

类方形蜂窝夹芯结构力学性能研究

童冠¹, 李响^{2,3}, 梅月媛³, 周幼辉³

(1. 福建省送变电工程有限公司, 福建福州 350013; 2. 三峡大学水电机械设备设计与维护湖北省重点实验室, 湖北宜昌 443002; 3. 三峡大学机械与动力学院, 湖北宜昌 443002)

摘要:为了证明类方形蜂窝结构与六边形蜂窝结构之间的关系, 将类方形蜂窝夹芯结构分解为特有的 T 字形胞元, 应用 Euler 梁原理和能量法分别推导了 T 字形胞元模型的等效弹性常数公式。同时, 在用经典方法推导的六边形蜂窝夹芯的等效弹性常数公式中, 代入了类方形蜂窝结构的特征参数, 得到了与前述 2 种方法相同的结果, 证明了类方形蜂窝是六边形蜂窝的演变体, 指出了这 2 个经典蜂窝公式存在的局限性和应用范围, 由类方形蜂窝的结构特征, 发现经典蜂窝理论公式在特征角等于零或零附近的值是奇异和不准确的。研究结果对蜂窝结构力学性能相关理论的后续研究和完善有着重要的参考价值。

关键词:结构力学; 夹层结构; 类方形蜂窝; 能量法; 等效弹性常数; 力学性能

中图分类号: TB333 文献标志码: A

Mechanic properties analysis of quasi-square honeycomb sandwich structure's core

TONG Guan¹, LI Xiang^{2,3}, MEI Yueyuan³, ZHOU Youhui³

(1. Fujian Electric Power Transmission & Transformation Engineering Company Limited, Fuzhou, Fujian 350013, China; 2. Hubei Key Laboratory of Hydroelectric Machinery Design & Maintenance, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China; 3. College of Mechanical and Power Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China)

Abstract: In order to illustrate the relationship between the quasi-square-honeycomb structure and the hexagonal honeycomb structure, after decomposing the quasi-square honeycomb sandwich structure into unique T-shaped cell, the equivalent elastic constants equations of T-shaped cell model are derived respectively by applying Euler beam theory and energy method. At the same time, the quasi-square honeycomb's characteristic structure parameters are substituted into the equivalent elastic constants equations which are derived by the classical method of a hexagonal honeycomb core, and the same results are obtained as that of the preceding both methods. It is proved that the quasi-square-honeycomb structure is an evolution of hexagonal honeycomb. The limitations and application scope of the two classical honeycomb formulas are pointed out. The research of the structural characteristics of the square-shaped honeycomb shows that the classical cellular theoretical formula are singular and inaccurate

收稿日期: 2017-05-31; 修回日期: 2017-09-17; 责任编辑: 张士莹

基金项目: 国家自然科学基金(51305232)

第一作者简介: 童冠(1990—), 男, 湖北黄冈人, 硕士, 主要从事结构轻量化设计方面的研究。

通信作者: 李响副教授。E-mail: lixiangcfy@163.com

童冠, 李响, 梅月媛, 等. 类方形蜂窝夹芯结构力学性能研究[J]. 河北科技大学学报, 2017, 38(6): 522-529.

TONG Guan, LI Xiang, MEI Yueyuan, et al. Mechanic properties analysis of quasi-square honeycomb sandwich structure's core[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2017, 38(6): 522-529.

when the feature angle values equal to zero or near zero. This study has important reference value for the subsequent research and improvement of the theories about cellular structure mechanical properties.

Keywords: structural mechanics; sandwich structure; quasi-square honeycomb; energy method; equivalent elastic constant; mechanical property

夹层结构是由 2 块高强度的薄表层板和填充在中间的夹芯层组成的,中间使用新型黏结剂黏结而成^[1-2]。表层一般采用金属、玻璃钢、高硬度轻质材料等,而夹芯一般是用泡沫塑料、铝或不锈钢波片、波纹金属钢等制成的蜂窝,其中以铝质正六边形蜂窝的应用最为常见。近年来出现了很多新的蜂窝结构型式,进一步扩大了蜂窝的结构体系和应用范围^[3-9]。

研究夹芯面内力学性能的代表人物主要有 GIBSON^[10-12],BURTON^[13]和富明慧^[14-15]等,他们采用简化的线弹性 Bemoulli-Euler 梁模型,推导了蜂窝结构的多个等效弹性参数的解析式,在此基础上展开后续的研究工作,增加考虑弯曲变形、伸缩变形和剪切变形对面内等效刚度的影响,不断对 GIBSON 公式进行修正。这其中,WARREN 等^[16]发现胞元周期性重复排列是蜂窝结构的重要特点,于是选取其中代表性的简化胞元进行了分析,创立了此类结构研究方法的一个新范式。

到目前为止,国内外有关蜂窝结构的等效弹性模量参数研究工作大部分都是在胞元理论上展开的。本文分别运用 Euler 梁原理、能量法和经典蜂窝理论,针对类方形蜂窝结构进行深入研究。研究中涉及的主要符号说明见表 1。

