第 37 卷第 2 期 河北科技大学学报 Vol. 37, No. 2
2016 年 4 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Apr. 2016

文章编号:1008-1542(2016)02-0146-08 doi:10.7535/hbkd.2016yx02006

直径图为 11 圈的 7 距离集研究

王 琦,丛 悦,高飞星

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

摘 要:如果平面点集 X 中的任意两点确定的互异距离数为 k,则称 X 为 k 距离集。用 $d(x,y)$ 表示平面上互异两点 x,y 之间的距离,记 X 中的最大距离为直径 $D=D(X)$。直径图 $DG(X_D)$ 是由 X 中所有直径构成的图,X_D 表示其顶点集。讨论了当 X 是一个 7 距离集时,直径图 $DG(X_D)$ 的构型。利用 $DG(X_D)$ 中最多包含一个圈,且只能为奇圈的特性,以及直径所具有的特殊性,证得当直径图为 11 圈时,其顶点集 X_D 恰好为某正十一边形的顶点集。

关键词:离散几何;互异距离;直径图;奇圈;7 距离集

中图分类号:O157.3 **MSC(2010)主题分类:**52C15 **文献标志码:**A

Research on 7-distance set with $DG(X_D)=C_{11}$

WANG Qi, CONG Yue, GAO Feixing

(School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: A planar point set X is called a k-distance set if there are exactly k distances between two distinct points in X. Let $d(x,y)$ be the distance of any two distinct points x,y. Let diameter $D=D(X)$ be the longest distance of X. The diameter graph $DG(X_D)$ is composed of all diameters in X, where X_D is the set of its endpoints. In this paper, the configuration of the diameter graph $DG(X_D)$ is discussed when X is a 7-distantce set. It is proved that the endpoint set X_D is the endpoint set of the regular 11-sided polygon when the diameter graph has 11 cycles based on the characteristics of $DG(X_D)$ containing at most one and only odd cycle and the diameter specialty.

Keywords: discrete geometry; distinct distance; diameter graph; odd cycle; 7-distance set

给定平面点集 X,如果 X 中的任意两点确定的互异距离数为 k,则称 X 为 k 距离集。$d(x,y)$ 表示平面上互异两点 x,y 之间的距离,记 X 中的最大距离为直径 $D=D(X)$。设 $X_D=\{x\in X$:存在 $y\in X$,使得 $d(x,y)=D\}$,$m=m(X)=|X_D|$ 表示 X_D 中的元素个数。R_n 表示正 n 边形顶点所构成的集合,R_n-i 表示正 n 边形中 $n-i$ 个顶点组成的集合。文献[1]中引入了直径图 $DG(X_D)$ 的概念,直径图 $DG(X_D)$ 是由 X 中所有直径构成的图,显然直径图中不含有孤立的点。C_n 表示 n 个点构成的一个圈。当有 n 个点时,加法运算在模 n 的基础上进行。ERDÖS 等[2] 讨论了确定 k 距离的最大点集,记最大点集所含点数为 $g(k)$,给出 $g(1)=3$,$g(2)=5$,$g(3)=7$,$g(4)=9$,$g(5)=12$,对最多 5 距离集给出了详细的讨论,提出了两大猜想:

收稿日期:2015-10-17;修回日期:2015-12-15;责任编辑:张 军

基金项目:河北省自然科学基金(A2014208095)

作者简介:王 琦(1973—),女,河北承德人,讲师,硕士,主要从事组合数学方面的研究。

E-mail:wqi73@163.com

王 琦,丛 悦,高飞星.直径图为 11 圈的 7 距离集研究[J].河北科技大学学报,2016,37(2):146-153.

WANG Qi, CONG Yue, GAO Feixing. Research on 7-distance set with $DG(X_D)=C_{11}$[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology,2016,37(2):146-153.

$g(6)=13$且这样的 13 点集只有 3 个；确定 $g(k)(k\geqslant 7)$的最大点集只能是正三角形格集的点构成。文献[3]论证了 3 距离集的构造。SHINOHARA 在文献[1]论证了 12 点 5 距离集的构造唯一性。文献[4—7]中给出了 11 点 5 距离集的构造，7 点 4 距离集的构造，证明了最大 6 距离集为 13 点集的猜想，即 $g(6)=13$。在文献[7]中对直径图为圈 C_{2k-3}的 k 距离集进行了分析。相关的研究见文献[8—15]。本文对直径图进行了研究，设 X 是一个 7 距离集，如果 $DG(X_D)=C_{11}$，那么必有 $X_D=R_{11}$。

1　相关引理

引理 1[2]　设 D 为平面 n 点集 X 的直径，其中 $n\geqslant 3$，$m=|X_D|$，那么：

1)如果 $m\geqslant 3$，那么 X_D 的点是凸 m 边形的顶点；

2)如果 X_D 中去掉至少$\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$个点，那么直径 D 不存在，这里$\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$表示不小于$\frac{m}{2}$的最小整数。

引理 2[1]　在 X 中，设直径图 $G=DG(X)$。那么可以得到：

1)当 $k\geqslant 2$ 时，G 中不包含 C_{2k}，即 G 中只能包含奇圈。

2)G 中最多只能包含一个圈。

引理 3[4]　在平面点集 X 中，设 $X_D=\{1,2,\cdots,m\}$，$m=|X_D|$，m 个点逆时针顺序连续排列，$S\subset X_D$，$S=\{k,k+1,k+2,\cdots,k+l-1\}$。如果线段$[k,k+l-1]$是 S 中的最长线段，且 $d(k,k+i)<d(k,k+l-1)$，$i=1,2,\cdots,l-2$，那么 $d(k,k+1)<d(k,k+2)<d(k,k+3)<\cdots<d(k,k+l-1)\leqslant D$。

2　主要结论

定理　设 X 是 7 距离集，如果 $DG(X_D)=C_{11}$，那么 $X_D=R_{11}$。

证明　设 X 是一个 7 距离集，且 $D=d_1>d_2>d_3>d_4>d_5>d_6>d_7$，$DG(X_D)=C_{11}$。通过引理 1，可知 X_D 是一个凸集。设 $X_D=\{1,2,3,\cdots,11\}$，点 $1,2,3,\cdots,11$ 按逆时针连续排列。定义线段$[i,i+1]$为 X_D 的边，其中 $i\in X_D$。已知 $g(4)=9$，$g(5)=12$，因此 X_D 至少是 5 距离集。如果 X_D 是一个 5 距离集，那么 $X_D=R_{11}$，见文献[5]。如果 X_D 是一个 6 距离集，$DG(X_D)\neq C_{11}$，见文献[5]的定理 13。

