文章编号:1008-1542(2015)06-0587-06 doi:10.7535/hbkd.2015yx06006

带有治疗项的 SIS 反应扩散传染病模型动力学分析

闫卫平,吴素赟

(山西大学数学科学学院,山西太原 030006)

摘 要:考虑了一类带有饱和治疗项的 SIS 反应扩散传染病模型。根据最小特征值得到疾病流行阈值——基本再生数,当基本再生数 $R_0<1$ 时,疾病的无病平衡点局部稳定;当 $R_0>1$ 时,无病平衡点不稳定且存在地方病平衡点。通过数值模拟,讨论了治疗项对疾病传播的影响。当疾病流行时,加强治愈率可以有效控制疾病的发展,然而扩大医院规模会促使疾病更大规模的流行。

关键词:微分动力系统;SIS 反应扩散传染病模型;治疗项;基本再生数;无病平衡点;地方病平衡点

中图分类号:O175.4 **MSC(2010)主题分类**:34N05 **文献标志码**:A

A dynamics analysis of an SIS epidemic reaction-diffusion model with treatment

YAN Weiping, WU Suyun

(School of Mathematical Science, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China)

Abstract: In this paper, we study the SIS epidemic reaction-diffusion model with the saturated treatment. We obtain the prevalence threshold value of disease, namely the basic reproduction number R_0, based on the least eigenvalue. We have proved that the unique disease-free equilibrium is local stable when $R_0<1$, while the disease-free equilibrium is unstable and the endemic equilibrium exists when $R_0>1$. Through numerical simulation, we discuss the influence of treatment on prevalence of disease. When disease outbreaks, it is efficient to increase cure rate for the control of the disease, while expanding the scale of hospitals will cause even more prevalence of the disease.

Keywords: differential dynamic system; SIS epidemic reaction-diffusion model; treatment; basic reproduction number; disease-free equilibrium; endemic equilibrium

利用数学模型研究传染病具有重要的实际意义[1-2]。到目前为止,传染病模型多为常微分方程模型,然而传染病的流行不仅随时间演化,也与空间位置有关[3]。考虑到疾病传播的空间异质性,ALLEN 等在文献[4]中考虑了以下 SIS 反应扩散传染病模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial t}=d_S\Delta S-\dfrac{\beta(x)SI}{S+I}+\gamma(x), & x\in\Omega,t>0,\\ \dfrac{\partial I}{\partial t}=d_I\Delta I-\dfrac{\beta(x)SI}{S+I}+\gamma(x), & x\in\Omega,t>0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial n}=\dfrac{\partial I}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,t>0,\end{cases}$$

收稿日期:2015-08-01;修回日期:2015-09-26;责任编辑:张 军

基金项目:国家自然科学基金(11301490)

作者简介:闫卫平(1963—),男,山西绛县人,教授,博士,主要从事微分方程与动力系统方面的研究。

E-mail:yanwp@sxu.edu.cn

闫卫平,吴素赟.带有治疗项的 SIS 反应扩散传染病模型动力学分析[J].河北科技大学学报,2015,36(6):587-592.

YAN Weiping, WU Suyun. A dynamics analysis of an SIS epidemic reaction-diffusion model with treatment[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2015, 36(6): 587-592.

并证明了当基本再生数$R_0<1$时，疾病的无病平衡点全局稳定，当$R_0>1$时，地方病平衡点存在且唯一。随后，PENG在文献[5]及文献[6]中验证了在一定条件下，以上模型的地方病平衡点是全局稳定的。众所周知，治疗是影响疾病传播的主要因素之一[7-8]，诸多文献中讨论了空间均匀下治疗项对疾病的影响[9-11]，但至今研究加入治疗项的反应扩散传染病模型的文献很少。基于以上研究动态，本文将考虑一类带有饱和治疗项的SIS反应扩散传染病模型。