表 1 主要符号说明

Tab.1 Main symbols

符号	h/mm	l/mm	t/mm	E_{cx}/MPa	E_{cy}/MPa	G_{cxy}/MPa	E_s/MPa	$\rho_c/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
含义	类方形蜂窝胞元长度	类方形蜂窝胞元宽度	类方形蜂窝胞元壁厚	夹芯层 X 方向等效弹性模量	夹芯层 Y 方向等效弹性模量	夹芯层的等效剪切模量	制造蜂窝材料的弹性模量	夹芯结构等效模型的密度
符号	μ	$W/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$M/(\text{N} \cdot \text{m})$	$\sigma(\tau)/\text{MPa}$	$\epsilon(\gamma)/\text{MPa}$	δ/mm	I/m^4	
含义	泊松比	单位面积质量	弯矩	正应力 (剪应力)	正应变 (剪应变)	微小变形量 (挠度)	夹层结构等效截面惯性矩	

1 基于 T 模型求解等效力学常数

类方形蜂窝结构如图 1 所示,其由许多正方形的蜂窝孔组成。使用胞元分解原理^[16],根据类方形蜂窝胞元周期性重复排列的特点,选取 T 型胞元模型进行力学分析,见图 2。

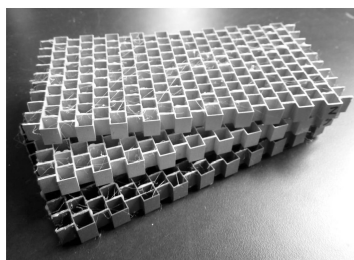


图 1 类方形蜂窝结构

Fig.1 Quasi-square honeycomb structure

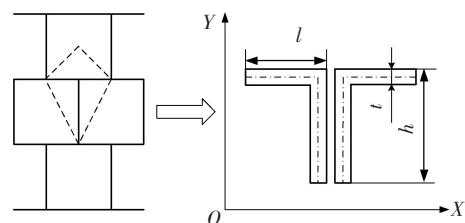


图 2 类方形蜂窝胞元结构及尺寸

Fig.1 Quasi-square honeycomb core's structure and size

等效力学参数求解采用等效模型与胞元模型相等的原理。首先,使蜂窝胞元模型处于单向受力状态,推导对应于该状态的应力应变变量;然后建立等效模型,将蜂窝夹芯层等效为均质实体,保持受力状态不变,进行应力应变变量求解。由于等效模型结构与原胞元模型结构等价,因而在同样受力状态下 2 种模型的应力应变变量相等,由此建立方程求解,得到夹芯结构的等效力学性能参数。表征蜂窝夹芯结构整体力学性能的 3 个等效力学性能参数分别是蜂窝夹芯结构面内等效弹性模量 E_{cx} , E_{cy} 和面内剪切模量 G_{cxy} 。

如图2所示,虚线所包围的四边形即为类方形蜂窝夹芯胞元,本文称之为“T模型”,其几何要素分别为胞元长 h 、宽 l 、壁厚 t 。T型胞元结构有如下特点:1)T型的长宽所在矩形面积等于类方形蜂窝孔的面积;2)每个T型单元有3个完整胞壁,而单独属于每个类方形蜂窝的完整胞壁也是3个。

1.1 类方形蜂窝 x 方向等效弹性模量

T型胞元在 x 方向上的受力图如图3所示,其等效体为虚线所围成的矩形,取厚度 $t=b$ 的类方形蜂窝胞元进行研究。

当T型蜂窝胞元受 x 向的单向应力时,如图3所示为拉力的等效模型,则有 $P_x = \sigma_x bh$ 。由于在A点处的转角为零,则有力矩 $M=0$ 。所以,在 P_x 力的作用下

AB, BC 杆轴向伸长量 $\delta_{AB} = \delta_{BC} = \frac{P_x l}{E_s b t}$ 。等效体结构在

x, y 方向的等效应变 $\epsilon_1 = \frac{\delta_{AB}}{l}, \epsilon_2 = 0$,则可得 x 方向的

泊松比和弹性模量 $\mu_1 = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{0}{\delta_{AB}/l} = 0$,所以:

$$E_{cx} = \frac{\sigma_x}{\epsilon_1} = \frac{P_x/(bh)}{P_x l/(E_s b t)} = \frac{E_s t}{h} \tag{1}$$

1.2 类方形蜂窝 y 方向等效弹性模量

当T型蜂窝胞元受 y 方向的单向应力时,如图4所示为拉力的等效模型,则 $W = \sigma_y lb$ 。由力的平衡定理^[17]得: $M = \frac{Wl}{2}$ 。由力与弯矩引起 AB 的挠度 $\delta_{AB1} =$

$\frac{Wl^3}{3E_s I} - \frac{Ml^2}{2E_s I} = \frac{Wl^3}{12E_s I}$,由其中 $I = \frac{bt^3}{12}$,得到 $\delta_{AB1} =$