下面讨论 X_D 是一个 7 距离集的情形。根据引理 3，可以得到 $d_7\leqslant d(x,x+1)\leqslant d_5$，其中 $x\in X_D$。可以断定 X_D 的边长不全部相等。事实上，如果 X_D 的所有边长相同，那么 X_D 中的所有点都共圆，于是 $X_D=R_{11}$，和 X_D 是一个 7 距离集不符。下面分 3 种情形来证明。

情形 1　X_D 的边长均不为 d_5。

如果 X_D 有 10 条边长度相等，那么它的所有点都在一个圆上，矛盾。于是 X_D 最多有 9 条边相等。

情形 1.1　X_D 中有 2 条边长度为 d_6 或 2 条边长度为 d_7(d_6 与 d_7 讨论类似，2 条边为 d_7 的讨论省略)。

设 X_D 中有 2 条边长度为 d_6。假设 $d(1,11)=d_6$，下面分 5 种类型讨论。

如果 $d(10,11)=d_6$，显然点 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 共圆。因为 $d(5,6)=d(6,7)$，那么点 1,5,7,11 共圆。于是点 5,6,10,11 共圆，即 $d_7=d(5,6)=d(10,11)=d_6$，矛盾。

如果 $d(9,10)=d_6$，那么点 1,2,3,4,7,8,9 共圆，点 1,2,6,8 共圆。为了叙述方便，下文中出现的 a,b 分别表示点 10,11。因为$\angle 21b=\angle ab1$，于是点 1,2,10,11 共圆。$\angle 1ba=\angle 9ab$，于是点 1,9,10,11 共圆。因此点 3,4,9,10 共圆，即 $d_7=d(3,4)=d(9,10)=d_6$，矛盾。

如果 $d(8,9)=d_6$，那么点 3,4,5,6,9,10,11 共圆，点 1,3,9,11 共圆。于是得到点 1,5,6,11 共圆，即 $d_6=d(1,11)=d(5,6)=d_7$，矛盾。

如果 $d(7,8)=d_6$，那么点 2,3,4,5,6,8,9,10,11 共圆。因为$\angle 678=\angle 987$，所以点 6,7,8,9 共圆。于是得到点 2,3,7,8 共圆，即 $d_6=d(7,8)=d(2,3)=d_7$，矛盾。

如果 $d(6,7)=d_6$，显然 X_D 中的所有点都在同一个圆上，即 $d_6=d(1,11)=d(5,6)=d_7$，矛盾。

情形 1.2　X_D 中有 3 条边长度为 d_6 或者 3 条边长度为 d_7(d_6 与 d_7 讨论类似，3 条边为 d_7 的讨论省略)。

X_D 中有 3 条边长度为 d_6。假设 $d(1,11)=d_6$。

情形 1.2.1　X_D 中至少有 2 条长度为 d_6 的边是相邻的。下面分 5 种类型讨论。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d_6$，那么点 1,2,3,4,7,8,9 共圆。由于$\angle 345=\angle 456=\angle 567$，得到点 3,4,

5,6,7共圆,且点3,5,9,10共圆。于是得到点4,5,9,10共圆,即 $d_6=d(9,10)=d(4,5)=d_7$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(8,9)=d_6$,那么点1,2,3,6,7,8共圆。因为∠235=∠653,所以点2,3,5,6共圆。于是可以得到点5,6,7,8共圆,即∠567=∠876,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(7,8)=d_6$,那么点2,3,4,5,8,9,10共圆。由于∠125=∠652,点1,2,5,6共圆。于是得到点3,4,5,6共圆,即∠345=∠456,和已知∠345≠∠456矛盾。

如果 $d(10,11)=d(6,7)=d_6$,那么点1,2,3,4,5,7,8,9,10共圆,点4,6,10,11共圆。$\angle 67a=\angle ba7$,所以点6,7,10,11共圆。于是可以得到点1,2,6,7共圆,即 $d_6=d(6,7)=d(1,2)=d_7$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(5,6)=d_6$,显然 X_D 中的所有点共圆,这意味着 $d_6=d(1,11)=d(6,7)=d_7$,矛盾。

情形1.2.2 X_D 中任意2条长度为 d_6 的边是不相邻的。下面分5种类型讨论。

如果 $d(9,10)=d(7,8)=d_6$,那么点4,5,6,10,11共圆。由于 $\angle 67a=\angle ba7$,点6,7,10,11共圆。于是可以得到点4,5,6,7共圆,即 $d(4,6)=d(5,7)$。然而已知∠456≠∠567,$d(4,6)\neq d(5,7)$,因此矛盾。

如果 $d(9,10)=d(6,7)=d_6$,由于 $\angle 21b<\angle 678$,$d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$,由引理3可得,$d(5,9)=d(6,10)=d_2$。已知 $\angle 549<\angle ab6$,得到 $d_2=d(5,9)\neq d(6,10)=d_2$,矛盾。

如果 $d(9,10)=d(5,6)=d_6$,那么 $\angle 21b<\angle 567$,因此 $d_5\leqslant d(5,7)<d(2,11)\leqslant d_4$,通过引理3可得,$d(4,11)=d(3,10)=d_2$。已知 $\angle 34a<\angle 45b$,那么 $d_2=d(4,11)\neq d(3,10)=d_2$,矛盾。

如果 $d(8,9)=d(5,6)=d_6$,于是 $\angle 567<\angle 21b$,得到 $d_5\leqslant d(5,7)<d(2,11)\leqslant d_4$。通过引理3可得,$d(2,9)=d(3,10)=d_2$。已知 $\angle 239<\angle 34a$,因此得到 $d_2=d(2,9)\neq d(3,10)=d_2$,矛盾。

如果 $d(8,9)=d(4,5)=d_6$,$\angle 9ab=\angle 567=\angle 234$,也就是说 $d(5,7)=d(9,11)=d(2,4)$,$d(3,7)=d(2,9)$。然而已知∠239≠∠327,即 $d(3,7)\neq d(2,9)$,矛盾。

