第 37 卷第 2 期　　河北科技大学学报　　Vol. 37, No. 2
2016 年 4 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Apr. 2016

文章编号:1008-1542(2016)02-0154-06　　doi:10.7535/hbkd.2016yx02007

基于偏微分方程的增长网络结构分析

贾俊波[1],靳　祯[2]

(1.中北大学理学院,山西太原　030051;2.山西大学复杂系统研究所,山西太原　030006)

摘　要:为了研究网络的功能,需要首先研究增长网络的拓扑结构,包括网络的度分布和节点度等。当网络规模足够大时,将网络节点的度看作连续变量,根据网络演化过程中所满足的马尔科夫性,建立网络节点数量的变化方程,从而化简变形得到基于一阶双曲方程的增长网络模型。求解得到了兼具优先和随机 2 种连接机制的网络度分布 $P(k)$和节点度 $k_{t0}(t)$,同时也发现了节点度函数与双曲方程特征线之间的关系。根据网络的演化机制,通过对该增长网络模型进行随机模拟,验证了度分布与节点度理论结果的正确性。将网络的度分布计算转化为偏微分方程求解问题,将节点度的变化视为偏微分方程的特征线,将偏微分方程应用于增长网络的建模中,从而可以解析地对网络结构进行分析。

关键词:图论;偏微分方程;应用数学;概率分布;结构分析

中图分类号:O175　　**MSC(2010)主题分类:**35A23　　**文献标志码:**A

Structure analysis of growing network based on partial differential equations

JIA Junbo[1], JIN Zhen[2]

(1. School of Science, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China; 2. Complex Systems Research Center, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China)

Abstract: The topological structure is one of the most important contents in the complex network research. Therein the node degree and the degree distribution are the most basic characteristic quantities to describe topological structure. In order to calculate the degree distribution, first of all, the node degree is considered as a continuous variable. Then, according to the Markov Property of growing network, the cumulative distribution function's evolution equation with time can be obtained. Finally, the partial differential equation (PDE) model can be established through distortion processing. Taking the growing network with preferential and random attachment mechanism as an example, the PDE model is obtained. The analytic expression of degree distribution is obtained when this model is solved. Besides, the degree function over time is the same as the characteristic line of PDE. At last, the model is simulated. This PDE method of changing the degree distribution calculation into problem of solving PDE makes the structure analysis more accurate.

Keywords: graph theory; partial differential equation; applied mathematics; probability distribution; structure analysis

---

收稿日期:2015-12-11;修回日期:2016-01-05;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金重点项目(11331009)

作者简介:贾俊波(1990—),男,山西昔阳人,硕士研究生,主要从事复杂网络方面的研究。

通讯作者:靳　祯教授。E-mail:jinzhn@263.net

贾俊波,靳　祯.基于偏微分方程的增长网络结构分析[J].河北科技大学学报,2016,37(2):154-159.

JIA Junbo, JIN Zhen. Structure analysis of growing network based on partial differential equations[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2016, 37(2): 154-159.

复杂网络是复杂系统的重要研究内容，主要研究网络的生成、结构及其功能，也就是说网络是从哪里来，其结构如何，具有什么功能[1-5]。这些问题清楚了，就可以利用这些性质研究现实世界大量存在的网络，如 Internet 网、万维网、社交朋友网、交通运输网等复杂网络[6-9]。复杂网络在理论上可以看作一个图，可以借助于图论及随机理论进行研究。早在 1960 年，ERDÖS 等[10]建立了随机图理论，开始了随机网络模型的研究。1998 年，由 WATTS 等[11]构造出了小世界网络模型，刻画了现实网络中的小世界特性，解释了六度分割理论。1999 年，BARABÁSI 等[12]构建了度分布具有幂律形式的无标度网络模型（也称 BA 网络模型），即度分布 $P(k)\propto k^{-\gamma}$。BA 无标度网络模型描述了现实世界普遍存在的“富者越富”的现象，它的提出具有里程碑意义。

