第 37 卷第 6 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 37, No. 6
2016 年 12 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Dec. 2016

文章编号:1008-1542(2016)06-0575-06　　doi:10.7535/hbkd.2016yx06008

一类 Caputo 分数阶微分方程正解的存在性

李云红[1],吕文静[2]

(1.河北科技大学理学院,河北石家庄　050018;2.河北科技大学总务处,河北石家庄　050018)

摘　要:为了研究一类带 p-Laplacian 算子的 Caputo 分数阶微分方程边值问题正解的存在性,通过计算得到该问题的格林函数,并讨论其性质。运用单调迭代方法,得到该边值问题至少存在 2 个正解,最后通过实例验证了此类方程边值问题正解的存在性。

关键词:常微分方程其他学科;Caputo 分数阶微分;正解;单调迭代方法;边值问题

中图分类号:O175.1　　**MSC(2010)主题分类:**34B15　　**文献标志码:**A

Existence of positive solutions to a class of Caputo fractional differential equations

LI Yunhong[1], LYU Wenjing[2]

(1. School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China; 2. Office of General Services, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: In order to investigate the existence of positive solutions to a class of Caputo fractional differential equation boundary value problems with p-Laplacian operator, the Green's function is obtained by calculus, and its properties are discussed. By using monotone iterative technique, at least two positive solutions are obtained for the boundary value problems. An example is given to illustrate the existence of positive solutions to this kind of equation boundary value problems.

Keywords: ordinary differential equation; Caputo fractional derivative; positive solution; monotone iteratiation; boundary value problems

微分方程是现代数学的一个重要分支,它在几何、力学、航天、经济等领域都有着广泛的应用。近年来,分数阶微分方程边值问题成为许多数学工作者的研究热点[1-14]。

本文讨论带 p-Laplacian 算子的边值问题的正解情况,

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}[\phi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t))]+f(t,u(t))=0, \quad 0<t<1, \\ D_{0+}^{\alpha}u(1)=0, u''(0)=0, u(0)=\mu_1 u'(0), \quad u(\eta)=\mu_2 u'(1), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $0<\beta\leqslant 1$, $2<\alpha\leqslant 3$, $3<\alpha+\beta\leqslant 4$, D_{0+}^{β}, D_{0+}^{α} 是 Caputo 分数阶微分, $\phi_p(u)=|u|^{p-2}u$, $p>1$。运用单调迭代方法,得到该问题正解的存在性。

在本文中,总假设下面条件成立:

收稿日期:2016-05-23;修回日期:2016-10-19;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金(11401159);河北省自然科学基金(A2014208158)

作者简介:李云红(1978—),女,河北鹿泉人,讲师,硕士,主要从事微分方程方面的研究。

E-mail:mathhong@126.com

李云红,吕文静.一类 Caputo 分数阶微分方程正解的存在性[J].河北科技大学学报,2016,37(6):575-580.

LI Yunhong, LYU Wenjing. Existence of positive solutions to a class of Caputo fractional differential equations[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2016, 37(6): 575-580.

H_1) $\mu_1>0,\mu_2>0,0<\eta<1,\rho=\eta+\mu_1-\mu_2,\rho>0,(\alpha-1)\mu_2\geqslant 1$；

H_2) $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$是连续的；

H_3) $f(t,0)\not\equiv 0,f(t,1)\not\equiv 0$，令 $\sigma=\max\limits_{t\in[0,1]}f(t,1)$，且存在常数 $\delta>0$，使得对任意的 $t\in[0,1]$，$u\in[0,+\infty)$，有 $f(t,\lambda u)\leqslant\lambda^{\delta}f(t,u),\forall\lambda\geqslant 1$。

1 预备知识

为证明结论，需要利用下面的预备知识[15-16]。

定义 1 函数 $y:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 积分定义如下：

$$I_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s,$$

其中右边是在$(0,+\infty)$上逐点定义的。

定义 2 函数 $y:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha>0$ 阶 Caputo 微分定义如下：

$$D_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}y^{(n)}(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\alpha]+1$，右边是在$(0,+\infty)$上逐点定义的。

引理 1 令 $\alpha>0$，设 $u(t),D_{0+}^{\alpha}u(t)\in L(0,1)$，则

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{N-1}t^{N-1},\quad c_i\in\mathbf{R},\quad i=0,1,2,\cdots,N,$$

