第36卷第6期 河北科技大学学报 Vol. 36, No. 6
2015年12月 Journal of Hebei University of Science and Technology Dec. 2015

文章编号:1008-1542(2015)06-0577-10 doi:10.7535/hbkd.2015yx06005

无穷区间上分数阶非局部边值问题的可解性

王菊芳[1],禹长龙[1],郭彦平[2],魏江南[1]

(1.河北科技大学理学院,河北石家庄 050018;2.河北科技大学电气工程学院,河北石家庄 050018)

摘 要:运用Banach压缩映像原理和Schauder不动点定理,研究了无穷区间上非线性项含有低一阶分数微分的分数微分方程非局部边值问题:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)), \quad t \in J, \\ u(0) = 0, \quad D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i) \end{cases}$$

解的存在性与唯一性,推广了已有的相关结论。通过实例验证了主要结论的正确性。

关键词:常微分方程其他学科;非局部边值问题;分数微分方程;无穷区间;不动点定理

中图分类号:O175 **MSC(2010)主题分类**:34B40 **文献标志码**:A

Solvability of solutions for nonlocal boundary value problems of fractional order on infinite intervals

WANG Jufang[1], YU Changlong[1], GUO Yanping[2], WEI Jiangnan[1]

(1. School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China; 2. School of Electrical Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: In this paper, we use Bananch's contraction mapping principle and Schauder's fixed point theorem to study the existence and uniqueness of solutions for nonlocal boundary value problems of fractional differential equations with the nonlinear term dependent in a fractional derivative of lower order on infinite intervals,

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)), \quad t \in J, \\ u(0) = 0, \quad D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i) \end{cases}$$

and extend the existing relevant conclusions. We have given some examples to demonstrate the correctness of the main results.

Keywords: ordinary differential equation; nonlocal boundary value problem; fractional differential equation; infinite interval; fixed point theorem

收稿日期:2015-04-06;修回日期:2015-09-26;责任编辑:张 军

基金项目:国家自然科学基金(11201112);河北省自然科学基金(A2013208147,A2014208152,A2015208114,A2015208051);河北省教育厅基金(Z2014062);河北省教育厅自然科学青年基金(QN2015175)

作者简介:王菊芳(1981—),女,山东莱州人,讲师,硕士,主要从事鲁棒控制、微分方程边值问题等方面的研究。

E-mail:changlongyu@126.com

王菊芳,禹长龙,郭彦平,等.无穷区间上分数阶非局部边值问题的可解性[J].河北科技大学学报,2015,36(6):577-586.

WANG Jufang, YU Changlong, GUO Yanping, et al. Solvability of solutions for nonlocal boundary value problems of fractional order on infinite intervals[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2015, 36(6): 577-586.

无穷区间上的微分方程边值问题起源于对非线性椭圆方程径向对称解和半无穷多孔介质气压模型的研究。很多学者通过各种技术和方法研究了无穷区间上微分、积分、差分方程的两点、三点及多点边值问题解的存在性[1-8]。

分数阶微分方程有着广泛的应用，如分数物理学、混沌与湍流、高分子材料的解链、随机过程、自动控制理论、反常扩散等领域。分数阶微分方程边值问题是非线性常微分方程理论研究中一个活跃而成果丰硕的领域。近年来，对分数阶微分方程非局部边值问题的研究发展显著，相关解的存在性已有很多结论[9-21]。而无穷区间上的分数微分方程非局部边值问题可解性的研究结果很少[22-24]。

在文献[24]中，SU 等利用 Schauder 不动点定理研究了无穷区间上分数阶两点边值问题：

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)), & t\in J:=[0,+\infty),\\ u(0)=0, \quad D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=u_{\infty}, & u_{\infty}\in R \end{cases}$$

无界正解的存在性，其中 $1<\alpha\leqslant 2$，$f\in C(J\times R^2,R)$，$D_{0+}^{\alpha}u(t)$ 和 $D_{0+}^{\alpha-1}u(t)$ 是标准的 Riemann-Liouville 分数微分。

基于文献[24]，本文研究无穷区间上分数阶 m 点边值问题：

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)), & t\in J,\\ u(0)=0, \quad D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i) \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性与唯一性，其中 $J=[0,+\infty)$，$1<\alpha\leqslant 2$，$f\in C(J\times R^2,R)$，$\beta_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m-2)$，$0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_{m-2}<+\infty$，$\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}<\Gamma(\alpha)$，$D_{0+}^{\alpha}u(t)$ 和 $D_{0+}^{\alpha-1}u(t)$ 是标准的 Riemann-Liouville 分数微分，且 $D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}D_{0+}^{\alpha-1}u(t)$。

1 预备知识

首先，确定分数阶微积分的一些基本概念[9-11]。

定义 1 函数 $f(t)$ 的 $\delta(\delta>0)$ 阶 Riemann-Liouville 分数积分定义如下：

$$I_{a+}^{\delta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_a^t(t-s)^{\delta-1}f(s)\mathrm{d}s, \quad t>a,$$