$\frac{Wl^3}{E_s bt^3}$,由力与弯矩引起 AB 杆轴向的伸长量 $\delta_{AB2} = 0$ 。

同理,可求得杆 BC 的挠度和伸长量分别为 $\delta_{BC1} = \frac{Wl^3}{E_s bt^3}, \delta_{BC2} = 0$ 。此外,在相应力的作用下,杆 BD 的伸长

量 $\delta_{BD} = \frac{Wh}{E_s bt}$ 。

综上可求得等效体在 x 方向上等效应变: $\epsilon_1 = \frac{\delta_{AB2} + \delta_{BC2}}{l} = 0$,

在 y 方向等效应变: $\epsilon_2 = \frac{\delta_{AB1} + \delta_{BD}}{h} = \frac{Wl^3}{E_s bht^3} + \frac{Wh}{E_s bh(2t)}$ 。

所以,等效泊松比 $\mu_2 = 0$,等效体在 y 方向的等效弹性模量为

$$E_{cy} = \frac{\sigma_y}{\epsilon_2} = \frac{W/(lb)}{\frac{Wl^3}{E_s bht^3} + \frac{Wh}{E_s bh(2t)}} = \frac{E_s ht^3}{l^4 + hlt^2} \tag{2}$$

1.3 类方形蜂窝等效剪切模量

根据分析,计算模型的受力状态不仅要满足胞元平衡,而且要满足整个芯子平衡,即各节点平衡,图5所示为受剪力的等效模型图。在模型建立时,假设 A, B, C 节点没有相对位移,同时各节点转过的角度是相等的,剪切变形是由 BD 绕 B 点的转动和 BD 的弯曲形成的。

将整个结构对 B 点取矩,由 $M_B = 0$ 得 $Fh = 2Nl$,则 $N = \frac{Fh}{2l}$ 。由等效结构中的等效体剪应力互等定理

可得 $\tau = \frac{F}{2bl} = \frac{N}{bh}$ 。同样可得 $N = \frac{Fh}{2l}$ 。由 AB 胞壁对 B 点取矩且 $\sum M_B = 0$,得到 $M = \frac{Fh}{4}$ 。

T型胞元变形及端点 D 的位移见图6。如图6所示, AB 胞壁可看成 A 点和 B 点简支,在 A 点和 B 点均

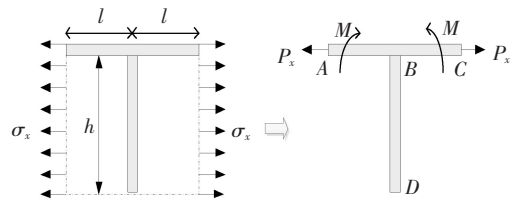


图3 T模型 x 方向单向受力图
Fig.3 Unidirectional force of T model at x direction

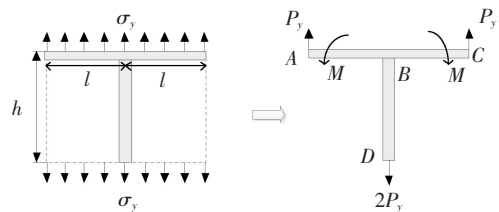


图4 T模型 y 方向单向受力图
Fig.4 Unidirectional force of T model at y direction

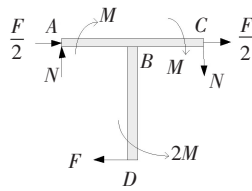


图 5 T 型胞元受剪切时受力分析图

Fig.5 Force analysis chart of T cell under shear force

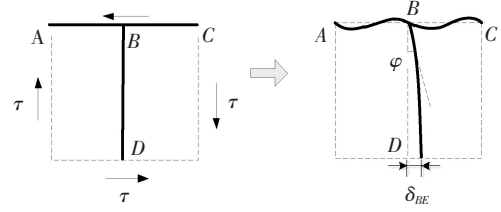
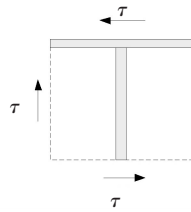


图 6 T 型胞元变形及端点 D 的位移

Fig.6 T cell's deformation and the displacement of point D

有弯矩 M , 则此时可由 AB 杆受力情况得到在 B 点产生的逆时针转角:

$$\varphi = \frac{M_A l}{3E_s I} - \frac{M_B l}{6E_s I} = \frac{Ml}{6E_s I} = \frac{Fhl}{24E_s I}。$$

同理, 可计算 BC 胞壁的情况, 由于 AB, BC 胞壁的变形引起 B 点逆时针转角 $\varphi = \frac{Fhl}{24E_s I}。$

假设剪切变形 μ_{BD} 是由胞壁 BD 绕 B 点的转动和 BD 本身的弯曲形成的, 则 $\mu_{BD} = \varphi + \delta_{BD}$, 其中

$$\delta_{BD} = \frac{Fh^3}{3E_s I_1} - 2M \frac{h^2}{2E_s I_1} = \frac{Fh^3}{12E_s I_1}, \text{ 得 } \mu_{BD} = \frac{Fh^2 l}{24E_s I} + \frac{Fh^3}{12E_s I_1}。$$