其中 N 是大于或等于 α 的最小整数。

2 主要结果

引理 2 边值问题(1)等价于

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s+d_1(t+\mu_1)=\int_0^1G(t,s)\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s,\tag{2}$$

其中：

$$\tilde{\omega}(s)=\phi_q\left\{\frac{\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau-\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\},\tag{3}$$

$$d_1=\frac{\mu_2(\alpha-1)\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s-\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)\rho},\tag{4}$$

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\rho}\begin{cases}(t+\mu_1)[\mu_2(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}-(\eta-s)^{\alpha-1}]+\rho(t-s)^{\alpha-1}, & 0\leqslant s\leqslant\min\{t,\eta\}\leqslant 1,\\(t+\mu_1)[\mu_2(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}-(\eta-s)^{\alpha-1}], & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\eta\leqslant 1,\\(t+\mu_1)\mu_2(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}+\rho(t-s)^{\alpha-1}, & 0\leqslant\eta\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\(t+\mu_1)\mu_2(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}, & 0\leqslant\max\{t,\eta\}\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}\tag{5}$$

ϕ_q 是 ϕ_p 的逆算子，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

证明 利用式(1)中的 $D_{0+}^{\beta}[\phi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t))]+f(t,u(t))=0$，可得 $D_{0+}^{\beta}[\phi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t))]=-f(t,u(t))$。两边从 0 到 t 积分，利用引理 1 得

$$\phi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t))=-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau+c_0,$$

再利用式(1)中的 $D_{0+}^{\alpha}u(1)=0$，可得

$$c_0=\frac{\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}。$$

因此，

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=\phi_q\left\{\frac{\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau-\int_0^t(t-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\}\quad。$$

对上式两边从 0 到 t 积分，利用引理 1 得

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s+d_0+d_1t+d_2t^2。$$

利用式(1) 中的 $u''(0)=0$，得 $d_2=0$，所以

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s+d_0+d_1t, \tag{6}$$

由式(6)，可得

$$u'(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-2}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s+d_1。 \tag{7}$$

由式(6)、式(7) 和式(1) 中的 $u(0)=\mu_1\mu'(0)$，可得

$$d_0=\mu_1d_1。 \tag{8}$$

由式(6)— 式(8) 和式(1) 中的 $u(\eta)=\mu_2u'(1)$，可得

$$d_1=\frac{\mu_2(\alpha-1)\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s-\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)\rho}。$$

证明完毕。

引理 3　引理 2 中的 $\tilde{\omega}(s)\geqslant 0$，对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$。$d_1\geqslant 0$。$G(t,s)\geqslant 0$ 且 $k_1p(s)\leqslant G(t,s)\leqslant k_2p(s)$，其中：$p(s)=(1-s)^{\alpha-2}$，$k_1=\dfrac{\mu_1[\mu_2(\alpha-1)-1]}{\Gamma(\alpha)\rho}$，$k_2=\dfrac{(1+\mu_1)\mu_2(\alpha-1)+\rho}{\Gamma(\alpha)\rho}$。

证明　由条件 H_2) 可得 $f(t,u(t))\geqslant 0$，因此对任意的 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$，有：

$$\tilde{\omega}(s)=\phi_q\left\{\frac{\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau-\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\}\geqslant$$

$$\phi_q\left\{\frac{\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau-\int_0^1(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\}\geqslant 0。$$

由条件 H_1) 可得 $\mu_2>0$，$0<\eta<1$，$\rho=\eta+\mu_1-\mu_2>0$，$(\alpha-1)\mu_2\geqslant 1$，因此

$$d_1=\frac{\mu_2(\alpha-1)\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s-\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)\rho}\geqslant$$

$$\frac{\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s-\int_0^1(\eta-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)\rho}\geqslant 0。$$

