

$$\boldsymbol{P}_1 = \frac{1}{2[b+c\sqrt{-b}\,i]}\begin{pmatrix} c\sqrt{-b}\,i \\ -c-\sqrt{-b}\,i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-b}\,i \\ b \end{pmatrix}。$$

再通过计算以下式子得到,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_1)=(0,0,2A_1b-1+2A_2\sqrt{-b}\,i)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,\bar{\boldsymbol{Q}}_1)=(0,0,2A_1b-1-2A_2\sqrt{-b}\,i)^{\mathrm{T}}$$

和

$$\boldsymbol{D}_{1a}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & -\frac{1}{bc} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

并令 $s_1=\boldsymbol{D}_{1a}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,\bar{\boldsymbol{Q}}_1)$ 与 $\tau_1=(2\mathrm{i}\omega I-\boldsymbol{D}_{1a})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_1)$,可得:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,s_1)=\frac{1}{bc}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2A_1b-1-2A_2\sqrt{-b}\,i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{Q}}_1,\tau_1)=\frac{2A_1b-1+2A_2\sqrt{-b}\,i}{-3bc+6b\sqrt{-b}\,i}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8A_1b-1+4A_2\sqrt{-b}\,i \end{pmatrix},$$

则由第一李雅普诺夫系数公式[20]求得:

$$\begin{aligned} l_{11} = {} & \frac{1}{2\omega_1}\mathrm{Re}[\langle\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_1,\bar{\boldsymbol{Q}}_1)\rangle-2\langle\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{D}_{1a}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,\bar{\boldsymbol{Q}}_1))\rangle+ \\ & \quad \langle\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{Q}}_1,(2\mathrm{i}\omega_1I-\boldsymbol{D}_{1a})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_1))\rangle]= \\ & \frac{1}{2\omega_1}\mathrm{Re}(-2\langle\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,s_1)\rangle+\langle\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{Q}}_1,\tau_1)\rangle)= \\ & \frac{8b-c^2-6A_1bc^2-16A_1b^2+12A_2bc-6A_2c^3+8A_2^2bc^2+8A_1A_2bc^3+16A_1A_2b^2c+16A_1^2b^2c^2}{4bc\sqrt{-b}(b-c^2)(4b-c^2)}。\end{aligned}$$

定理 3 在 $b<0,c\neq0$ 情况下,当 $a=-bc$ 时系统(1)在平衡点 E_1 附近产生 Hopf 分支,并且当 $l_{11}<0$ 时,系统(1)在平衡点 E_1 附近产生超临界 Hopf 分支;当 $l_{11}>0$ 时,系统(1)在平衡点 E_1 附近产生亚临界 Hopf 分支。

同理,当 $a\neq0$ 时,可假设特征方程(2)有 3 个根 $\hat{\lambda}_{21}$,$\hat{\lambda}_{22}=\mathrm{i}\hat{\omega}$,$\hat{\lambda}_{23}=-\mathrm{i}\hat{\omega}$,$\hat{\omega}>0$,容易得到 $\hat{\lambda}_{21}=c+2aA_1$,$\hat{\omega}=\sqrt{-(b+2aA_2)}$,$b+2aA_2<0$ 和 $a=(b+2aA_2)(c+2aA_1)$,以下取 c 为扰动参数,并设 $c_h=\frac{a}{b+2aA_2}-2aA_1$。

由方程(3)可得 $\lambda'_2(c)=\frac{\lambda_2^2}{3\lambda_2^2-2(c+2aA_1)\lambda_2-(b+2aA_2)}$,通过计算可得,

$$\mathrm{Re}\,\lambda'_2(c_h)=\frac{(b+2aA_2)^2}{2[(b+2aA_2)^2+\frac{a^2}{-(b+2aA_2)}]}>0, \quad \mathrm{Im}\,\lambda'_2(c_h)=\frac{a\sqrt{-(b+2aA_2)}}{2[(b+2aA_2)^2+\frac{a^2}{-(b+2aA_2)}]}\neq0,$$