1 模型的建立

假设$\Omega\in R^m(m\geqslant 1)$为有界区域且满足当$m>1$时具有光滑边界，带有饱和治疗项的SIS反应扩散传染病模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial t}=-\dfrac{\beta(x)SI}{S+I}+\dfrac{a(x)I}{1+b(x)I}+d_S\Delta S, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\partial I}{\partial t}=\dfrac{\beta(x)SI}{S+I}-\dfrac{a(x)I}{1+b(x)I}+d_I\Delta I, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial n}=\dfrac{\partial I}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\end{cases}\tag{1}$$

式中：$S(x,t)$，$I(x,t)$分别表示易感者和染病者在t时刻x处的密度；ΔS，ΔI分别表示易感者和染病者的扩散；d_S，d_I代表相应的扩散系数。疾病传染为标准发生率$\beta(x)SI/(S+I)$，其中$\beta(x)$为传染率系数。假设疾病无法自身恢复，只能通过治疗达到恢复。治疗函数形式多样[10]，考虑到初始时刻医疗治愈的局限性和最终治疗的饱和性，选取饱和治疗函数[12]$a(x)I/(1+b(x)I)$，其中：$a(x)$代表医院治愈率；$b(x)$为医院最大治疗规模；$\beta(x)$，$a(x)$，$b(x)$均为空间异质的正函数，且满足在$x\in\bar{\Omega}$内Hölder连续(若存在某个$0<\alpha\leqslant 1$，及常数M，使得$u(x)$在$\bar{\Omega}$内满足：$|u(x_1)-u(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^{\alpha}$，$\forall x_1,x_2\in\Omega$成立，称$u(x)$在$\bar{\Omega}$内Hölder连续。记$\beta(x)=\beta$，$a(x)=a$，$b(x)=b$，边界条件为Neumann边界条件，$\boldsymbol{n}$表示边界的单位外法向量。定义初始条件，$\int_\Omega[S(x,0)+I(x,0)]\mathrm{d}x=N$，$\int_\Omega I(x,0)\mathrm{d}x>0$。由Green公式，总人数为常数$\int_\Omega[S(x,t)+I(x,t)]\mathrm{d}x=N$，$t>0$，且$\|S(x,t)\|_{L^1(\Omega)}$和$\|I(x,t)\|_{L^1(\Omega)}$在$t>0$时有界。

考虑模型(1)的平衡解，即满足以下方程的解，

$$\begin{cases}-\dfrac{\beta(x)SI}{S+I}+\dfrac{a(x)I}{1+b(x)I}+d_S\Delta S=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\beta(x)SI}{S+I}-\dfrac{a(x)I}{1+b(x)I}+d_I\Delta I=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial n}=\dfrac{\partial I}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0。\end{cases}\tag{2}$$

传染病的研究中，通常在乎2类平衡点，第1类是无病平衡点，此类平衡点的特征是染病者人数为零；第2类是地方病平衡点，此类平衡点中易感者与染病者共存。方便起见，记无病平衡点为$(\hat{S},0)$，地方病平衡点为$(\tilde{S},\tilde{I})$。

引理1 模型(1)存在唯一的无病平衡点$(\hat{S},0)$，且$\hat{S}\equiv N/|\Omega|$。

证明 显然$(\hat{S},0)=(N/|\Omega|,0)$是一个无病平衡点。若存在另一个无病平衡点$(\hat{S}',0)$，代入式(2)中，有$\Delta\hat{S}'=0$，$x\in\Omega$，$\dfrac{\partial\hat{S}'}{\partial n}=0$，$x\in\partial\Omega$。由最大值定理[13]可得，$\hat{S}'$在$\Omega$内为常数。总人数恒定，$\int_\Omega\hat{S}'(x,t)\mathrm{d}x=N$，$t>0$。故$\hat{S}'=N/|\Omega|$，从而得$\hat{S}\equiv N/|\Omega|$，其中$|\Omega|$为$\Omega$的表面积。