式中: AB, BC 为单壁厚, $I = \frac{bt^3}{12}$; BD 为双壁厚, $I_1 = \frac{8bt^3}{12}$ 。于是得 $\mu_{BD} = \frac{F(4l+h)h^2}{8E_s bt^3}$, 剪应变 $\gamma_{xy} =$

$$\frac{\mu_{BD}}{h} = \frac{F(4l+h)h}{8E_s bt^3}。 \text{ 又有 } \tau = \frac{F}{2bl}, \text{ 于是剪变应力 } G_{cxy} = \frac{\tau}{\gamma_{xy}} = \frac{4E_s t^3}{(4l+h)hl}, \text{ 即}$$

$$G_{cxy} = \frac{4E_s t^3}{(4l+h)hl}。 \tag{3}$$

综合式(1)一式(3), 对于类方形蜂窝结构有 $h = 2l$, 得到利用 Euler 梁原理推导的类方形蜂窝夹层结构的等效力学常数为

$$\begin{cases} E_{cx} = \frac{E_s t}{2l}, \\ E_{cy} = \frac{2E_s t^3}{t^3 + 2lt^2}, \\ G_{cxy} = \frac{E_s t^3}{3l^3}。 \end{cases} \tag{4}$$

2 基于能量法求解等效力学常数

同样, 将类方形蜂窝夹芯结构分解为 T 型胞元结构, 定义相同的尺寸要素, 使用能量法原理, 通过等效模型建立方程, 推导具有类方形蜂窝夹芯结构特征参数的等效力学常数。

2.1 类方形蜂窝 x 方向等效弹性模量

类方形蜂窝胞元在 x 方向上的受力示意图如图 3 所示, 将虚线所围成的矩形作为等效体, 取厚度为 b 的类方形蜂窝胞元结构进行研究。由材料力学知识可知 $P_x = \sigma_x hb$, 对 B 点取矩, 即 $\sum M(B)$, 可得 $M = 0$ 。等效体的应变能为 $\bar{U}_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{P_{ni}^2 L_i}{E_i A_i} = \frac{\sigma_x^2 hbl}{E_{cx}} = \frac{\sigma_x^2}{2E_{cx}} V$, 类方形蜂窝胞元的变形能由 AB, BC, BD 组成, 对于

AB 胞壁的轴向拉伸变形能为 $U_{AB1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{P_{ni}^2 L_i}{E_i A_i} = \frac{1}{2} \frac{P_x^2 l}{E_s bt}$ 。而 BC 胞壁的弯曲变形能与 AB 胞壁相同,

$U_{BC1} = \frac{1}{2} \frac{P_x^2 l}{E_s bt}$, BD 胞壁的弯曲变形能为 $U_{BD} = 0$ 。那么 T 型胞元结构轴向的总应变能为 $U_1 = U_{AB1} + U_{BC1} =$

$$\frac{P_x^2 l}{E_s b t}。$$

综合上述结果,由 $\bar{U}_x = U_1$, 得到

$$E_{cx} = \frac{E_s t}{h}。 \quad (5)$$

2.2 类方形蜂窝 y 方向等效弹性模量

类方形蜂窝夹芯结构在 y 方向上的受力图如图 4 所示,其等效体为虚线所围成的矩形,取厚度为 b 的类方形蜂窝胞元结构作为研究对象。由材料力学知识可得 $P_y = \sigma_y b l$ 。对 B 点取矩,即 $\sum M(B)$,可得 $M = \frac{P_y l}{2}$ 。其等效体的应变能为 $\bar{U}_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{P_{yi}^2 l_i}{E_i A_i} dx = \frac{\sigma_y^2}{2E_{cy}} V$, T 型胞元实际的应变能由 AB, BC, BD 组成。AB 胞壁其弯曲应变能为 $U_{AB2} = \int_0^l \frac{(P_y x - M)^2}{2E_s I} dx = \frac{\sigma_y^2 b l^5}{2E_s t^3}$ 。BC 胞壁弯曲应变能与 AB 胞壁相同, $U_{BC2} = \frac{\sigma_y^2 b l^5}{2E_s t^3}$, 式中 $I = \frac{b t^3}{12}$; BD 胞壁轴向应变能为 $U_{BD2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{4P_y^2 h_i}{E_i A_i} = \frac{2\sigma_y^2 l^2 h b}{E_s t}$ 。所以,实际的应变能为

$$U_2 = U_{AB2} + U_{BC2} + U_{BD2} = \frac{\sigma_y^2 b l^5}{E_s t^3} + \frac{2\sigma_y^2 l^2 h b}{E_s (2t)}。$$