当 $0\leqslant s\leqslant\min\{t,\eta\}\leqslant 1$ 时，

$$G(t,s)=\frac{(t+\mu_1)[\mu_2(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}-(\eta-s)^{\alpha-1}]}{\Gamma(\alpha)\rho}+\rho(t-s)^{\alpha-1}\leqslant$$

$$\frac{(1+\mu_1)\mu_2(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)\rho}+\rho(1-s)^{\alpha-2}=k_2p(s)。$$

$$G(t,s)=\frac{(t+\mu_1)[\mu_2(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}-(\eta-s)^{\alpha-1}]}{\Gamma(\alpha)\rho}+\rho(t-s)^{\alpha-1}\geqslant$$

$$\frac{\mu_1[\mu_2(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}-(1-s)^{\alpha-2}]}{\Gamma(\alpha)\rho}=k_1p(s)。$$

所以 $k_1p(s)\leqslant G(t,s)\leqslant k_2p(s)$。又因为 $(\alpha-1)\mu_2\geqslant 1$，所以 $k_1\geqslant 0$，因此 $G(t,s)\geqslant 0$。其他区间的证明类似，省略。

令 $E=C[0,1]$，$\forall u\in C[0,1]$，定义 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u|$，因此 E 是 Banach 空间。定义锥 $K\subset E$ 为

$$K=\{u\mid u\in E,u\text{ 是}[0,1]\text{ 上的非负，不减的函数}\}。$$

算子 $T:K\to E$ 为

$$Tu(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s+d_1(t+\mu_1)=\int_0^1G(t,s)\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s。 \tag{9}$$

定理 1　设条件 H_1)—H_3) 成立，且存在常数 $r>1$，使得

S_1) 当 $0\leqslant t\leqslant 1$，$0\leqslant u\leqslant v\leqslant r$ 时，有 $f(t,u)\leqslant f(t,v)$；

S_2) $\left\{\dfrac{r^{\delta}\sigma}{\Gamma(\beta+1)}\right\}^{q-1} \leqslant \dfrac{(\alpha-1)r}{k_2}$,

则边值问题(1)至少存在2个正解 u^* 和 v^*,使得 $0 \leqslant \| u^* \| \leqslant r, 0 \leqslant \| v^* \| \leqslant r$,其中:

$$u^* = \lim_{n\to\infty} u_n,\ u_n = Tu_{n-1},\ n = 1,2,\cdots,\ u_0(t) = \frac{(\alpha-1)r}{k_2}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s,\ t \in [0,1],$$

$$v^* = \lim_{n\to\infty} v_n,\ v_n = Tv_{n-1},\ n = 1,2,\cdots,\ v_0(t) = 0,\ t \in [0,1]。$$

证明 首先证明 $T:K \to K$ 是全连续的。

$\forall u \in K$,由 $\tilde{\omega}(s) \geqslant 0, G(t,s) \geqslant 0$ 可得 $Tu(t) = \int_0^1 G(t,s)\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s \geqslant 0$。

其次,由式(9)可得 $Tu(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s + d_1(t+\mu_1)$,因为 $\tilde{\omega}(s) \geqslant 0, d_1 \geqslant 0$,所以 $Tu(t)$ 关于 t 是单调不减的,因此 $T:K \to K$。由 $f(t,u)$ 的连续性,可得 T 是连续的。

任取 $M \subset K$ 是有界的,即存在正数 l,使得 $\| u \| < l$ 对任意的 $u \in M$ 都成立。令 $L = \max\limits_{\substack{0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0\leqslant u\leqslant l}} f(t,u)+1$,则对任意的 $u \in M$,有:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(s) = \phi_q\left\{\frac{\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\} \leqslant \\ \phi_q\left\{\frac{\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\} \leqslant \\ \phi_q\left\{\frac{L\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\} \leqslant \\ \left\{\frac{L}{\Gamma(\beta+1)}\right\}^{q-1}。\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}(Tu)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s + d_1(t+\mu_1) \leqslant \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s + \frac{\mu_2(\alpha-1)\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)\rho}(1+\mu_1) \leqslant \\ \left\{\frac{L}{\Gamma(\beta+1)}\right\}^{q-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_2(1+\mu_1)}{\Gamma(\alpha)\rho}\right],\end{aligned}$$

所以 $T(M)$ 是一致有界的。

下面来证明 $T(M)$ 是等度连续的。任取 $u \in M, 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$,可得

$$\begin{aligned}|(Tu)(t_2) - (Tu)(t_1)| \leqslant \\ \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s\right| + d_1(t_2-t_1) \leqslant \\ \left|\frac{\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}]\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}\right| + \left|\frac{\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}\right| + d_1(t_2-t_1) \leqslant \\ \left\{\frac{L}{\Gamma(\beta+1)}\right\}^{q-1}\frac{t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + d_1(t_2-t_1),\end{aligned}$$