其中等式右端在 $(a,+\infty)$ 上有定义。

定义 2 函数 $f(t)$ 的 $\delta(\delta>0)$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶微分定义如下：

$$D_{a+}^{\delta}f(t)=(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^nI_{a+}^{n-\delta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\delta)}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^n\int_a^t(t-s)^{n-\delta-1}f(s)\mathrm{d}s, \quad t>a,$$

其中，n 是大于等于 δ 的最小整数，等式右端在 $(a,+\infty)$ 上有定义。特别的，当 $\delta=n$，$D_{a+}^{n}f(t)=f^{(n)}(t)$。

注 1[9] 分数积分与分数微分有以下 2 个性质：

1) $D_{a+}^{\delta}I_{a+}^{\delta}f(t)=f(t)$， $\delta>0$， $f(t)\in L^1(a,+\infty)$；

2) $D_{a+}^{\delta}I_{a+}^{\gamma}f(t)=I_{a+}^{\gamma-\delta}f(t)$， $\gamma>\delta>0$， $f(t)\in L^1(a,+\infty)$。

注 2[24] 显然，当 $\delta>0$ 时，$I_{a+}^{\delta}:C[a,b]\to C[a,b]$ 且 $\forall f\in C[a,b]$，有 $I_{a+}^{\delta}f(a)=0$。

定义 3[8] 函数 $f:[0,+\infty)\times R^2\to R$ 称为 S-Carathéodory 函数，当且仅当

i) 对于 $\forall(u,v)\in R^2$，$t\mapsto f(t,u,v)$ 在 $[0,+\infty)$ 是可测的；

ii) 对于 $t\in[0,+\infty)$，$(u,v)\mapsto f(t,u,v)$ 在 R^2 上是几乎处处连续的；

iii) 对于 $\forall r>0$，存在 $\varphi_r\in L^1[0,+\infty)$，在 $[0,+\infty)$ 上 $\varphi_r(t)>0$ 且 $\int_0^{+\infty}s\varphi_r(s)\mathrm{d}s<+\infty$ 使得当 $\max\{|u|,|v|\}\leqslant r$ 时，$|f(t,u,v)|\leqslant\varphi_r(t)$ 对于 $t\in[0,+\infty)$ 几乎处处成立。

引理 1[24] 对 $\delta>0$，当且仅当 $x(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j(t-a)^{\delta-j}$，有 $D_{a+}^{\delta}x(t)=0$，其中 $c_j\in R(j=1,2,\cdots,n)$ 是任意常数，n 是大于等于 δ 的最小整数。

引理 2 设 $y(t)\in L^1[0,+\infty)$，$\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}\neq\Gamma(\alpha)$，则边值问题：

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)=y(t), & t\in J,\\ u(0)=0, \quad D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i) \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解:

$$u(t)=\int_0^{+\infty}G(t,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

其中:

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}\right)}\cdot$$

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{k=i}^{m-2}\beta_k(\eta_k-s)^{\alpha-1}-\Gamma(\alpha)\right)t^{\alpha-1}+\left(\Gamma(\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}\right)(t-s)^{\alpha-1}, \eta_{i-1}\leqslant s\leqslant\eta_i, s\leqslant t, i=1,2,\cdots,m-2,\\ \left(\sum\limits_{k=i}^{m-2}\beta_k(\eta_k-s)^{\alpha-1}-\Gamma(\alpha)\right)t^{\alpha-1}, \quad \eta_{i-1}\leqslant s\leqslant\eta_i, s\geqslant t, i=1,2,\cdots,m-2,\\ -\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}+\left(\Gamma(\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}\right)(t-s)^{\alpha-1}, \quad \eta_{m-2}\leqslant s\leqslant t,\\ -\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}, \quad s\geqslant\max\{\eta_{m-2},t\}。 \end{cases}$$

证明　应用引理 1 将微分方程(2) 转化为积分方程:

$$u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s,$$

根据注释 1、引理 1 及 $D_{0+}^{\alpha-1}t^{\alpha-1}=\Gamma(\alpha)$,可得:

$$D_{0+}^{\alpha-1}u(t)=c_1\Gamma(\alpha)+\int_0^t y(s)\mathrm{d}s,$$

由方程(2) 的边界条件及注释 2,可知 $c_2=0$ 且

$$c_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s-\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}y(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}\right)},$$

因此,

$$u(t)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s-\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}y(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}\right)}t^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^{+\infty}G(t,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

证毕。

引理 3　若 $\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}<\Gamma(\alpha)$,则 $|G(t,s)|\leqslant\dfrac{2t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}$。