T 型胞元实际的应变能与等效体应变能相等。故由 $\bar{U}_y = U_2$, 得 $\frac{\sigma_y^2}{2E_{cy}} V = \frac{\sigma_y^2 b l^5}{E_s t^3} + \frac{2\sigma_y^2 l^2 h b}{E_s (2t)}$, 求解得:

$$E_{cy} = \frac{E_s h t^3}{l(l^3 + h t^2)}。 \quad (6)$$

2.3 类方形蜂窝等效剪切模量

通过分析,所计算模型的受力状态既要满足类方形蜂窝胞元结构的平衡,同时也要满足整个宏观尺度下夹芯结构的平衡,即每一个节点的平衡,等效模型的受力情况如图 5 所示。

整个 T 型胞元结构对 B 点取矩,即 $\sum M(B) = 0$, 得 $Fh = 2Nl$, 则可得 $N = \frac{Fh}{2l}$ 。由等效结构中的等效单元体剪应力互等定理,可得 $\tau = \frac{F}{2bl} = \frac{N}{bh}$ 。由 AB 受力分析单元壁板,对 B 点取矩,即 $\sum M(B) = 0$, 得 $M = \frac{Fh}{4}$ 。假设 V 为 T 型胞元等效体体积,则 $V = 2lhb$, 等效单元体的变形能为 $\bar{U}_z = \frac{\tau^2 V}{2G_{xy}}$ 。

T 型胞元变形及端点 D 的位移如图 6 所示。由图 6 的受力关系可以求得 AB 的弯曲应变能为 $U_{AB3} = \int_0^l \frac{(-Nx + M)^2}{2E_s I} dx = \frac{F^2 h^2 l}{8E_s b t^3}$, BC 的弯曲应变能为 $U_{BC3} = \int_0^l \frac{(-Nx + M)^2}{2E_s I} dx = \frac{F^2 h^2 l}{8E_s b t^3}$, BD 的弯曲应变能为 $U_{BD3} = \int_0^h \frac{(Fx - 2M)^2}{2E_s I'} dx = \frac{F^2 h^3}{16E_s b t^3}$ 。式中:AB, BC 为单壁厚, $I = \frac{b t^3}{12}$, BD 为双壁厚, $I' = \frac{b(2t)^3}{12} = \frac{2}{3} b t^3$ 。所以, T 型胞元的弯曲变形能为 $U_3 = U_{AB3} + U_{BC3} + U_{BD3} = \frac{F^2 h^2}{16E_s b t^3} (h + 4l)$ 。

而 AB 的轴向伸长应变能为 $U_{AB4} = \frac{(F/2)^2 l}{2E_s A}$, BC 的轴向伸长应变能与 AB 相等, $U_{BC4} = \frac{(F/2)^2 l}{2E_s A}$, 式中 A 为胞元截面积, $A = bt$; BD 的轴向伸长应变能为零, $U_{BD4} = 0$ 。所以, T 型胞元的轴向变形能为 $U_4 = U_{AB4} + U_{BC4} + U_{BD4} = \frac{F^2 l}{4E_s b t}$ 。

由等效体的总变形能与 T 型胞元的弯曲变形能和轴向变形能之和相等,即得 $\bar{U}_z = U_3 + U_4$, 求得剪切模量为 $G_{cxy} = \frac{4E_s h t^3}{4h^2 l^2 + h^3 l + 4l^2 t^2}$ 。将 G_{cxy} 进一步化简得到:

$$G_{cxy} = \frac{8E_s l t^3}{24l^4 + 4l^2 t^2} = \frac{E_s (t/s)^3}{3 + 1/2(t/l)^2}。 \quad (7)$$

综合式(5)一(7),对于类方形蜂窝结构有 $h = 2l$, 得到利用能量法推导的类方形蜂窝夹芯结构的等效

弹性常数为

$$\begin{cases} E_{cx} = \frac{E_s t}{2l}, \\ E_{cy} = \frac{2E_s t^3}{l^3 + 2lt^2}, \\ G_{cxy} = \frac{E_s lt^3}{3 + 1/2(t/l)^2} \end{cases} \quad (8)$$

对比式(4)、式(8)可知,2种方法推导得到的等效弹性模量 E_{cx} 和 E_{cy} 结果完全相同,而剪切模量 G_{cxy} 整体值近似,但在分母中多出了关于 t/l 的一个二次项。实际上,类方形蜂窝的胞元壁厚 t 远远小于胞壁壁长 l ,所以式(4)中的 G_{cxy} 可认为是式(8)中 $3 + 1/2(t/l)^2 \approx 3$ 的结果。