2 无病平衡点的局部稳定性

2.1 基本再生数

当基本再生数$R_0<1$时，一个病人病程中感染人数小于1，疾病自然消亡；反之，疾病将流行[14-15]。WANG等在文献[16]中给出针对反应扩散传染病模型的基本再生数计算方法，本文将通过计算最小特征值给出模型(1)的基本再生数。

首先，将模型(1)在无病平衡点处进行线性化：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S'}{\partial t}=-(\beta-a)I'+d_S\Delta S', & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\partial I'}{\partial t}=(\beta-a)I'+d_I\Delta I', & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\partial S'}{\partial n}=\dfrac{\partial I'}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $S'=S-\hat{S}, I'=I$。假设以上线性系统的解为 $(S',I')=(\mathrm{e}^{-\lambda t}\phi(x),\mathrm{e}^{-\lambda t}\psi(x))$，将此代入式(3)，整理后得到：

$$\begin{cases}-(\beta-a)\psi+d_S\Delta\phi=-\lambda\phi, & x\in\Omega,\\ (\beta-a)\psi+d_I\Delta\psi=-\lambda\psi, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n}=\dfrac{\partial\psi}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{4a}$$

由总人数不变得 $\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_\Omega[\phi(x)+\psi(x)]\mathrm{d}x=\int_\Omega(S'+I')\mathrm{d}x=\int_\Omega(S-\hat{S}+I)\mathrm{d}x=0$，从而有：

$$\int_\Omega[\phi(x)+\psi(x)]\mathrm{d}x=0。\tag{4b}$$

根据 Krein-Rutman 定理和特征值的性质[17-18]，如果 (λ,ϕ) 是系统(4a)中第 2 个式子不为零的解，那么 λ 是实的，且存在唯一的最小特征值 λ^*，使得对应的标准特征函数 $\psi^*>0$ 在 $x\in\Omega$ 内恒成立。由此有：

$$\begin{cases}(\beta-a)\psi^*+d_I\Delta\psi^*=-\lambda^*\psi^*, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\psi^*}{\partial n}=0, & x\in\Omega,\end{cases}\tag{5}$$

由椭圆算子特征值公式，得到式(5)的最小特征值为

$$\lambda^*=\inf\{\int_\Omega[d_I\mid\nabla\varphi\mid^2+(a-\beta)\varphi^2]:\varphi\in H^1(\Omega),\int_\Omega\varphi^2\mathrm{d}x=1\}。\tag{6}$$

引理 2　模型(1)的基本再生数为

$$R_0=\sup_{\varphi\in H^1(\Omega),\varphi\neq0}\left\{\frac{\int_\Omega\beta\varphi^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega(d_I\mid\nabla\varphi\mid^2+a\varphi^2)\mathrm{d}x}\right\},\tag{7}$$

且 R_0-1 与 λ^* 有相反的符号。

以上引理可由文献[16]中的定理 3.1 和定理 3.2 直接给出，显然这 2 个定理中条件 A1—A4，A6 成立，这就保证了 R_0 与最小特征值的关系。

2.2　无病平衡点的局部稳定性

定理 1　当 $R_0<1$ 时，模型(1)的无病平衡点局部稳定；当 $R_0>1$ 时，无病平衡点不稳定。

证明　i) 先证当 $R_0<1$ 时，模型(1)无病平衡点是局部稳定的。

要证无病平衡点是局部稳定的，只需证明 $R_0<1$ 时，式(4a)和式(4b)的任意一个解 (λ,ϕ,ψ) 中至少 1 个 ϕ,ψ 不为零且 $\mathrm{Re}(\lambda)$ 为正[19-21]。应用反证法，假如 $R_0<1,(\lambda,\phi,\psi)$ 是式(4a)和式(4b)的一个解，至少 1 个 ϕ,ψ 不为零，$\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant0$。