这样 $T(M)$ 是等度连续的,应用 Arzel-Ascoli 定理,可得 T 是全连续的。

令 $\overline{K}_r = \{u \in K: 0 \leqslant \| u \| \leqslant r\}$,下面证明 $T\overline{K}_r \subset \overline{K}_r$。

若 $u \in \overline{K}_r$,则 $0 \leqslant u(t) \leqslant r$,利用条件 H_3) 和定理1中 S_1),可得 $0 \leqslant f(t,u(t)) \leqslant f(t,r) \leqslant r^{\delta} f(t,1) \leqslant r^{\delta}\sigma$,有:

$$\begin{aligned}(Tu)(t) = \int_0^1 G(t,s)\tilde{\omega}(s)\mathrm{d}s = \\ \int_0^1 G(t,s)\phi_q\left\{\frac{\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\}\mathrm{d}s \leqslant\end{aligned}$$

$$\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left\{\frac{\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^1 k_2 p(s)\phi_q\left\{\frac{r^\delta\sigma\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\left\{\frac{r^\delta\sigma}{\Gamma(\beta+1)}\right\}^{q-1}\int_0^1 k_2 p(s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\left\{\frac{r^\delta\sigma}{\Gamma(\beta+1)}\right\}^{q-1}\frac{k_2}{\alpha-1}\leqslant r。$$

因此可得 $\|Tu\|\leqslant r$，所以 $T\overline{K}_r\subset\overline{K}_r$。

令 $u_0=\frac{(\alpha-1)r}{k_2}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s$，显然 $u_0\leqslant r$，所以 $u_0\in\overline{K}_r$。

令 $u_1=Tu_0$，由 $T\overline{K}_r\subset\overline{K}_r$，可得 $u_1\in\overline{K}_r$，令 $u_n=Tu_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，因此可得 $u_n\in\overline{K}_r$，$n=0,1,2,\cdots$。又因为 T 是全连续算子，所以序列 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是紧的。

因为

$$u_1(t)=(Tu_0)(t)=$$

$$\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left\{\frac{\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u_0(\tau))\mathrm{d}\tau-\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u_0(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left\{\frac{\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u_0(\tau))\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\beta)}\right\}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\left\{\frac{r^\delta\sigma}{\Gamma(\beta+1)}\right\}^{q-1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{(\alpha-1)r}{k_2}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=u_0,$$

且 $Tu(t)$ 关于 $u(t)$ 是单调不减的，所以 $u_2(t)=Tu_1(t)\leqslant Tu_0(t)=u_1(t)$。递推可得 $u_n(t)\leqslant u_{n-1}(t)$。因此，存在 $u^*\in\overline{K}_r$，使得 $u_n\to u^*$。应用 T 的连续性和 $u_n=Tu_{n-1}$，可得 $u^*=Tu^*$，所以 u^* 是问题(1) 的正解。

令 $v_0=0$，显然 $v_0\in\overline{K}_r$。令 $v_1=Tv_0$，由 $T\overline{K}_r\subset\overline{K}_r$，可得 $v_1\in\overline{K}_r$。令 $v_n=Tv_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，因此可得 $v_n\in\overline{K}_r$，$n=0,1,2,\cdots$。又因为 T 是全连续算子，所以序列 $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是紧的。因为 $v_1(t)=(Tv_0)(t)\geqslant v_0$，且 $Tu(t)$ 关于 $u(t)$ 是单调不减的，所以 $v_2(t)=Tv_1(t)\geqslant Tv_0(t)=v_1(t)$。递推可得 $v_n(t)\leqslant v_{n-1}(t)$。因此，存在 $v^*\in\overline{K}_r$，使得 $v_n\to v^*$。应用 T 的连续性和 $v_n=Tv_{n-1}$，可得 $v^*=Tv^*$，所以 v^* 是问题(1) 的正解。证明完毕。