综上所述,能量法求解得到类方形蜂窝夹芯等效力学常数的结果与用 Euler 梁原理求解的结果是一致的,这 2 种方法在理论上可以互为验证,从而保证结果的准确性。

3 类方形蜂窝与六边形蜂窝的关系

各种蜂窝夹芯形式中,传统的正六边形蜂窝用料省、制造简单、结构效率最高,从而被广泛应用于航空、包装、军事、建筑、交通等领域。正六边形蜂窝结构的力学性能、声学特性、抗震能力也是学者研究的热点^[19-22] 正六边形蜂窝和类方形蜂窝见图 7。作为最早研究蜂窝结构的学者,GIBSON 等^[12] 系统地提出了胞元材料理论,在分析时将蜂窝夹芯层结构简化为线弹性 Bernoulli-Euler 梁,忽略了胞壁在方向和向厚度的不一致性,采用固体力学理论推导出解析式。尽管该方法会给理论研究带来一定的误差,但是目前有关蜂窝夹芯结构的等效力学常数的研究工作绝大部分都是在此基础上展开的。

GIBSON 推导出的蜂窝夹芯结构等效力学常数被人们称为 GIBSON 公式,其是研究蜂窝夹芯结构力学性能的经典理论公式。在此基础上,根据结构特点,BURTON 等^[13] 给出修正后的双壁厚六边形蜂窝的 GIBSON 公式:

$$\begin{aligned} E_{cx} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{\cos \theta}{(\beta + \sin \theta) \sin^2 \theta}, \\ E_{cy} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{(\beta + \sin \theta)}{\cos \theta}, \\ E_{cxy} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{(\beta + \sin \theta)}{\beta^2 (\beta/4 + 1) \cos \theta} \end{aligned} \quad (9)$$

式中设定值: $\beta = h/l$,如图 8 所示, h 为直边的长度, l 为斜边的长度, t 为胞元壁板的厚度, E_s 为制作蜂窝材料的弹性模量, θ 为直边与斜边的夹角。

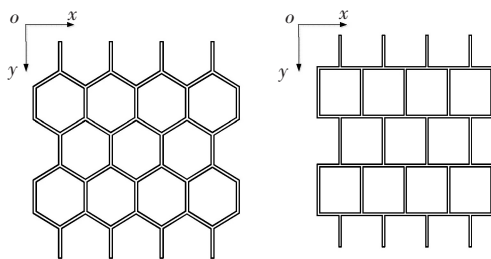


图 7 正六边形蜂窝和类方形蜂窝

Fig.7 Hexagonal honeycomb and quasi-square honeycomb

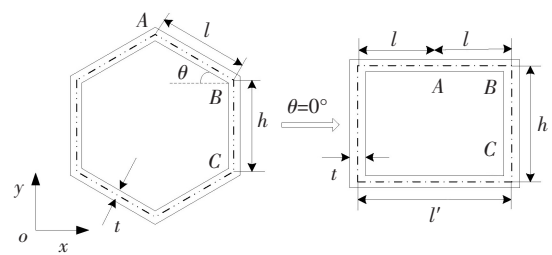


图 8 六边形蜂窝胞元演变成类方形蜂窝胞元

Fig.8 Hexagonal honeycomb cell evolve into quasi-square honeycomb cell

虽然反映蜂窝材料等效弹性参数的 GIBSON 公式结果简单,便于应用,但由于对应于蜂窝壁板伸缩变形的刚度被忽略,导致对蜂窝夹层结构数值进行分析时芯层材料的弹性矩阵表现出不确定性。富明慧等^[14] 重新考虑了蜂窝壁板的伸缩变形对面内刚度的影响,对 GIBSON 公式进行了修正,得到了富明慧公式:

$$\begin{aligned}
 E_{cx} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{\cos \theta}{(\beta + \sin \theta) \sin^2 \theta} (1 - \cot^2 \theta t^2/l^2), \\
 E_{cy} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{(\beta + \sin \theta)}{\cos \theta} [1 - (\beta \sec^2 \theta + \tan^2 \theta) t^2/l^2], \\
 E_{cxy} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{(\beta + \sin \theta)}{\beta^2 (\beta/4 + 1) \cos \theta}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

在经典蜂窝理论公式(9)和公式(10)中,蜂窝特征角 θ 、相邻边长比 β 是反应蜂窝结构形状特征的变量,其取值是根据蜂窝结构形状确定的,如正六边形蜂窝, $\theta=60^\circ, \beta=1$ 。经过比较(见图8)发现,当蜂窝夹芯的特征角 $\theta=0^\circ$ 、相邻边长比 $\beta=2$ 时,蜂窝夹芯可演变成类方形蜂窝夹芯。由此可认为类方形蜂窝夹芯结构是蜂窝夹芯结构的特征参数变化时的一种特殊结构,包含在蜂窝结构体系中,是蜂窝结构的一种演变体。

因此,经典蜂窝结构的理论研究成果可以直接应用到类方形蜂窝结构的研究中。然而研究发现,把类方形蜂窝夹芯结构特征参数($\theta=0^\circ, \beta=2$)直接代入到经典蜂窝理论公式(9)和公式(10)中,会出现等效弹性常数为零或者无穷大的奇异值,这明显是不合理的。