在网络的生成、拓扑结构和功能的研究中，网络的度分布是描述网络最基本的特征量，也是网络研究的一个重点。度分布主要从实验统计和理论计算获得，目前，度分布的理论计算方法主要有 BARABÁSI 等[13]提出的平均场方法，DOROGOVTSEV 等[14]提出的主方程方法，KRAPIVSKY 等[15]提出的率方程方法，以及文献[16—18]提出的基于马氏链的数值方法。在网络增长机制方面，LIU 等[19]提出了一种同时具有优先和随机 2 种连接机制的增长网络模型，并利用平均场方法计算出了网络的近似度分布。谭利等[20]利用 Stolz 定理严格证明了此模型度分布的存在性。

本文将节点的度 k 看作连续变量，基于一阶双曲方程，建立了优先和随机 2 种连接机制下的增长网络模型，使用方程求解方法解析计算了模型的网络结构，最后进行了模拟和讨论。

1　网络的演化机制

本文所研究的增长网络模型的演化机制包括新节点的增加和新增边的连接。演化机制如下。

1）增长：以具有 m_0 个节点 l_0 条边的连通网络为初始网络，每个时间步长增加一个新节点（i 时刻新增的节点记为节点 i），同时该新节点发出 m 条边连向旧节点；

2）连接：新增节点以概率 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 依节点度进行优先连接，以概率 $1-p$ 进行随机连接。则，旧节点 i 得到一条边的概率为

$$\prod(k_i)=p\,\frac{k_i}{\sum\limits_i k_i}+(1-p)_i\,\frac{1}{N(t)}\ ,\tag{1}$$

其中：$\sum\limits_i k_i=2(l_0+mt)$ 为 t 时刻实际边数的 2 倍；$N(t)=m_0+t$ 为 t 时刻的节点数。文中主要的参数及变量见表 1。

表 1　主要符号表

Tab. 1　Main symbol table

符号	解释	符号	解释
m_0	初始时刻网络的节点数	$N(t)$	t 时刻网络节点的总数
l_0	初始时刻网络的连边数	$\hat{N}(k,t)$	t 时刻度小于等于 k 的节点数
m	每个时间步长新增节点发出的边数	$F(k,t)$	t 时刻的分布函数，即 t 时刻度小于等于 k 的节点占总节点的比例
$k_i(t)$	节点 i 在 t 时刻的度	$P(k,t)$	t 时刻的度分布，即 t 时刻度等于 k 的节点的概率密度，$P(k,t)=\frac{\partial F(k,t)}{\partial k}$

2　增长网络偏微分方程模型的建立

2.1　增长网络的度分布

由网络的增长机制可知，网络演化具有马尔科夫性，即，在已知 t 时刻网络结构的情况下，$t+1$ 时刻网络的演化状况只与 t 时刻的网络结构有关，而与 t 时刻之前的网络结构无关。假设时间 t 和节点度 k 都是连续变化，则该增长网络模型就是一个时间和状态空间都连续的马氏过程，因此可得

$$\hat{N}(k,t)=N(t)F(k,t)=N(t)\int_0^k P(x,t)\mathrm{d}x\ 。\tag{2}$$

假设在 t 时刻网络中存在一个度为 $k(k\geqslant m)$ 的节点，比如节点 A，经过 Δt 时间后，在平均意义下，节点

A 的度将变为 $k+\theta_t^k$，其中 $\theta_t^k=\Delta tm\prod(k)$ 表示度为 k 的节点在 Δt 时间段内度的增加量。同时，根据模型的演化机制，在 t 时刻度小于 A 的度的节点在 $t+\Delta t$ 时刻仍然小于 A 的度。对于任意的度 $k(\geqslant m)$，由于从 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻有新节点的增加，因此有：

$$\hat{N}(k,t)+\Delta t=\hat{N}(k+\theta_t^k,t+\Delta t)\quad ,\tag{3}$$

其中 Δt 为在所考虑的时间段内新增的节点数。

将式(2) 代入式(3)，得到

$$N(t)F(k,t)+\Delta t=N(t+\Delta t)F(k+\theta_t^k,t+\Delta t)。\tag{4}$$

将式(1) 及 $\theta_t^k=\Delta tm\prod(k)$，$N(t)=m_0+t$ 代入式(4)，得：

$$(m_0+t)F(k,t)+\Delta t=(m_0+t+\Delta t)F\left(k+p\frac{\Delta tmk}{2(l_0+mt)}+(1-p)\frac{\Delta tm}{m_0+t},t+\Delta t\right),\tag{5}$$