情形1.3 X_D 中有4条长度为 d_6 或4条长度为 d_7 的边(d_6 与 d_7 讨论类似,4条边为 d_7 的讨论省略)。

X_D 中有4条长度为 d_6 的边。假设 $d(1,11)=d_6$。

情形1.3.1 X_D 中至少有3条长度为 d_6 的边是相邻的。下面分4种类型讨论。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(8,9)=d_6$,那么点1,2,3,4,5,6,7,8共圆,且点2,4,8,9共圆。于是可得点2,3,8,9共圆,即 $d_6=d(8,9)=d(2,3)=d_7$。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(7,8)=d_6$,那么点2,3,4,8,9共圆。因为∠219=∠891,所以点1,2,8,9共圆。且点1,3,7,8共圆。因此得到点1,2,7,8共圆,即 $d_6=d(7,8)=d(1,2)=d_7$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(6,7)=d_6$,$\angle 21b<\angle 678$,所以 $d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。通过引理3可得,$d(4,8)=d(5,9)=d_2$。然而∠549<∠438,这意味着 $d_2=d(5,9)\neq d(4,8)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(5,6)=d_6$,$\angle 567<\angle 21b$,所以 $d_5\leqslant d(5,7)<d(2,11)\leqslant d_4$。通过引理3可得,$d(3,10)=d(2,9)=d_2$。然而 $\angle 34a<\angle 239$,于是 $d_2=d(3,10)\neq d(2,9)=d_2$,矛盾。

情形1.3.2 X_D 中有2条长度为 d_6 的边是相邻的。下面分12种类型讨论。

如果 $d(10,11)=d(8,9)=d(7,8)=d_6$,那么 X_D 中所有点关于 $\perp 9a$ 对称,这里 $\perp 9a$ 表示线段 $[9,a]$ 的垂直平分线。且点4,5,6,7共圆,于是 $d(4,6)=d(5,7)$。同时点1,5,6,10共圆,即 $d(1,5)=d(6,10)$。$\angle 512=\angle 712-\angle 617-\angle 516=\angle 4a9-\angle 5a6-\angle 4a5=\angle 6a9$,于是 $\Delta 125\cong\Delta a96$,也就是说 $d(2,5)=d(6,9)$。$\angle 452=\angle 45a-\angle 251-\angle 15b-\angle b5a=\angle 761-\angle 96a-\angle a6b-\angle b6a=\angle 769$,于是 $d(2,4)=d(7,9)$,点2,4,7,9共圆。且点2,3,7,9共圆,点2,4,8,9共圆。可以得到点2,3,8,9共圆,即 $d_6=d(8,9)=d(2,3)=d_7$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(6,7)=d(7,8)=d_6$,那么点1,6,8,10共圆,点1,2,6,8共圆,点1,5,6,10共圆。于是点1,2,5,6,8,10共圆。并且点2,3,4,5,8,9,10共圆。因此可以得到点5,6,8,9共圆,这意味着∠568=∠985,然而 $\angle 568=\angle 56b+\angle 167-\angle 16b-\angle 768\neq\angle 389+\angle 287-\angle 283-\angle 786=\angle 985$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(6,7)=d(5,6)=d_6$,那么 X_D 中的所有点共圆,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(8,9)=d(6,7)=d_6$,$\angle 21b<\angle 678$,因此 $d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。通过引理3可得,$d(4,8)=d(5,9)=d_2$。然而∠438≠∠549,也就是说 $d_2=d(4,8)\neq d(5,9)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(8,9)=d(5,6)=d_6$,由于 $\angle 567<\angle 21b$,因此 $d_5\leqslant d(5,7)<d(2,11)\leqslant d_4$。通过引理3可得,$d(3,10)=d(2,9)=d_2$。然而 $\angle 239\neq\angle 34a$,也就是说 $d_2=d(3,10)\neq d(2,9)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(8,9)=d(4,5)=d_6$,$\angle 456<\angle 1ba$,因此 $d_5\leqslant d(4,6)<d(1,10)\leqslant d_4$。通过引理3可得,$d(3,10)=d(2,9)=d_2$。然而 $\angle 239\neq\angle 34a$,也就是说 $d_2=d(3,10)\neq d(2,9)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(8,9)=d(3,4)=d_6$,$\angle 234<\angle 789$,于是 $d_5\leqslant d(2,4)<d(7,9)\leqslant d_4$,通过引理 3 可得,$d(6,10)=d(5,9)=d_2$。然而$\angle 549\neq\angle 65a$,也就是说 $d_2=d(6,10)\neq d(5,9)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(8,9)=d(2,3)=d_6$,$\angle 789<\angle 123$,于是 $d_5\leqslant d(7,9)<d(1,3)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(3,10)=d(4,11)=d_2$。然而$\angle 34a\neq\angle 45b$,也就是说 $d_2=d(3,10)\neq d(4,11)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(7,8)=d(5,6)=d_6$,$\angle 567<\angle 21b$,于是 $d_5\leqslant d(5,7)<d(2,11)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(3,10)=d(4,11)=d_2$,然而$\angle 34a\neq\angle 45b$,也就是说 $d_2=d(3,10)\neq d(4,11)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(7,8)=d(3,4)=d_6$,那么$\angle 21b=\angle 234=\angle 678$,因此 $d(2,4)=d(6,8)=d(2,11)$,点 2,6,8,11 共圆,且点 1,3,7,8 共圆,点 3,4,7,8 共圆,点 1,3,4,11 共圆,点 7,8,10,11 共圆,点 4,6,10,11 共圆。于是可以得到点 1, 6, 7, 11 共圆,即 $d_6=d(1,11)=d(6,7)=d_7$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(7,8)=d(4,5)=d_6$,$\angle 456<\angle 21b$,那么 $d_5\leqslant d(4,6)<d(2,11)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(3,10)=d(4,11)=d_2$。然而$\angle 39a\neq\angle 4ab$,也就是说 $d_2=d(3,10)\neq d(4,11)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(6,7)=d(4,5)=d_6$,$\angle 21b<\angle 678$,那么 $d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(5,9)=d(4,8)=d_2$。然而$\angle 5a9\neq\angle 498$,也就是说 $d_2=d(5,9)\neq d(4,8)=d_2$,矛盾。

情形 1.3.3　X_D 中任意 2 条长度为 d_6 的边均不相邻。下面分 4 种类型讨论。

如果 $d(9,10)=d(7,8)=d(5,6)=d_6$,$\angle 1ba<\angle 678$,那么 $d_5\leqslant d(1,10)<d(6,8)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(5,9)=d(4,8)=d_2$。然而$\angle 549\neq\angle 438$,也就是说 $d_2=d(5,9)\neq d(4,8)=d_2$,矛盾。