为了应用蜂窝夹芯的等效力学常数公式,直接求解类方形蜂窝夹芯的等效力学常数,将式(10)中的 E_{cx} 和 E_{cy} 作进一步的等价变换,得到:

$$\begin{aligned}
 E_{cx} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{\cos \theta}{(\beta + \sin \theta) \sin^2 \theta} \frac{1 - \frac{\cos^4 \theta}{\sin^4 \theta} \left(\frac{t}{l}\right)^4}{1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \left(\frac{t}{l}\right)^2}, \\
 E_{cy} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{\cos \theta}{(\beta + \sin \theta)} \frac{\left[1 - \left(\frac{\beta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) t^4/l^4\right]}{\left[1 + (\beta \sec^2 \theta + \tan^2 \theta) t^2/l^2\right]}.
 \end{aligned}$$

由实际结构中 $t \ll l$,所以 $1 - \frac{\cos^4 \theta}{\sin^4 \theta} \left(\frac{t}{l}\right)^4 \approx 1, 1 - \left(\frac{\beta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) t^4/l^4 \approx 1$ 。于是得到了经典蜂窝理论公式的另一种形式:

$$\begin{aligned}
 E_{cx} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{\cos \theta}{(\beta + \sin \theta)} \frac{1}{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta t^2/l^2)}, \\
 E_{cy} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{(\beta + \sin \theta)}{\cos^3 \theta} \frac{1}{[1 + (\beta \sec^2 \theta + \tan^2 \theta) t^2/l^2]}, \\
 E_{cxy} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{(\beta + \sin \theta)}{\beta^2 (\beta/4 + 1) \cos \theta}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

对于类方形蜂窝夹芯结构,有 $\theta=0^\circ, \beta=2$,将其代入式(11)中,得到:

$$\begin{aligned}
 E_{cx} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{\cos \theta}{(\beta + \sin \theta)} \frac{1}{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta t^2/l^2)} = \frac{E_s t}{2l}, \\
 E_{cy} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{(\beta + \sin \theta)}{\cos^3 \theta} \frac{1}{[1 + (\beta \sec^2 \theta + \tan^2 \theta) t^2/l^2]} = \frac{2E_s t^3}{l^3 + 2lt^2}, \\
 E_{cxy} &= E_s \frac{t^3}{l^3} \frac{(\beta + \sin \theta)}{\beta^2 (\beta/4 + 1) \cos \theta} = \frac{E_s t^3}{3l^3}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

式(12)与式(4)、式(8)的结果相同,所以根据经典蜂窝力学理论公式也推理得到了类方形蜂窝夹芯结构的等效力学常数,进一步从理论上证明了类方形蜂窝结构是蜂窝结构的演变体,其与正六边形蜂窝等结构的属性相似。

类方形蜂窝结构具有一个显著特征就是蜂窝特征角 $\theta=0^\circ$ 。根据 Euler 梁方法和能量法推导的结果可知,类方形蜂窝结构等效力学常数存在合理的准确值。而 GIBSON 公式、富明慧公式在蜂窝特征角 $\theta=0^\circ$ 处的值是奇异的。由于类方形蜂窝结构是一个连续的物理实体,其弹性模量 $E_{cx}(\theta)$ 和 $E_{cy}(\theta)$ 均是关于 θ 的连续函数,所以2个经典蜂窝公式在特征角等于零附近的值都是奇异和不准确的,这说明经典蜂窝理论公式有自己的应用范围和局限性。

3 结 语

应用 Euler 梁方法、能量法和经典蜂窝力学理论公式,分别求解了类方形蜂窝结构的3个重要力学性能

参数。Euler 梁方法、能量法的求解结果均与经典蜂窝力学理论公式的求解结果相同,说明类方形蜂窝结构是六边形蜂窝结构的演变体,它与六边形蜂窝结构的属性相似。本文同时发现,GIBSON 公式、富明慧公式在蜂窝特征角等于零及零附近的值为零或无穷大,这种奇异和不准确的现象与实际情况不符,指出这 2 个经典蜂窝公式存在局限性和应用范围。

本文的不足之处是偏重于对类方形蜂窝结构力学性能的理论研究,因此需要用实验进一步验证和完善。未来的研究方向是类比经典六边形蜂窝结构,需继续探究类方形蜂窝结构在扭转、剪切等受力状态下的承载性能,以及其屈曲、失稳等变形过程。

参考文献/References:

- [1] 程文礼,袁超,邱启艳,等. 航空用蜂窝夹层结构及制造工艺[J]. 航空制造技术,2015(7): 94-98.
CHEN Wenli, YUAN Chao, QIU Qiyan, et al. Honeycomb sandwich structure and manufacturing process in aviation industry [J]. *Aeronautical Manufacturing Technology*, 2015(7):94-98.
- [2] 杜正兴,薛应举,刘洪权. 复合材料蜂窝夹层结构的总体稳定性研究[J]. 强度与环境,2014,41(4):
DU Zhengxing, XUE Yingju, LIU Hongquan. General stability research of honeycomb sandwich structure[J]. *Structure & Environment Engineering*, 2014, 41(4).
- [3] 刘均. 方形蜂窝夹层结构振动与冲击响应分析[D]. 武汉:华中科技大学,2009.
LI Jun. Analysis of Vibration and Shock Response of Sandwich Structures with Square Honeycomb Core[D]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology, 2009.
- [4] 刘均,程远胜. 考虑芯层离散特性的方形蜂窝夹层板自由振动分析[J]. 固体力学学报,2009,30(1): 90-94.
LIU Jun, CHENG Yuansheng. Free vibration analysis of square-honeycomb sandwich plates considering discrete characteristic of the core [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2009, 30(1): 90-94.
- [5] 刘敏,韩宝坤,鲍怀谦,等. 蜂窝晶胞角度对芯层材料力学性能的影响[J]. 声学技术,2014,33(4): 65-68.
LIU Min, HAN Baokun, BAO Huaqian, et al. Effect of cell angles on material mechanical properties of honeycomb core [J]. *Technical Acoustics*, 2014, 33(4): 65-68.
- [6] 李响,周幼辉,童冠,等. 超轻多孔类蜂窝夹心结构创新构型及其力学性能[J]. 西安交通大学学报,2014,48(9): 88-94.
LI Xiang, ZHOU Youhui, TONG Guan, et al. Innovating configuration and mechanical properties of the core for ultralight and porous quasi-honeycomb sandwich structure[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2014, 48(9): 88-94.
- [7] 李响,周幼辉,童冠. 一种类方形蜂窝夹层结构[P]. 中国专利:ZL201520147878.8, 2015-03-16.
- [8] 李响,周幼辉,童冠. 类蜂窝结构的共面冲击特性研究[J]. 西安交通大学学报,2017,51(3):80-86.
LI Xiang, ZHOU Youhui, TONG Guan. Study on in-plane impact characteristics of quasi-honeycomb structure [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2017, 51(3): 80-86.
- [9] 李响,童冠,周幼辉. 超轻多孔“类蜂窝”夹层结构材料设计方法研究综述[J]. 河北科技大学学报,2015,36(1):16-22.
LI Xiang, Tong Guan, ZHOU Youhui. Overview of design method of class-honeycomb sandwich structure[J]. *Journal of Hebei University of Science and Technology*, 2015, 36(1): 16-22.
- [10] GIBSON L J. Modelling the mechanical behavior of cellular material [J]. *Master Science and Engineering*, 1989, A110:1-36.
- [11] GIBSON L J, ASHBY M F, SCHAJER G S. The mechanics of two dimension cellular materials [J]. *Proceeding of the Royal Society*, 1982, 382(1782):25.
- [12] GIBSON L J, ASHBY M F. *Cellular Solids: Structure and Properties*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [13] BURTON W, NOOR A K. Assessment of continuum models for sandwich panel honeycomb cores [J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1997, 145(3/4):341-360.
- [14] 富明慧,尹久仁. 蜂窝芯层的等效弹性参数[J]. 力学学报,1999,31(1):113-118.
FU Minghui, YIN Jiuren. Equivalent elastic parameters of the honeycomb core [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 31(1): 113-118.
- [15] 富明慧,徐腾,陈誉. 蜂窝芯层的等效参数研究综述[J]. 材料导报,2015,29(3):127-134.
FU Minghui, XU Ou'teng, CHEN Yu. An overview of equivalent parameters of honeycomb cores [J]. *Journal of Materials Research*, 2015, 29(3): 127-134.
- [16] WARREN W E, KRAYNIK A M. Foam mechanics: The linear elastic response of two-dimensional spatially periodic cellular materials [J]. *Mechanics of Materials*, 1987, 6:27-37.
- [17] 蔡四维. 复合材料结构力学[M]. 北京:人民交通出版社,1987.
- [18] 中国科学院力学研究所. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动[M]. 北京:科学出版社,1977.
- [19] WANG Shengchun, DENG Zhaoxiang, SHEN Weidong. Sound transmission loss characteristics of unbounded orthotropic sandwich panels in bending vibration considering transverse shear deformation [J]. *Composite Structures*, 2010, 92: 2885-2889.
- [20] 孙德强,张卫红. 双壁厚蜂窝铝芯的共面冲击力学性能[J]. 振动与冲击,2008,27(7):69-74.
SUN Deqiang, ZHANG Weihong. In-plane impact properties of aluminum double-walled honeycomb cores [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(7): 69-74.
- [21] 韩啸,金勇,杨鹏. 结构胶接接头湿热环境耐久性研究概述[J]. 河北科技大学学报,2017,38(3):209-217.
HAN Xiao, JIN Yong, YANG Peng. Review of research on the hygrothermal environmental durability of structural adhesively bonded joints [J]. *Journal of Hebei University of Science and Technology*, 2017, 38(3): 209-217.
- [22] HADICKE E, RIEGER J, RAU I U, et al. Molecular dynamics simulations of the incrustation inhibition by polymeric additives[J]. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 1999, 1(17): 3891-3898.