方程(5) 两边同除以 m_0+t，并对 $F\left(k+p\frac{\Delta tmk}{2(l_0+mt)}+(1-p)\frac{\Delta tm}{m_0+t},t+\Delta t\right)$进行二元函数的 Taylor 展开，只保留到 Δt 的一阶项，得到：

$$F(k,t)+\frac{\Delta t}{m_0+t}=$$

$$(1+\frac{\Delta t}{m_0+t})(F(k,t)+(p\frac{\Delta tmk}{2(l_0+mt)}+(1-p)\frac{\Delta tm}{m_0+t})\frac{\partial F(k,t)}{\partial k}+\Delta t\frac{\partial F(k,t)}{\partial t}+o(\Delta t)),\tag{6}$$

方程(6) 两边同除以 Δt，并令 $\Delta t\rightarrow 0$，从而得到关于 $F(k,t)$ 的偏微分方程：

$$\left(\frac{pmk}{2(l_0+mt)}+\frac{(1-p)m}{m_0+t}\right)\frac{\partial F(k,t)}{\partial t}+\frac{\partial F(k,t)}{\partial t}+\frac{F(k,t)-1}{m_0+t}=0\tag{7}$$

解的可行域为 $D=\{(k,t)\mid k\geqslant m,t>0\}$。当时间足够大时，可以忽略初始网络的节点数 m_0 和边数 l_0，此时令 $m_0=0,l_0=0$，得到

$$\frac{pk+2(1-p)m}{2t}\frac{\partial F(k,t)}{\partial k}+\frac{\partial F(k,t)}{\partial t}+\frac{F(k,t)-1}{t}=0\tag{8}$$

解的可行域变为 $D=\{(k,t)\mid k\geqslant m,t\geqslant T\gg 0\}$。由于所有节点在进入网络的同时都发出了 m 条边，因此节点的度 k 一定大于等于 m，所以一阶双曲方程(8) 存在边值条件：

$$F(m,t)=0,\quad \forall\, t>T。\tag{9}$$

用特征线法求解方程(8)，并代入边值条件(9)，得到 $F(k,t)$ 的解析表达式：

$$F(k,t)=1-\left(\frac{m(2-p)}{pk+2(1-p)m}\right)^{\frac{2}{p}},\quad \forall\, t>T,k\geqslant m,\tag{10}$$

从而得到增长网络模型的度分布为

$$P(k,t)=P(k)=\frac{\partial F(k,t)}{\partial k}=\frac{2(m(2-p))^{\frac{2}{p}}}{(pk+2(1-p)m)^{\frac{2}{p}+1}}。\tag{11}$$

因此，对于不同优先连接概率 p 可得到如下结论：

1) 当 $p=0$ 时，网络为随机连接增长网络，通过计算式(8) 与式(9) 得到网络的度分布为 $P(k)=\frac{1}{m}\mathrm{e}^{1-\frac{k}{m}}$；

2) 当 $p=1$ 时，网络为优先连接增长网络，即 BA 模型，其度分布为 $P(k)=2m^2k^{-3}$；

3) 当 $0<p<1$ 时，新增节点既有优先连接又有随机连接，度分布为 $P(k)=\frac{2(m(2-p))^{\frac{2}{p}}}{(pk+2(1-p)m)^{\frac{2}{p}+1}}$。

2.2 节点度 $k_{t_0}(t)$

把节点 t_0 在 $t(t\geqslant t_0)$ 时刻的度记为 $k_{t_0}(t)$，显然 $k_{t_0}(t)$ 是关于时间 t 的单调增函数。下面将研究节点度 $k_{t_0}(t)$ 与偏微分方程(8) 的关系。

根据模型的演化机制，得到节点度 $k_{t_0}(t)$ 的变化率方程：

$$\frac{\mathrm{d}k_{t_0}(t)}{\mathrm{d}t}=m\prod(k_{t_0})\approx\frac{pk_{t_0}+2(1-p)m}{2t}\tag{12}$$