如果 $d(9,10)=d(7,8)=d(4,5)=d_6$,$\angle 9ab<\angle 678$,那么 $d_5\leqslant d(9,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。根据引理 3 可得,$d(5,9)=d(4,8)=d_2$。然而$\angle 549\neq\angle 438$,也就是说 $d_2=d(5,9)\neq d(4,8)=d_2$,矛盾。

如果 $d(9,10)=d(6,7)=d(4,5)=d_6$,$\angle 21b<\angle 678$,那么 $d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。由引理 3 可得,$d(5,9)=d(4,8)=d_2$。然而$\angle 549\neq\angle 438$,也就是说 $d_2=d(5,9)\neq d(4,8)=d_2$,矛盾。

如果 $d(9,10)=d(6,7)=d(3,4)=d_6$,$\angle 21b<\angle 678$,那么 $d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。由引理 3 可得,$d(5,9)=d(6,10)=d_2$。然而$\angle 549\neq\angle 65a$,也就是说 $d_2=d(5,9)\neq d(6,10)=d_2$,矛盾。

情形 1.4　X_D 中有 5 条长度为 d_6 或者 5 条长度为 d_7 的边(d_6 与 d_7 讨论类似,5 条边为 d_7 的讨论省略)。

X_D 中有 5 条长度为 d_6 的边。假设 $d(1,11)=d_6$。

情形 1.4.1　X_D 中至少有 4 条长度为 d_6 的边是相邻的。下面分 4 种类型讨论。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(8,9)=d(7,8)=d_6$,那么点 1,2,3,4,5,6,7 共圆。且点 1,3,7,8 共圆。可以得到点 1,2,7,8 共圆,即 $d_6=d(7,8)=d(1,2)=d_7$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(8,9)=d(6,7)=d_6$,此时可以得到$\angle 21b<\angle 789$,那么 $d_5\leqslant d(2,11)<d(7,9)\leqslant d_4$。根据引理 3 可得,$d(7,11)=d(6,10)=d_2$。然而$\angle 71b\neq\angle 6ba$,也就是说 $d_2=d(4,11)\neq d(6,10)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(8,9)=d(5,6)=d_6$,此时可以得到$\angle 567<\angle 789$,那么 $d_5\leqslant d(5,7)<d(7,9)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(5,9)=d(6,10)=d_2$。然而$\angle 6ba\neq\angle 5a9$,也就是说 $d_2=d(5,9)\neq d(6,10)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(8,9)=d(4,5)=d_6$,此时可以得到$\angle 456<\angle 789$,那么 $d_5\leqslant d(4,6)<d(7,9)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(5,9)=d(6,10)=d_2$。然而$\angle 6ba\neq\angle 5a9$,也就是说 $d_2=d(5,9)\neq d(6,10)=d_2$,矛盾。

情形 1.4.2　X_D 中有 3 条长度为 d_6 的边是相邻的。下面分 9 种类型讨论。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(7,8)=d(6,7)=d_6$,$\angle 21b<\angle 1ba$,那么 $d_5\leqslant d(2,11)<d(1,10)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(2,9)=d(3,10)=d_2$。然而$\angle 34a\neq 239$,也就是说 $d_2=d(2,9)\neq d(3,10)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(7,8)=d(5,6)=d_6$,此时可以得到$\angle 1ba<\angle 9ab$,那么 $d_5\leqslant d(1,10)<d(9,11)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(2,9)=d(3,10)=d_2$。然而$\angle 34a\neq\angle 239$,也就是说 $d_2=d(2,9)\neq d(3,10)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(7,8)=d(4,5)=d_6$,此时可以得到$\angle 9ab<\angle 21b$,那么 $d_5\leqslant d(9,11)<d(2,11)\leqslant d_4$。根据引理 3 可得,$d(2,9)=d(3,10)=d_2$。然而$\angle 34a\neq\angle 239$,也就是说 $d_2=d(2,9)\neq d(3,10)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(9,10)=d(7,8)=d(3,4)=d_6$,此时可以得到$\angle 89a<\angle 1ba$,那么 $d_5\leqslant d(8,10)<$

$d(1,10)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(2,9)=d(3,10)=d_2$。然而$\angle 289\neq\angle 39a$，也就是说$d_2=d(2,9)\neq d(3,10)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(9,10)=d(7,8)=d(2,3)=d_6$，此时可以得到$\angle 123<\angle 678$，那么$d_5\leqslant d(1,3)<d(6,8)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(5,9)=d(4,8)=d_2$。然而$\angle 438\neq\angle 549$，也就是说$d_2=d(5,9)\neq d(4,8)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(9,10)=d(6,7)=d(5,6)=d_6$，此时可以得$\angle 21b<\angle 678$，那么$d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(5,9)=d(4,8)=d_2$。然而$\angle 438\neq\angle 549$，也就是说$d_2=d(5,9)\neq d(4,8)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(9,10)=d(6,7)=d(4,5)=d_6$，此时可以得到$\angle 21b<\angle 678$，那么$d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(6,10)=d(4,8)=d_2$。然而$\angle 438\neq\angle 65a$，也就是说$d_2=d(6,10)\neq d(4,8)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(9,10)=d(6,7)=d(3,4)=d_6$，此时得到$\angle 21b<\angle 678=\angle 234$，那么$d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)=d(2,4)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(5,9)=d(4,8)=d_2$，$d(5,8)=d(6,9)=d_3$，因此点4,5,6,8,9共圆。且点1,2,3,7,8,9共圆。类似的，$d(2,5)=d(1,4)=d_3$，$d(2,6)=d(1,5)=d_2$，点1,2,4,5,6共圆。可以得到点3,4,8,9共圆，即$d_6=d(3,4)=d(8,9)=d_7$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(9,10)=d(5,6)=d(4,5)=d_6$，那么$X_D$中的所有点共圆，矛盾。