若 $\psi\equiv0$，则有 $d_S\Delta\phi=-\lambda\phi, x\in\Omega$。由 Laplace 算子特征值的性质知，$\lambda$ 为非负实数，从而只有 $\lambda=0$。由最大值定理可得，$d_S\Delta\phi=0$ 时只有 $\phi\equiv\phi_0$，其中 ϕ_0 为一固定常数。又 $\int_\Omega[\phi(x)+\psi(x)]\mathrm{d}x=0$，知 $\int_\Omega\phi(x)\mathrm{d}x=0$，矛盾。所以 ϕ,ψ 均不为零。λ 是实的，且 $\lambda^*\leqslant\lambda\leqslant0$，由引理 2 知 $R_0\geqslant1$，矛盾。故 $R_0<1$ 时，无病平衡点是局部线性稳定的。

ii) 再证 $R_0>1$ 时，模型(1)无病平衡点不稳定。

只需找到式(4)的一个解 (λ,ϕ,ψ)，使得 $\psi>0$，$\mathrm{Re}(\lambda)<0$ 成立。当 $R_0>1$ 时，由引理 2 知，式(5)中 $\lambda^*<0,\psi^*>0$。将 (λ^*,ψ^*) 代入(4a)中第 1 个式子，则满足方程：

$$\begin{cases}-(\beta-a)\psi^*+d_S\Delta\phi=-\lambda^*\phi, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的解唯一，记为 ϕ^*，将$(\lambda^*,\phi^*,\psi^*)$代入式(4a)，

$$\begin{cases}-(\beta-a)\psi^*+d_S\Delta\phi^*=-\lambda\phi^*, & x\in\Omega,\\ (\beta-a)\psi^*+d_I\Delta\psi^*=-\lambda\psi^*, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\phi^*}{\partial n}=\dfrac{\partial\psi^*}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

上下2式相加，两边在 Ω 上积分，$\int_\Omega\Delta(d_S\phi^*+d_I\psi^*)\mathrm{d}x=-\lambda^*\int_\Omega(\phi^*+\psi^*)\mathrm{d}x$，再利用 Green 公式得，$\int_\Omega\Delta(d_S\phi^*+d_I\psi^*)\mathrm{d}x=0$，从而$-\lambda^*\int_\Omega(\phi^*+\psi^*)\mathrm{d}x=0$。因为$\lambda^*<0$，所以只有$\int_\Omega(\phi^*+\psi^*)\mathrm{d}x=0$。这样就找到了满足式(4a)和式(4b)的解$(\lambda^*,\phi^*,\psi^*)$。故 $R_0>1$ 时，无病平衡点不稳定。

3 地方病平衡点的存在性

已经证明$R_0<1$时无病平衡点局部稳定，且$R_0>1$时无病平衡点不稳定，下面将证明$R_0>1$时存在地方病平衡点。

定理2 当 $R_0>1$ 时，模型(1)的地方病平衡点$(\tilde S,\tilde I)$存在。

证明 将$(\tilde S,\tilde I)$代入模型(2)，变形后得到以下模型：

$$\begin{cases}d_S\tilde S+d_I\tilde I=k, & x\in\Omega,\ t>0,\\ d_I\Delta\tilde I+\tilde I(\beta-\dfrac{\beta\tilde I}{\tilde S+\tilde I}-\dfrac{a}{1+b\tilde I})=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial n}=\dfrac{\partial I}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\end{cases}$$

由总人数不变有$\int_\Omega[\tilde S(x,t)+\tilde I(x,t)]\mathrm{d}x=N,\ t>0$。

令 $u=\dfrac{\tilde S(x)}{k}$，$v=\dfrac{d_I\tilde I(x)}{k}$，以上模型可化为

$$\begin{cases}d_Su+v=1, & x\in\Omega,\ t>0,\\ d_I\Delta v+v(\beta+m(v)-\dfrac{ad_I}{d_I+bkv})=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial v}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ k=\dfrac{d_IN}{\int_\Omega(d_Iu+v)\mathrm{d}x},\end{cases}\tag{8}$$

其中 $m(v)=-d_S\beta v/(d_I+(d_S-d_I)v)$。下面证明$(u,v)$是式(8)的解。

先找出满足式(8)的解 v。定义：

$$\begin{cases}G(v)=d_I\Delta v+v(\beta+m(v)-\dfrac{ad_I}{d_I+bkv})=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0。\end{cases}\tag{9}$$