则当 $a\neq0$,$b+2aA_2<0$ 时,系统(1)在 $c=c_h$ 时平衡点 E_2 处产生 Hopf 分支。

当 $c=c_h$,做变换 $x_1\to x_1+2a$,$x_2\to x_2$,$x_3\to x_3$,系统(1)变为

$$\dot{x}=D_{2c}x+\frac{1}{2}B(x,x)+\frac{1}{6}C(x,x,x)+O(\|x\|^4),$$

其中 $x,B(x,x),C(x,x,x)$ 在式(4)中给出，且

$$\boldsymbol{D}_{2c}\triangleq\boldsymbol{D}_2|_{c_{c_h}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a & b+2aA_2 & \dfrac{a}{b+2aA_2}\end{pmatrix}。$$

令 $\boldsymbol{D}_{2c}\boldsymbol{Q}_2=\mathrm{i}\hat{\omega}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{D}_{2c}^{*}\boldsymbol{P}_2=-\mathrm{i}\hat{\omega}\boldsymbol{P}_2$，且 $\langle\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2\rangle=1$。通过计算可得：

$$\boldsymbol{P}_2=\frac{1}{2\left[b+2aA_2+\dfrac{a}{b+2aA_2}\sqrt{-(b+2aA_2)}\,i\right]}\begin{pmatrix}\dfrac{a}{b+2aA_2}\sqrt{-(b+2aA_2)}\,i\\ -\dfrac{a}{b+2aA_2}-\sqrt{-(b+2aA_2)}\,i\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{-(b+2aA_2)}\,i\\ b+2aA_2\end{pmatrix},$$

则由第一李雅普诺夫系数公式[20]可求得：

$$\begin{aligned}l_{21}(0)=&\frac{1}{2\hat{\omega}}\mathrm{Re}(-2\langle\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{D}_{2c}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,\bar{\boldsymbol{Q}}_2))\rangle+\langle\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{Q}}_2(2\mathrm{i}\hat{\omega}I-\boldsymbol{D}_{2c})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Q}_2))\rangle)-\\&6A_2a^3(b+2aA_2)+(8A_1A_2a^3-a^2)(b+2aA_2)^2+(8A_2^2-6A_1)a^2(b+2aA_2)^3=\\&\frac{4a(3A_2+4A_1^2a)(b+2aA_2)^4+8(1+2A_1A_2a)(b+2aA_2)^5-16A_1(b+2aA_2)^6}{4\sqrt{-(b+2aA_2)}[(b+2aA_2)^3-a^2][4(b+2aA_2)^3-a^2]}。\end{aligned}$$

定理 4　在 $a\neq0,b+2aA_2<0$ 情况下，系统(1)在 $c=c_h$ 时 E_2 处产生 Hopf 分支，并且当 $l_{21}<0$ 时，系统(1)在平衡点 E_2 附近产生超临界 Hopf 分支；当 $l_{21}>0$ 时，系统(1)在平衡点 E_2 附近产生亚临界 Hopf 分支。

4　结　语

为了研究一类具有三重零奇异的三维微分方程的二次截断开折系统所产生的分支情况，首先分析此类系统平衡点的存在以及局部特征根实部的具体情况，特别关注了平衡点为鞍焦点的参数条件，最后分析了平衡点附近产生 Hopf 分支的条件，并分别指出超临界和亚临界 Hopf 分支参数条件。本研究的结果为以后证明此系统存在 Shilnikov 型混沌提供了理论依据。

参考文献/References：

[1]　陈关荣，吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步[M]. 北京：科学出版社，2003.

[2]　LYU Jinhu，CHEN Guanrong. A new chaotic attractor coined[J]. International Journal of Bifurcations and Chaos，2002，12(3)：659-661.

[3]　YU Yongguang，ZHANG Suochun. Hopf bifurcation analysis of the Lü system[J]. Chaos Solitons & Fractals，2004，21(5)：1215-1220.