情形1.4.3　X_D中有2条长度为d_6的边是相邻的。下面分12种类型讨论。

如果$d(10,11)=d(8,9)=d(7,8)=d(5,6)=d_6$，此时可以得到$\angle 1ba<\angle 789$，那么$d_5\leqslant d(1,10)<d(7,9)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(7,11)=d(6,10)=d_2$。然而$\angle 71b\neq\angle 6ba$，也就是说$d_2=d(7,11)\neq d(6,10)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(8,9)=d(7,8)=d(4,5)=d_6$，此时可以得到$\angle 456<\angle 21b$，那么$d_5\leqslant d(4,6)<d(2,11)\leqslant d_4$。根据引理3可得，$d(2,9)=d(3,10)=d_2$。然而$\angle 239\neq\angle 34a$，也就是说$d_2=d(2,9)\neq d(3,10)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(7,8)=d(6,7)=d(4,5)=d_6$，此时可以得到$\angle 456<\angle 789$，那么$d_5\leqslant d(4,6)<d(7,9)\leqslant d_4$，$d(7,9)=d(3,5)=d_4$。根据引理3可得，$d(1,5)=d(7,11)=d_2$。然而$\angle 5b1\neq\angle 76b$，也就是说$d_2=d(1,5)\neq d(7,11)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(7,8)=d(6,7)=d(3,4)=d_6$，$\angle 21b<\angle 789=\angle 345$，那么$d_5\leqslant d(2,11)<d(7,9)=d(3,5)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(1,5)=d(7,11)=d_2$。然而$\angle 5b1\neq\angle 76b$，也就是说$d_2=d(1,5)\neq d(7,11)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(6,7)=d(5,6)=d(3,4)=d_6$，此时可以得到$\angle 456<\angle 678$，那么$d_5\leqslant d(4,6)<d(6,8)\leqslant d_4$，通过引理3可得，$d(4,8)=d(5,9)=d_2$。然而$\angle 498\neq\angle 5a9$，也就是说$d_2=d(5,9)\neq d(4,8)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(8,9)=d(6,7)=d(4,5)=d_6$，此时可以得到$\angle 21b<\angle 89a$，那么$d_5\leqslant d(2,11)<d(8,10)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(7,11)=d(6,10)=d_2$。然而$\angle 71b\neq\angle 6ba$，也就是说$d_2=d(7,11)\neq d(6,10)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(8,9)=d(6,7)=d(3,4)=d_6$，此时可以得到$\angle 21b<\angle 678$，那么$d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(5,9)=d(6,10)=d_2$。然而$\angle 549\neq\angle 65a$，也就是说$d_2=d(5,9)\neq d(6,10)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(8,9)=d(6,7)=d(2,3)=d_6$，此时可以得到$\angle 21b<\angle 678$，那么$d_5\leqslant d(2,11)<d(6,8)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(5,9)=d(6,10)=d_2$。然而$\angle 549\neq\angle 65a$，也就是说$d_2=d(5,9)\neq d(6,10)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(8,9)=d(5,6)=d(3,4)=d_6$，此时可以得到$\angle 567<\angle 21b=\angle 345$，那么$d_5\leqslant d(5,7)<d(2,11)=d(3,5)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(1,5)=d(4,11)=d_2$。然而$\angle 5b1\neq\angle 4ab$，也就是说$d_2=d(1,5)\neq d(4,11)=d_2$，矛盾。

如果$d(10,11)=d(7,8)=d(5,6)=d(3,4)=d_6$，此时可得到$\angle 21b>\angle 456$，那么$d_5\leqslant d(4,6)<d(2,11)\leqslant d_4$。通过引理3可得，$d(2,9)=d(3,10)=d_2$。然而$\angle 389\neq\angle 49a$，也就是说$d_2=d(2,9)\neq d(3,10)=d_2$，矛盾。

如果 $d(10,11)=d(8,9)=d(5,6)=d(2,3)=d_6$,此时可以得到$\angle 567<\angle 123$,那么 $d_5\leqslant d(5,7)<d(1,3)\leqslant d_4$。通过引理 3 可得,$d(1,5)=d(4,11)=d_2$。然而$\angle 5b1\neq\angle 4ab$,也就是说 $d_2=d(1,5)\neq d(4,11)=d_2$,矛盾。

如果 $d(10,11)=d(8,9)=d(6,7)=d(5,6)=d_6$,此时可得到$\angle 21b<\angle 789$,那么 $d_5\leqslant d(2,11)<d(7,9)\leqslant d_4$。根据引理 3 可得,$d(7,11)=d(6,10)=d_2$。然而$\angle 6ba\neq\angle 71b$,也就是说 $d_2=d(7,11)\neq d(6,10)=d_2$,矛盾。

情形 1.4.4　X_D 中任意 2 条长度为 d_6 的边是不相邻的。

假设 $d(9,10)=d(7,8)=d(5,6)=d(3,4)=d_6$,此时可以得到$\angle 567<\angle 456$,那么 $d_5\leqslant d(5,7)<d(4,6)\leqslant d_4$。根据引理 3 可得,$d(2,6)=d(3,7)=d_2$。然而$\angle 327\neq\angle 216$,也就是说 $d_2=d(2,6)\neq d(3,7)=d_2$,矛盾。

情形 2　X_D 中仅存在一条长度为 d_5 的边。

假设 $d(1,2)=d_5$,那么根据引理 3 可以得到,$d(1,3)=d(2,11)=d_4$,$d(1,4)=d(3,11)=d(2,10)=d_3$,$d(1,5)=d(4,11)=d(3,10)=d(2,9)=d_2$。

情形 2.1　$d(2,3)=d(1,11)=x$。

由于 $d(1,3)=d(2,11)$,那么$\angle 123=\angle 21b$,因此 $d(6,7)=d(7,8)$。$\angle 314=\angle 31b-\angle 41b=\angle 32b-\angle 32a=\angle a2b$,于是 $d(3,4)=d(10,11)$。同理,由于$\angle 4b5=\angle 93a$,$d(4,5)=d(9,10)$。$\angle 5b6=\angle 839$,那么 $d(5,6)=d(8,9)$。X_D 中的所有点关于$\perp 12$ 对称,这里$\perp 12$ 表示线段[1,2]的垂直平分线。

情形 2.1.1　假设 $d(2,3)=d(1,11)=d_6$。

假设 $d(3,4)=d(6,7)=d_6$。如果 $d(4,5)=d_6$,$d(5,6)=d_7$,此时可以得到$\angle 34a<\angle 239$,即 $d_2=d(2,9)>d(3,10)=d_2$,矛盾。如果 $d(4,5)=d_7$,$d(5,6)=d_6$,那么$\angle 34a>\angle 239$,可以得到 $d_2=d(2,9)<d(3,10)=d_2$,矛盾。如果 $d(4,5)=d_7$,$d(5,6)=d_7$,可以得到$\angle 672<\angle 327<\angle 34a<\frac{\pi}{2}$,于是 $d_3\leqslant d(2,6)<d(3,7)<d(3,10)=d_2$,矛盾。如果 $d(4,5)=d_6$,$d(5,6)=d_6$,那么 X_D 中不存在长度为 d_7 的边,不成立。