的初始条件为

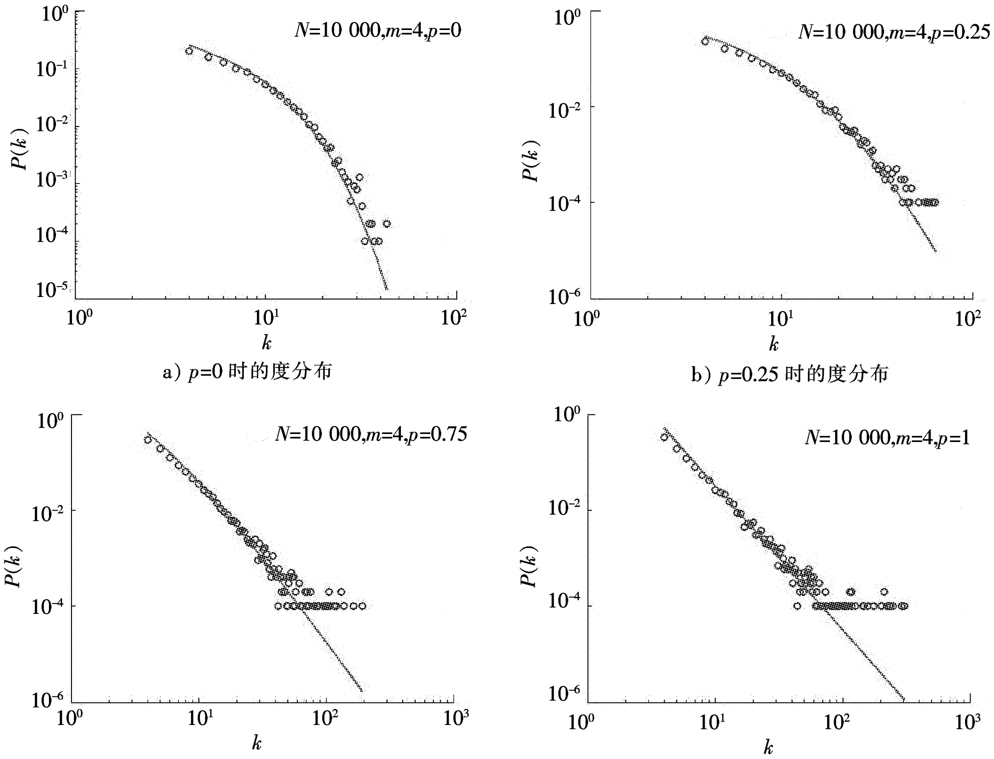
$$k_{t_0}(t_0)=m。\tag{13}$$

可以看到方程(12) 即为偏微分方程(8) 的特征方程。因此，节点度函数 $k_{t_0}(t)$ 即为偏微分方程(8) 的特征线，其解析式为

$$k_{t_0}(t)=(\frac{2}{p}-1)m\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{p}{2}}-2(\frac{1}{p}-1)m,\quad \forall t\geqslant t_0(t\geqslant T)。\tag{14}$$

3 模　拟

为了验证度分布 $P(k)$和节点度 $k_{t_0}(t)$理论结果的正确性，笔者进行了多次随机模拟。从图 1－图 3 可以看到，随机模拟的结果和理论结果吻合得很好。图 1 是不同连接概率 p 下网络模型的度分布，可以看到在双对数坐标系上随机连接网络($p=0$)的度分布是一条弯曲的曲线(见图 1 a))。随着连接概率 p 逐渐趋于 1，度分布图像会由曲线逐渐变成一条斜率为－3 的直线。从图 2 可以看到，当新节点发出的边数 m 增大时，度分布图像会向右移动。