若可以找到式(9)的上下解，则由上下解的性质知存在满足式(9)的解[22]。令$\underline v=\varepsilon\psi^*$，其中 ε 为充分小正数，ψ^* 为最小特征值对应的标准特征函数。将$\underline v=\varepsilon\psi^*$代入(9)得：

$$G(\underline v)=d_I\Delta\varepsilon\psi^*+\varepsilon\varphi^*(\beta+m(\varepsilon\psi^*)-\frac{ad_I}{d_I+bk\varepsilon\psi^*})=$$

$$\varepsilon[d_I\Delta\psi^*+\beta\psi^*-\frac{ad_I\psi^*}{d_I+bk\varepsilon\psi^*}]+\varepsilon\psi^*m(\varepsilon\psi^*)\geqslant$$

$$\varepsilon[d_I\Delta\psi^*+\beta\psi^*-a\psi^*]+\varepsilon\psi^*m(\varepsilon\psi^*),$$

又 $m(\varepsilon\psi^*)$ 在 $0<\varepsilon\ll1$ 时趋于0，结合式(5)，可以得到$G(\underline v)\geqslant\varepsilon\psi^*(-\lambda^*+m(\varepsilon\psi^*))$，因为当 $R_0>1$ 时，$-\lambda^*\geqslant0$，故$G(\underline v)\geqslant0$，又$\partial\underline v/\partial n=0$在$x\in\partial\Omega$上成立，所以$\underline v=\varepsilon\psi^*$在$\varepsilon$为充分小正数时为式(9)的下解。

令 $\bar v=1$，代入式(9)有，$G(1)=-ad_I/(d_I+bk)\leqslant0$恒成立，又在$x\in\partial\Omega$上$\partial\bar v/\partial n=0$成立，故$\bar v=1$

是式(9)的上解。由此找到了式(9)的上下解，$\underline{v}\leqslant\bar{v}$，由上下解性质存在 $v\in[\underline{v},\bar{v}]$ 为式(9)的解。若 $v=1$ 是式(9)的解，由最大值定理[23]可得，在 $x\in\Omega$ 内 $v\equiv1$，矛盾。故 $0<v<1$，$u>0$。到此，就证明了当 $R_0>1$ 时，模型(1)存在地方病平衡点 $(\tilde{S},\tilde{I})$。

4　数值模拟

通过数值模拟，首先验证无病平衡点的局部稳定性和地方病平衡点的存在性。取 $m=1$，$d_S=1$，$d_I=2$。取 $b(x)=2+0.9\sin\pi x$，$(S_0,I_0)=(0.8,0.2)$，当取 $\beta(x)=1+0.9\sin\pi x$，$a(x)=1.8+0.9\sin\pi x$ 时，图 1 给出无病平衡点的局部稳定性。当取 $\beta(x)=2.8+0.9\sin\pi x$，$a(x)=1+0.9\sin\pi x$ 时，图 2 中可以看到易感者与染病者共存。