假设 $d(3,4)=d_6$,$d(6,7)=d_7$。如果 $d(4,5)=d_6$,$d(5,6)=d_7$,那么可以得到$\angle 34a<\angle 239$,即 $d_2=d(2,9)>d(3,10)=d_2$,矛盾。如果 $d(4,5)=d_7$,$d(5,6)=d_6$,那么$\angle 34a>\angle 239$,可以得到 $d_2=d(2,9)<d(3,10)=d_2$,矛盾。如果 $d(4,5)=d_7$,$d(5,6)=d_7$,因此可以得到$\angle 45b<\angle 549$,于是 $D>d(5,9)>d(4,11)=d_2$,矛盾。如果 $d(4,5)=d_6$,$d(5,6)=d_6$,$\angle 239<\angle 327$,也就是说 $D>d(3,7)>d(2,9)=d_2$,不成立。

假设 $d(3,4)=d_7$,$d(6,7)=d_6$。如果 $d(4,5)=d_6$,$d(5,6)=d_7$,那么可以得到$\angle 561<\angle 65a$,即 $D>d(6,10)>d(1,5)=d_2$,矛盾。如果 $d(4,5)=d_7$,$d(5,6)=d_6$,那么$\angle 561<\angle 65a$,可以得到 $D>d(6,10)>d(1,5)=d_2$,矛盾。如果 $d(4,5)=d_7$,$d(5,6)=d_7$,可以得到$\angle 561<\angle 65a$,于是 $D>d(6,10)>d(1,5)=d_2$,矛盾。如果 $d(4,5)=d_6$,$d(5,6)=d_6$,$\angle 561<\angle 65a$,也就是说 $D>d(6,10)>d(1,5)=d_2$,不成立。

假设 $d(3,4)=d_7$,$d(6,7)=d_7$。已知 $d(1,2)=d_2$,$d_6=d(1,11)>d(10,11)=d_7$,因此得到$\angle 561<\angle 65a$。也就是说 $D>d(6,10)>d(1,5)=d_2$,矛盾,因此假设不成立。

综上可得,当 $d(2,3)=d(1,11)=d_6$ 时不成立。

情形 2.1.2　假设 $d(2,3)=d(1,11)=d_7$。

假设 $d(3,4)=d_6$。如果 $d(4,5)=d_7$,那么$\angle 5a9>\angle 39a$,于是得到 $D>d(5,9)>d(3,10)=d_2$,矛盾,因此 $d(4,5)=d_6$。如果 $d(5,6)=d_7$,那么$\angle 6ba>\angle 4ab$,于是得到 $D>d(6,10)>d(4,11)=d_2$,矛盾,因此 $d(5,6)=d_6$。如果 $d(6,7)=d_7$,那么$\angle 71b>\angle 5b1$,于是得到 $D>d(7,11)>d(1,5)=d_2$,矛盾,因此 $d(6,7)=d_6$。然而此时可以得到$\angle 678<\angle 89a<\angle 789$,那么 $d_5\leqslant d(6,8)<d(8,10)<d(7,9)\leqslant d_4$,矛盾。因此 $d(3,4)=d_7$。

假设 $d(4,5)=d_6$。如果 $d(5,6)=d_7$,那么$\angle 438>\angle 34a$,也就是说 $D>d(4,8)>d(3,10)=d_2$,矛盾,因此 $d(5,6)=d_6$。如果 $d(6,7)=d_7$,那么$\angle 71b>\angle 5b1$,也就是说 $D>d(7,11)>d(1,5)=d_2$,矛盾,因此 $d(6,7)=d_6$。此时可以得到$\angle 678<\angle 789$,即 $d_5\leqslant d(6,8)<d(7,9)\leqslant d_4$。由引理 3 可得 $d(5,9)=d(4,11)=d_2$,然而由于$\angle 4ab>\angle 5a9$,所以 $d_2=d(4,11)>d(5,9)=d_2$,矛盾。因此 $d(4,5)=d_7$。

假设 $d(5,6)=d_6$。如果 $d(6,7)=d_7$,那么$\angle 71b>\angle 1b5$,也就是说 $D>d(7,11)>d(1,5)=d_2$。如果

$d(6,7)=d_6$，那么$\angle 789>\angle 678$，于是可以得到 $d_5\leqslant d(6,8)<d(7,9)\leqslant d_4$。根据引理 3 可得，$d(6,10)=d(4,11)=d_2$，然而$<6ba<\angle 4ab$，得到 $d_2=d(4,11)>d(6,10)=d_2$，矛盾。因此 $d(5,6)=d_7$。

假设 $d(6,7)=d_6$。已知 $d(2,3)=d(3,4)=d(4,5)=d(5,6)=d_7$，那么点 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11 在同一个圆上。且 $d(6,8)>d(1,2)$，那么可以得到 $d(6,8)=d_4$。如果 $d(5,7)=d(7,9)=d_4$，那么 $d(1,3)=d(7,9)=d_4$，于是点 1,3,7,9 共圆。因此可以得到 X_D 中的所有点共圆，即 $d_5=d(1,2)=d(7,8)=d_6$，矛盾。因此 $d(5,7)=d(7,9)=d_5$。如果 $d(4,6)=d(8,10)=d_5$，$\angle 456=\angle 234$，于是 $d(4,6)=d(2,4)=d_5$，且 $d(7,9)=d_5$，点 2,4,7,9 共圆。因此可以得到 X_D 中的所有点共圆，即 $d_5=d(1,2)=d(7,8)=d_6$。因此 $d(4,6)=d(8,10)=d_6$。已知 $d(6,8)=d_4$，因为$\angle 327<\angle 239$，所以 $d_2=d(2,9)>d(3,7)\geqslant d_3$。于是可以得到 $d(4,7)=d(6,8)=d_4$，$d(4,6)=d(6,7)=d(7,8)=d_6$。所以点 4，6，7，8 共圆。那么 X_D 中的所有点共圆，即 $d_5=d(1,2)=d(7,8)=d_6$，矛盾。因此 $d(6,7)=d_7$。