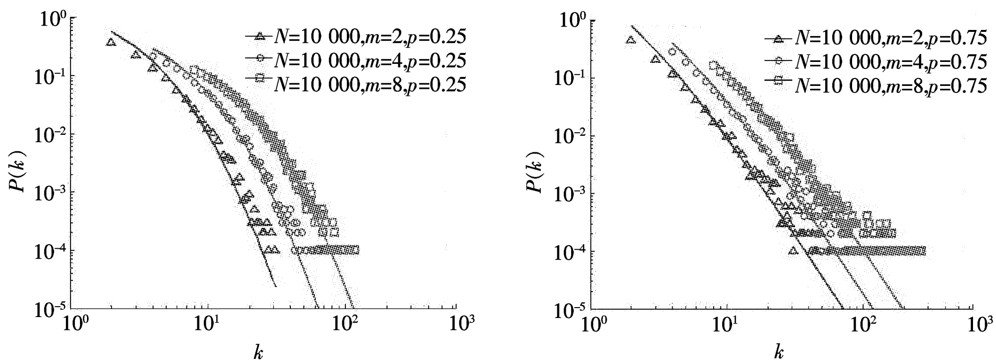


a) $p=0$ 时的度分布　　b) $p=0.25$ 时的度分布

c) $p=0.75$ 时的度分布　　d) $p=1$ 时的度分布

图 1　不同优先连接概率 p 下增长网络模型的度分布

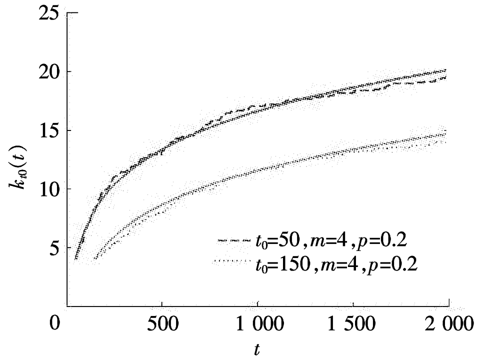
Fig. 1　Degree distribution of the network model with different parameters p



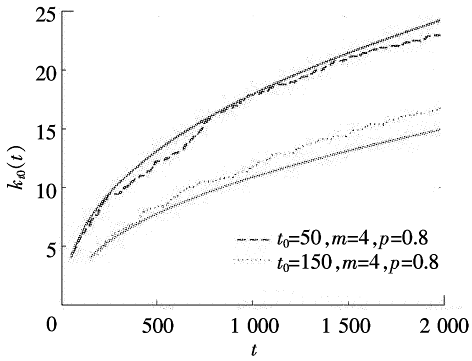
a) $p=0.25$ 时不同 m 对应的度分布　　b) $p=0.75$ 时不同 m 对应的度分布

图 2　新增边 m 不同时增长网络模型的度分布

Fig. 2　Degree distribution of the network model with different parameters m



a) p=0.2 时不同节点的度随时间的变化



b) p=0.8 时不同节点的度随时间的变化

图3 不同节点的度随时间的变化

Fig. 3 Node degree changing with time

分析得知节点度函数 $k_{t_0}(t)$ 与方程(8)的特征线是同一条曲线。从图3也可以看到，节点的度确实是沿着这条曲线在增加。

4 结 论

通过将节点的度 k 作为连续变量，建立了基于偏微分方程的增长网络模型，获得了优先和随机2种连接机制下网络度分布的解析表达式，以及节点度变化与偏微分方程特征线之间的关系。通过对该增长网络模型的随机模拟，验证了度分布与节点度理论结果的正确性。与传统方法相比，将网络的度分布计算转化为偏微分方程求解问题，把节点度的变化视为偏微分方程的特征线，将偏微分方程应用于增长网络的建模中，从而可以更加解析地对网络结构进行研究，拓宽了复杂网络拓扑结构研究的方法。

参考文献/References：

[1] 汪小帆，李翔，陈关荣. 网络科学导论[M]. 北京：高等教育出版社，2012.

[2] 赵洋，单娟，宋超. 复杂网络中的病毒传播机制研究[J]. 河北科技大学学报，2011，32(3)：252-255.
ZHAO Yang, SHAN Juan, SONG Chao. Virus propagation mechanism of complex network[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2011, 32(3): 252-255.

[3] 许云峰，赵宁，郝雪君，等. 基于三元闭包和会员闭包的社区发现算法研究[J]. 河北科技大学学报，2014，35(1)：103-108.
XU Yunfeng, ZHAO Ning, HAO Xuejun, et al. A community detection algorithm based on triadic closure and membership closure[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2014, 35(1): 103-108.