[4]　邓学明. 一类非线性系统分岔混沌拓扑结构分析[J]. 河北科技大学学报，2008，29 (3)：182-184.
DENG Xueming. Analysis of bifurcation topological structure of non-linear system[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2008，29(3)：182-184.

[5]　ZHOU Liangqiang，CHEN Fangqi. Hopf bifurcation and Shilnikov chaos of Genesio system[J]. Chaos Solitons & Fractals，2009，40(3)：1413-1422.

[6]　EUZEBIO R，LLIBRE J. Zero-Hopf bifurcation in a Chua system[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications，2017，37：31-40.

[7]　ZHOU Tianshou，CHEN Guanrong，YANG Qigui. Constructing a new chaotic system based on the Silnikov criterion[J]. Chaos Solitons & Fractals，2004，19(4)：985-993.

[8]　王炜，张琪昌. 一类三维 PID 控制系统的 Shilnikov 类型 Smale 马蹄混沌[C]//第十二届全国非线性振动暨第九届全国非线性动力学和运动稳定性学术会议论文集.镇江：中国力学学会，2009：212-219.

[9]　张康明. 一个具有唯一鞍焦点的三维混沌系统分析[J]. 数学的实践与认识，2010，40(14)：197-202.

ZHANG Kangming. Analysis of a 3D chaotic system with only one saddle foci equilibrium[J]. Mathematics in Practice and Theory，2010，40(14)：197-202.

[10] BAO Jianhong，YANG Qigui. A new method to find homoclinic and heteroclinic orbits[J]. Applied Mathematics and Computation，2011，217：6526-6540.

[11] 魏飞，李威，陈明. 构造一类具有 Silnikov 鞍焦同宿轨的动力系统[J]. 北京化工大学学报(自然科学版)，2011，38(1)：140-143.
WEI Fei，LI Wei，CHEN Ming. Constrction of dynamic system having Silnikov's saddle-focus homoclinic orbit[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology(Natural Science)，2011，38(1)：140-143.

[12] 朱道宇. 一类特殊三维混沌系统的退化 Hopf 分岔[J]. 湖北民族学院学报(自然科学版)，2014，32(1)：75-77.
ZHU Daoyu. Degenerate Hopf bifurcation in a special 3D chaotic system[J]. Journal of Hubei University for Nationalities(Natural Science Edition)，2014，32(1)：75-77.

[13] 张娟. 一类三维混沌系统的音叉分岔分析[J]. 河南科学，2015，33(4)：509-511.
ZHANG Juan. The pitchfork bifucation analysis of 3D chaotic system[J]. Henan Science，2015，33(4)：509-511.

[14] ALGEBA A，DOMINGUEZ M，MERINO M，et al. Takens-Bogdanov bifurcations of equilibria and periodic orbits in the Lorenz system [J]. Commun Nonlinear Sci Number Simulat，2016，30：328-343.

[15] HE Qiong，XIONG Haiyun. Shilnikv chaos and Hopf bifurcation in three-dimensional differential system[J]. Optik International Journal for Light and Electron Optics,2016，127(19)：7468-7655.

[16] ELSONBATY A，ELSADANY A. Bifurcation analysis of chaotic geomagnetic field model[J]. Chaos，Solitons & Fractals，2017，103：325-335.

[17] ALGABA A,FEMANDEE-SANCHEEF，MERINO M，et al. Comments on "Shilnikv chaos and Hopf bifurcation in three-dimensional differential system"[J]. Optik International Journal for Light and Electron Optics，2018，155：251-256.

[18] WANG Haijun，LI Xianyi. A novel hyperchaotic system with infinitely many heteroclinic orbits coined[J]. Chaos，Solitons & Fractals，2018，106：5-15.

[19] FRIEIRE E，GARMERO E，ALGABA A，et al. A note on the triple zero linear degeneracy：Normal forms，dynamical and bifurcation behaviors of an unfolding[J]. International Journal of Bifurcations and Chaos，2002，12(12)：2799-2820.

[20] KUZNETSOV Y. Elements of Applied Bifurcation Theory[M]. New York：Spring-Verlag，1998.