到此为止，推得 $d(3,4)=d(4,5)=d(5,6)=d(6,7)=d_7$，从而 X_D 中的所有点共圆，即 $d_5=d(1,2)=d(7,8)=d_7$，矛盾。

综上可得，当 $d(2,3)=d(1,11)=d_7$ 时不成立。

情形 2.2　$d(2,3)\neq d(1,11)$。

此时假设 $d(2,3)=d_6$，$d(1,11)=d_7$（如果 $d(2,3)=d_7$，$d(1,11)=d_6$，证明类似）。

如果 $d(3,4)=d_7$，那么$\angle 289<\angle 498$，$D>d(4,8)>d(2,9)=d_2$，矛盾，因此 $d(3,4)=d_6$。如果 $d(4,5)=d_7$，那么$\angle 39a<\angle 5a9$，$D>d(5,9)>d(3,10)=d_2$，矛盾，因此 $d(4,5)=d_6$。如果 $d(5,6)=d_7$，那么$\angle 4ab<\angle 6ba$，$D>d(6,10)>d(4,11)=d_2$，矛盾，因此 $d(5,6)=d_6$。如果 $d(6,7)=d_7$，那么$\angle 5b1<\angle 71b$，$D>d(7,11)>d(5,1)=d_2$，矛盾。因此 $d(6,7)=d_6$。

如果 $d(10,11)=d_6$，那么$\angle 567>\angle 456$。由引理 3 可得 $d_5\leqslant d(4,6)<d(5,7)\leqslant d_4$。如果 $d(9,10)=d_7$，由引理 3 可得 $d(5,9)=d(4,11)=d_2$，然而$\angle 45b<\angle 549$，即 $d_2=d(4,11)<d(5,9)=d_2$，矛盾，因此 $d(9,10)=d_6$。同理 $d(8,9)=d(7,8)=d_6$。此时$\angle 678<\angle 789<\angle 567$，那么 $d_5\leqslant d(6,8)<d(7,9)<d(5,7)\leqslant d_4$，矛盾。因此 $d(10,11)=d_7$。

如果 $d(9,10)=d_6$，那么$\angle 456>\angle 345$。由引理 3 可得，$d_5\leqslant d(3,5)<d(4,6)\leqslant d_4$。如果 $d(8,9)=d_7$，根据引理 3 可得，$d(3,10)=d(4,8)=d_2$，然而$\angle 438>\angle 34a$，即 $d_2=d(3,10)<d(4,8)=d_2$，矛盾，因此 $d(8,9)=d_6$。如果 $d(7,8)=d_7$，那么$\angle 239<\angle 327$，得到 $d_2=d(2,9)<d(3,7)<D$，矛盾，因此 $d(7,8)=d_6$。此时$\angle 678<\angle 789<\angle 567$，那么 $d_5\leqslant d(6,8)<d(7,9)<d(5,7)\leqslant d_4$，矛盾。因此 $d(9,10)=d_7$。

如果 $d(8,9)=d_6$，那么$\angle 234<\angle 345$，于是 $d_5\leqslant d(2,4)<d(3,5)\leqslant d_4$。如果 $d(7,8)=d_7$，根据引理 3 可得，$d(2,9)=d(3,7)=d_2$。然而$\angle 327>\angle 239$，也就是说 $d_2=d(2,9)<d(3,7)=d_2$，矛盾，因此 $d(7,8)=d_6$。此时$\angle 678<\angle 789<\angle 567$，那么 $d_5\leqslant d(6,8)<d(7,9)<d(5,7)\leqslant d_4$，矛盾。因此 $d(8,9)=d_7$。

如果 $d(7,8)=d_6$，那么$\angle 678<\angle 456$，于是 $d_5\leqslant d(6,8)<d(4,6)\leqslant d_4$。根据引理 3 可得，$d(2,9)=d(3,7)=d_2$。然而$\angle 327>\angle 239$，即 $d_2=d(3,7)<d(2,9)=d_2$，矛盾。如果 $d(7,8)=d_7$ 时，那么点 1，7，8，9，10，11 共圆。因为 $d(5,6)=d(6,7)$，点 1,5,7,11 共圆，且点 2,3,4,5,6,7 在同一个圆上。点 3,5,9,10 共圆，点 1,5,6,10 共圆。于是得到 X_D 中的所有点共圆，即 $d_5=d(1,2)<d(7,8)=d_7$，矛盾。

因此当 $d(2,3)\neq d(1,11)$时不成立。

情形 3　X_D 中存在至少 2 条长度为 d_5 的边。

假设 $d(1,2)=d_5$，那么根据引理 3 可以得到，$d(1,3)=d(2,11)=d_4$，$d(1,4)=d(3,11)=d(2,10)=d_3$，$d(1,5)=d(4,11)=d(3,10)=d(2,9)=d_2$。

情形 3.1　假设 $d(6,7)=d_5$（如果 $d(7,8)=d_5$ 证明类似）。

通过引理 3 可得，$d(5,7)=d(6,8)=d_4$，$d(4,7)=d(5,8)=d(6,9)=d_3$，$d(3,7)=d(4,8)=d(5,9)=d(6,10)=d_2$。由于$\angle 567=\angle 176-\angle 175=\angle 712-\angle 713=\angle 213$，得到 $\Delta 137\cong\Delta 751$，因此 $d(2,3)=d(5,6)$。由于$\angle 314=\angle 317-\angle 417=\angle 571-\angle 471=\angle 475$，可以得到 $d(3,4)=d(4,5)$。由于$\angle 12b=\angle 126-\angle b26=\angle 762-\angle 862=\angle 768$，因此 $d(1,11)=d(7,8)$。由于$\angle 869=\angle 862-\angle 962=\angle b26-\angle a26=\angle a2b$，因此 $d(10,11)=d(8,9)$。由于$\angle 849=\angle 843-\angle 943=\angle a34-\angle 934=\angle 93a$，因此 $d(9,10)=d(8,9)$。由于$\angle 738=\angle 732-\angle 832=\angle 923-\angle 823=\angle 928$，因此 $d(7,8)=d(8,9)$。由于$\angle 4b5=\angle 4ba-\angle 5ba=\angle 6ab-\angle 5ab=\angle 5a6$，因此 $d(4,5)=d(5,6)$。于是可以得到 $d(2,3)=d(3,4)=d(4,5)=d(5,6)$，$d(7,8)=d(8,9)=d(9,10)=d(1,11)$。