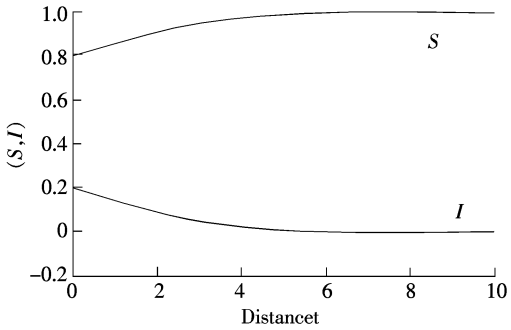

图 1　无病平衡点的局部稳定性

Fig. 1　Locally stable of disease-free equilibrium

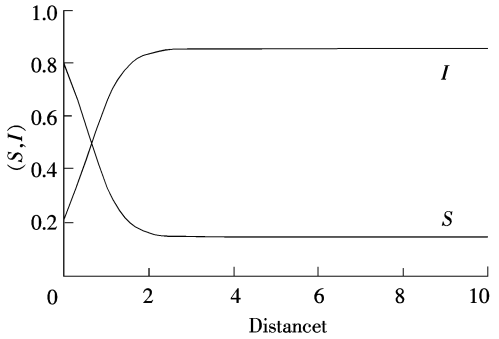

图 2　地方病平衡点的存在性

Fig. 2　Existence of endemic equilibrium

下面讨论当疾病流行时，不同的治疗策略对疾病的影响。当传染系数和医院最大治疗规模一定时，医院的治愈效果将影响疾病的传播。取 $\beta(x)=2.8+0.9\sin\pi x$，$b(x)=2+0.9\sin\pi x$，$(S_0,I_0)=(0.6,0.4)$，图 3 给出不同的治愈效果 $a(x)$ 与染病者数 I 的关系，医院的治愈率越高，染病者的数目将越低。当传染系数和医院治愈率相同时，医院规模也会影响疾病的传播。在图 4 中，取 $\beta(x)=2.8+0.9\sin\pi x$，$a(x)=1+0.9\sin\pi x$，$(S_0,I_0)=(0.6,0.4)$，图中给出不同医院规模 $b(x)$ 与染病者数 I 的关系，当上述条件一定时，医院规模越大反而使染病者人数越多。这说明，当疾病开始流行时，医院应最大限度地提高治愈率，而盲目扩大医院规模，只会将医院资源更分散，对疾病的控制反而不利。

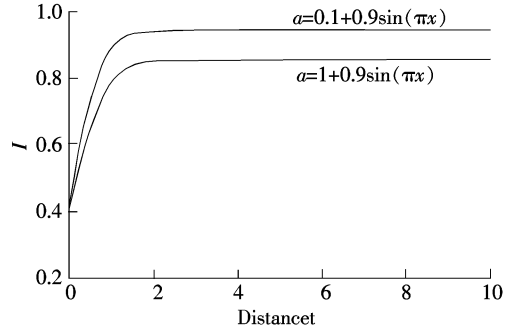

图 3　治愈效果 $a(x)$ 与染病者数 I

Fig. 3　Relationship of $a(x)$ and I

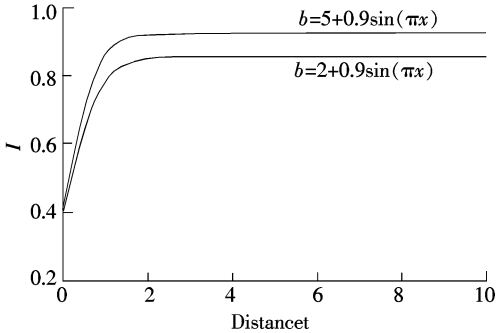

图 4　医院规模 $b(x)$ 与染病者数 I

Fig. 4　Relationship of $b(x)$ and I

5　结　语

讨论了一类带有饱和治疗项的反应扩散传染病模型，证明了 $R_0<1$ 时模型(1)的无病平衡点局部稳定性和 $R_0>1$ 时无病平衡点不稳定性以及地方病平衡点的存在性。通过数值模拟发现，当疾病爆发后医院治愈效果 $a(x)$ 与染病者数 I 负相关，医院最大规模 $b(x)$ 与染病者数 I 正相关。

本文加入治疗项后的模型在研究时更有现实意义，但由于模型中的治疗项为非线性项，导致证明$R_0<1$时无病平衡点的全局稳定性有一定难度，此问题也将是今后继续研究的重点内容。在文献[9]与文献[10]中分别研究了均匀空间下SIS和SIR模型加入治疗项后的分支问题，本文空间异质下的SIS模型在加入治疗项后亦可能产生分支，所提出的模型(1)有进一步深入研究的价值。

此外，本文忽略了自身恢复，重点讨论医院治疗，而在现实中，人为因素对疾病的传播影响很大。例如：是否配合治疗、是否能及时接受治疗。本文中的模型若加入对流项，更符合传染病扩散和流动2种传播机制，但研究难度有所增加。

参考文献/References：

[1] 马知恩，周义仓，王稳定，等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京：科学出版社，2014.
MA Zhien, ZHOU Yicang, WANG Wending, et al. The Mathematical Modeling and Research on Dynamics of Infectious Diseases [M]. Beijing: Science Press, 2014.