注：定理 1 中的 u^*，v^* 有可能重合，在这种情况下问题(1)至少有 1 个正解。

3　举　例

讨论下面边值问题的正解情况，

$$\begin{cases}D_{0+}^{0.7}[\phi_3(D_{0+}^{2.7}u(t))]+f(t,u(t))=0, & 0<t<1,\\ D_{0+}^{2.7}u(1)=0,u''(0)=0,u(0)=0.9u'(0), & u(0.5)=0.6u'(1),\end{cases}$$

其中 $f(t,u)=(t+1)(u+1)^{\frac{1}{3}}$，$0<t<1$，$u\geqslant 0$。令 $r=49$，则

$$f(t,\lambda u)=(t+1)(\lambda u+1)^{\frac{1}{3}}\leqslant(t+1)(\lambda u+\lambda)^{\frac{1}{3}}=\lambda^{\frac{1}{3}}(t+1)(u+1)^{\frac{1}{3}}=\lambda^{\frac{1}{3}}f(t,u),\ \forall\lambda\geqslant 1,$$

$$\sigma=\max_{t\in[0,1]}f(t,1)=2^{\frac{4}{3}},f(t,u)\leqslant f(t,v),\ \forall\,0\leqslant u\leqslant v\leqslant 49,$$

$$\left\{\frac{r^\delta\sigma}{\Gamma(\beta+1)}\right\}^{q-1}=3.185\ 590\leqslant\frac{(\alpha-1)r}{k_2}=37.596\ 046,$$

利用定理 1 可知，上述边值问题至少有 2 个正解。

参考文献/References:

[1] AHMAD B, MATAR M, AGARWAL R. Existence results for fractional differential equations of arbitrary order with nonlocal integral boundary conditions[J]. Boundary Value Problem,2015,220:1-13.

[2] ZHANG Lihong, AHMAD B, WANG Guotao, et al. Nonlinear fractional integro-differential equations on unbounded domains in a Banach space[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2013,240:51-56.

[3] ALBERTO C, HAMDI Z. Nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions[J]. Applied Mathematics and Computation,2014,228:251-257.

[4] VONG S. Positive solutions of singlular fractional differential equations with integral boundary conditions[J]. Mathematical and Computer Modelling,2013,57: 1053-1059.

[5] SOTIRIS K N, SINA E. On the existence of solutions for fractional differential inclusions with sum and integral boundary conditions[J]. Applied Mathematics and Computation,2015,266: 235-243.

[6] KOU Chunhai, ZHOU Huacheng, YAN Ye. Existence of solutions of initial value problems for nonlinear fractional differential equations on the half-axis[J]. Nonlinear Analysis,2011,74: 5975-5986.

[7] CUI Yujun. Uniqueness of solution for boundary value problems for fractional differential equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2016,51:48-54.

[8] ZHANG Lihong, AHMAD B, WANG Guotao. The existence of an extremal solution to a nonlinear system with the right-handed Riemann-Liouville fractional derivative[J]. Applied Mathematics Letters,2014,31:1-6.

[9] LI Yunhong, LI Guogang. Positive solutions of p-Laplacian fractional differential equations with integral boundary value conditions[J]. Journal of Nonlinear Science and Applications,2016,9(3):717-726.

[10] ZHAI Chengbo, XU Li. Properties of positive solutions to a class of four-point boundary value problem of Caputo fractional differential equations with a parameter[J]. Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation,2014,19:2820-2827.

[11] XU Xiaojie, FEI Xiangli. The positive properties of Green's function for three point boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and its applications[J]. Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation,2012,17(4):1555-1565.

[12] NTOUYAS S, ETEMAD S. On the existence of solutions for fractional differential inclusions with sum and integral boundary conditions [J]. Applied Mathematics and Computation,2015,266:235-243.

[13] 李云红,李艳. 带 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程的正解[J]. 河北科技大学学报,2015,36(6):593-597.
LI Yunhong, LI Yan. A positive solution for the fractional differential equation with a p-Laplacian operator[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2015,36(6):593-597.

[14] ZHANG Xinguang, LIU Lisan, WIWATANAPATAPHEE B, et al. The eigenvalue for a class of singular p-Laplacian fractional differential equations involving the Riemann-Stieltjes integral boundary condition[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 235: 412-422.

[15] AMKO S G, KILBAS A A, MARICHEV O I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications[M]. Switzerland: Gordon and Breach,1993.

[16] PODLUNY I. Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering[M]. New York: Academic Press,1999.