如果 $d(2,3)=d_5$,那么 X_D 中的所有点共圆,此时 X_D 中仅存在长度为 d_5 的边,因此 $d(2,3)\leqslant d_6$。同理可得,$d(7,8)\leqslant d_6$。如果 $d(2,3)=d(7,8)$,那么 X_D 中的所有点共圆,即 $d_5=d(1,2)<d(7,8)\leqslant d_6$,矛盾。因此 $d(2,3)\neq d(7,8)$。如果 $d(2,3)=d_7$,$d(7,8)=d_6$。那么点 2,3,4,5,6 共圆。点 1,7,8,9,10,11 共圆。根据引理 3 可得,$d_3\leqslant d(7,11)\leqslant d_2$。如果 $d(1,5)=d(7,11)=d_2$,那么点 1,5,7,11 共圆。可以得到 X_D 中的所有点共圆,矛盾,因此 $d(7,11)=d_3$。$d(6,9)=d_3$,$d(9,11)=d(6,7)=d_5$,因此点 6,7,9,11 共圆。可以得到 X_D 中的所有点共圆,即 $d_5=d(1,2)=d(7,8)=d_6$,矛盾。如果 $d(2,3)=d_6$,$d(7,8)=d_7$。那么 $\angle 321>\angle 678>\frac{\pi}{2}$,然而 $d(2,3)>d(7,8)$,这意味着 $d_4=d(1,3)>d(6,8)=d_4$,矛盾。因此 $d(6,7)\neq d_5$。

情形 3.2　假设 $d(5,6)=d_5$(如果 $d(8,9)=d_5$,证明类似)。

已知 $d(6,7)\neq d_5$,因此 $d(5,6)>d(6,7)$。然而 $\angle 1b5<\angle b17$,即 $d_2=d(1,5)<d(7,11)<D$,矛盾。因此 $d(5,6)\neq d_5$。

情形 3.3　假设 $d(4,5)=d_5$(如果 $d(9,10)=d_5$,证明类似)。

已知 $d(5,6)\neq d_5$,因此 $d(4,5)>d(5,6)$。然而 $\angle 4ab<\angle 6ba$,即 $d_2=d(4,11)<d(6,10)<D$,矛盾。因此 $d(4,5)\neq d_5$。

情形 3.4　假设 $d(3,4)=d_5$(如果 $d(10,11)=d_5$,证明类似)。

已知 $d(4,5)\neq d_5$,因此 $d(3,4)>d(4,5)$。然而 $\angle 39a<\angle 5a9$,即 $d_2=d(3,10)<d(5,9)<D$,矛盾。因此 $d(3,4)\neq d_5$。

情形 3.5　假设 $d(2,3)=d_5$(如果 $d(1,11)=d_5$,证明类似)。

已知 $d(3,4)\neq d_5$,因此 $d(2,3)>d(3,4)$。然而 $\angle 289<\angle 498$,即 $d_2=d(2,9)<d(4,8)<D$,矛盾,因此 $d(2,3)\neq d_5$。

综上可得,$DG(X_D)$中不存在 2 条长度为 d_5 的边。

定理 1 的证明完成。

3　结　语

文献[7]对直径图为圈的 k 距离集进行了研究,由文献[1]知这样的圈只能为偶圈。文献[7]中提出猜想:当 k 距离集的直径图 $DG(X_D)=C_{2k-3}$时,直径图的顶点集 $X_D=R_{2k-3}$。当 3 距离集的直径图 $DG(X_D)=C_3$ 时,显然有 $X_D=R_3$;当 4 距离集的直径图 $DG(X_D)=C_5$ 时,由文献[6]可得 $X_D=R_5$ 以及引理 6 提出的 2 类构型;文献[7]中给出了 $k=5,6$ 时猜想的正确证明。本文证明当 $k=7$ 时,猜想正确,但论文证明分类进行,证明方法对 $k\geqslant 8$ 的情形显然不适宜,期望在后续对较大 k 的研究中,能够发现更加行之有效的办法。

参考文献/References:

[1] SHINOHARA M. Uniqueness of maximum planar five-distance sets [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(14): 3048-3055.
[2] ERDÖS P, FISHBURN P. Maximum planar sets that determine k-distance [J]. Discrete Mathematics, 1996, 160(1/2/3): 115-125.
[3] SHINOHARA M. Classification of three-distance sets in two dimensional euclidean space [J]. European Journal of Combinatorics, 2004, 25(7): 1039-1058.
[4] WEI X. Classification of eleven-point five-distance sets in the plane [J]. Ars Combinatoria, 2011, 102: 505-515.
[5] WEI X. A proof of Erdos-Fishburn's conjecture for $g(6)=13$[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2012, 19(4): 38.
[6] LAN W, WEI X. Classification of four-distance seven-point sets in the plane [J]. Mathematical Notes, 2013, 93(4): 510-522.
[7] WEI X. Distance sets with diameter graph being cycle [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2014, 18(6): 1981-1990.
[8] FISHBURN P. Convex polygons with few intervertex distance [J]. Computational Geometry, 1995, 5(2): 65-93.
[9] ALTMAN E. On a problem of Erdos P[J]. American Mathematical Monthly, 1963, 70(2): 148-157.
[10] 魏祥林,张玉琴. 一类 4-等腰 6 元集[J]. 河北师范大学学报(自然科学版),2004, 28(5): 455-456.
WEI Xianglin, ZHANG Yuqin. A type of 4-isosceles set with 6-point[J]. Journal of Hebei Normal University(Natural Science Edition), 2004, 28(5): 455-456.
[11] CHUNG F R K, SZEMEREDI E, TROTTER W. The number of different distance determined by a set of points in the euclidean plane [J]. Discrete & Computational Geometry, 1992, 7(1): 1-11.
[12] ERDÖS P. On sets of distance of n points [J]. The American Mathematical Monthly, 1970, 77(7): 738-740.
[13] ERDÖS P, FISHBURN P. Convex nonagons with five intervertex distance [J]. Geometria Dedicata, 1996, 60(3): 317-332.
[14] NOZAKI H, SHINOHRAR M. On a generalization of distance sets [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 2010, 117(7): 810-826.
[15] KIDO H. Classification of isosceles 7-point 3-distance sets in 3-dimensional Euclidean space [J]. European Journal of Combinatorics, 2007, 28: 685-704.