[2] 靳帧，孙桂全，刘茂省. 网络传染病动力学建模与分析[M]. 北京：科学出版社，2014.
JIN Zhen, SUN Guiquan, LIU Maosheng. Network Dynamics Modeling and Analysis of Infectious Diseases [M]. Beijing: Science Press, 2014.

[3] TUNCER N, MARTCHEVA M. Analytical and numerical approaches to coexistence of strains in a two-strain sis model with diffusion [J]. Journal of Biological Dynamics, 2012, 6(2): 406-439.

[4] ALLEN L J S, BOLKER B M, LOU Y, et al. Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic reaction-diffusion model [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2008, 21(1): 1-21.

[5] PENG Rui. Asymptotic profiles of the positive steady state for an SIS epidemic reaction-diffusion model Part I [J]. Journal of Differential Equations, 2009, 247(4): 1096-1119.

[6] PENG Rui, LIU Shengqiang. Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction-diffusion model [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(1/2): 239-247.

[7] ZHANG Q Q, CUI Q. Global stability of a discrete SIR epidemic model with vaccination and treatment [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2015, 21(2): 111-117.

[8] XIAO Y, ZHANG W, DDENG G, et al. Stability and bogdanov-takens bifurcation of an SIS epidemic model with saturated treatment function [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015(1): 1-14.

[9] ZHOU T T, ZHANG W P, LU Q Y. Bifurcation analysis of an SIS epidemic model with saturated incidence rate and saturated treatment function [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 226(1): 288-305.

[10] HU Z X, MA W B, RUAN S G. Analysis of SIR epidemic models with nonlinear incidence rate and treatment [J]. Mathematical Biosciences, 2012, 238(1): 12-20.

[11] LU Y L, JIANG G P. Backward bifurcation and local dynamics of epidemic model on adaptive networks with treatment [J]. Neurocomputing, 2014, 145(5): 113-121.

[12] ZHANG X, LIU X. Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 348(1): 433-443.

[13] EVANS L C. Partial Differential Equations [M]. Providence Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.

[14] DIEKMANN O, HEESTERBEEK J A P, METZ J A J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations [J]. Journal of Mathematical Biology, 1990, 28(4): 365-382.

[15] DRISSCHE P V D, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission [J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1/2): 29-48.

[16] WANG W D, ZHAO X Q. Basic reproduction number for reaction-diffusion epidemic model [J]. Journal of Applied Dynamical Systems, 2012, 11(4): 1652-1673.

[17] BOGDAN K, KOMOROWSKI T. Principal eigenvalue of the fractional laplacian with a large incompressible drift [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications Nodea, 2014, 21(4): 541-566.

[18] HESS P. On the eigenvalue problem for weakly coupled elliptic systems [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1983, 81(2): 151-159.

[19] MONTARU A. A semilinear parabolic-elliptic chemotaxis system with critical mass in any space dimension [J]. Nonlinearity, 2013, 26(9): 2669-2701.

[20] HENRY D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations [M]. Berlin: Springer, 1981.

[21] KEYANTUO V, LIZAMA C, WARMA M. Spectral criteria for solvability of boundary value problems and positivity of solutions of time-fractional differential equations [J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 15(2): 239-263.

[22] 叶其孝，李正元，王明新，等. 反应扩散方程引论[M]，北京：科学出版社，2011.
YE Qixiao, LI Zhengyuan, WANG Mingxin, et al. Introduction of Reaction-Diffusion Equation [M]. Beijing: Science Press, 2011.

[23] PROTTER M H, WEINBERGER H F. Maximum Principles in Differential Equations [M]. Berlin: Springer, 1984.