[4] 杜云，田强，杜艳，等. 简单动态递归神经网络在非线性系统辨识中的应用[J]. 河北科技大学学报，2009，30(2)：130-134.
DU Yun, TIAN Qiang, DU Yan, et al. Application of simple dynamic recurrent neural network in non-linear system identification[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2009, 30(2): 130-134.

[5] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[J]. Physical Review E, 2001, 63(6): 066117.

[6] MORENO Y, PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks[J]. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, 2002, 26(4): 521-529.

[7] BOGUNA M, PASTOR-SATORRAS R. Epidemic spreading in correlated complex networks[J]. Physical Review E, 2002, 66(4): 047104.

[8] 方锦清，李永，毕桥. 统一混合变速增长网络模型及其特性转变[J]. 复杂系统与复杂性科学，2008(4)：56-65.
FANG Jinqing, LI Yong, BI Qiao. Unified hybrid variable speed growth model and transition of topology property[J]. Complex Systems and Complex Science, 2008(4): 56-65.

[9] 史定华. 从几何增长网络谈起[J]. 复杂系统与复杂性科学，2010，7(Z1)：82-89.
SHI Dinghua. Starting with geometrically growing networks[J]. Complex Systems and Complex Science, 2010, 7(Z1): 82-89.

[10] ERDÖS P, RÉNYI A. On the evolution of random graphs[J]. Publicaton of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy Ofences, 1960, 38(1): 17-61.

[11] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.

[12] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.

[13] BARABÁSI A L, ALBERT R, JEONG H. Mean-field theory for scale-free random networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and

Its Applications，1999，272(1)：173-187.
[14] DOROGOVTSEV S N，MENDES J F F，SAMUKHIN A N. Structure of growing networks with preferential linking[J]. Physical Review Letters，2000，85(21)：4633-4636.
[15] KRAPIVSKY P L，REDNER S，LEYVRAZ F. Connectivity of growing random networks[J]. Physical Review Letters，2000，85(21)：4629-4632.
[16] SHI Dinghua，CHEN Qinghua，LIU Liming. Markov chain-based numerical method for degree distributions of growing networks[J]. Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics，2005，71(3)：036140.
[17] 陈庆华，史定华. 增长网络的形成机理和度分布计算[J]. 应用数学与计算数学学报，2005，19(1)：30-38.
CHEN Qinghua，SHI Dinghua. The mechanisms and degree distributions of growing networks[J]. Communication on Applied Mathematics and Computation，2005，19(1)：30-38.
[18] 曹玉芬，侯振挺. 一类增长网络模型的度分布[J]. 系统科学与数学，2010，30(4)：548-555.
CAO Yufen，HOU Zhenting. Degree-distribution of a growing nerwork[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences，2010，30(4)：548-555.
[19] LIU Z，LAI Y C，YE N，et al. Connectivity distribution and attack tolerance of general networks with both preferential and random attachments[J]. Physics Letters A，2002，303(5/6)：337-344.
[20] 谭利，刘新儒. 随机增长网络模型的稳定性分析[J]. 河北工业大学学报，2010，39(5)：17-19.
TAN Li，LIU Xinru. Stability analysis of a random growing network model[J]. Journal of Hebei University of Technology，2010，39(5)：17-19.

郑 重 声 明

近期，有人为谋取私利，利用虚假网站，冒用河北科技大学学报编辑部的名义征集《河北科技大学学报》和《河北工业科技》的稿件。此举不仅严重影响了我编辑部的声誉，给作者带来了损失，还在社会上造成了不良影响。

为此，本编辑部特声明如下：

《河北科技大学学报》和《河北工业科技》是由河北科技大学主办的科技期刊，有关稿件的征集、审核、编校、出版等工作均由我编辑部组织执行，从未委托过其他任何机构或个人向社会征稿。

两刊的官方在线投稿网址分别为

《河北科技大学学报》：http://xuebao.hebust.edu.cn

《河北工业科技》：http://keji.hebust.edu.cn

请各位作者在投稿时认真甄别，必要时可拨打编辑部的办公电话确认。

联系电话：0311－81668127；81668290；81668291；81668292

（河北科技大学学报编辑部）