证明　当 $\eta_{i-1}\leqslant s\leqslant\eta_i, s\geqslant t, i=1,2,\cdots,m-2$ 时,

$$|G(t,s)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}\right)}\left|\left(\sum_{k=1}^{m-2}\beta_k\eta_k^{\alpha-1}+\Gamma(\alpha)\right)t^{\alpha-1}+\left(\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}\right)t^{\alpha-1}\right|\leqslant$$

$$\frac{2t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}},$$

其他情况同理可证,证毕。

注3 由引理2及引理3,易知:

$$D_{0+}^{\alpha-1}u(t)=\int_0^{+\infty}G_1(t,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G_1(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\cdot$$

$$\begin{cases}\sum_{k=i}^{m-2}\beta_k(\eta_k-s)^{\alpha-1}-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}, & \eta_{i-1}\leqslant s\leqslant\eta_i,s\leqslant t,i=1,2,\cdots,m-2,\\ \sum_{k=i}^{m-2}\beta_k(\eta_k-s)^{\alpha-1}-\Gamma(\alpha), & \eta_{i-1}\leqslant s\leqslant\eta_i,s\geqslant t,i=1,2,\cdots,m-2,\\ -\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}, & \eta_{m-2}\leqslant s\leqslant t,\\ -\Gamma(\alpha), & s\geqslant\max\{\eta_{m-2},t\}。\end{cases}$$

且若$\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}<\Gamma(\alpha)$,则$|G_1(t,s)|\leqslant\frac{2\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}$。

定义空间:

$$X=\{u(t)\in C(J,R):\sup_{t\in J}\frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}<+\infty\},$$

$$C_\infty=\{u(t)\in X:D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\in C(J,R),\sup_{t\in J}|D_{0+}^{\alpha-1}u(t)|<+\infty\},$$

且其范数分别为$\|u\|_X=\sup_{t\in J}\frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}$及$\|u\|=\max\left\{\sup_{t\in J}\frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}},\sup_{t\in J}|D_{0+}^{\alpha-1}u(t)|\right\}$。

引理4[24] $(X,\|\cdot\|_X)$和$(C_\infty,\|\cdot\|)$是Banach空间。

定义算子$T:C_\infty\to C_\infty$,

$$Tu(t):=\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mathrm{d}s,\tag{3}$$

且易得:

$$D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t):=\int_0^{+\infty}G_1(t,s)f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mathrm{d}s。\tag{4}$$

本文应用的空间为C_∞,注意到Arzela-Ascoli定理在C_∞上是失效的,因此需要下面的紧性准则。

引理5[24] 设$Z\subseteq Y$是一个有界集,若

i) 对任意的$u(t)\in Z$,$\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}$和$D_{0+}^{\alpha-1}u(t)$在$J$的任意紧区间上是等度连续的;

ii) 给定$\varepsilon>0$,存在常数$T=T(\varepsilon)>0$使得对任意的$t_1,t_2\geqslant T$及$u(t)\in Z$有:

$$\left|\frac{u(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{u(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon\text{及}|D_{0+}^{\alpha-1}u(t_1)-D_{0+}^{\alpha-1}u(t_2)|<\varepsilon$$

均成立,则Z是一个相对紧集。

2 主要结论

运用Banach压缩映像原理和Schauder不动点定理给出边值问题(1)解的存在性与唯一性定理。

定理1 设$f:J\times R^2\to R$是S-Carathéodory函数,且$\exists L_1(t),L_2(t)\in L^1[0,+\infty)$,

$$\text{s.t.}\quad\forall t\in I,\forall(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in R^2,$$

有:

$$|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)|\leqslant L_1(t)|u_1-u_2|+L_2(t)|v_1-v_2|\tag{5}$$

成立。若 $\Lambda<1$，则边值问题(1) 有唯一解，其中：

$$\Lambda=\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}[(1+t^{\alpha-1})L_1(t)+L_2(t)]\mathrm{d}t。$$

证明　选取

$$r\geqslant\frac{2\int_0^{+\infty}\varphi_r(t)\mathrm{d}t}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}-2\int_0^{+\infty}[(1+t^{\alpha-1})L_1(t)+L_2(t)]\mathrm{d}t},$$

令 $B_r=\{u\in C_\infty:\|u\|\leqslant r\}$，现证 $TB_r\subseteq B_r$。对 $\forall u\in B_r$，由引理 3、注 3 及式(3)、式(4) 有：

$$\frac{|Tu(t)|}{1+t^{\alpha-1}}=\frac{1}{1+t^{\alpha-1}}\left|\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}[|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))-f(s,0,0)|+|f(s,0,0)|]\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\left\{\|u\|\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})L_1(s)+L_2(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}\varphi_r(s)\mathrm{d}s\right\}\leqslant r,$$

且

$$|D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)|\leqslant\frac{2\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\mathrm{d}s\leqslant\Gamma(\alpha)r\leqslant r,$$

故有 $\|Tu\|\leqslant r$，进而 $TB_r\subseteq B_r$。

又 $\forall u,v\in C_\infty$，$\forall t\in J$，由式(5) 以及 $\Lambda<1$ 有：

$$\left|\frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}}-\frac{Tv(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|\leqslant$$

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\right||f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))-f(s,v(s),D_{0+}^{\alpha-1}v(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}[L_1(s)|u(s)-v(s)|+L_2(s)|D_{0+}^{\alpha-1}u(s)-D_{0+}^{\alpha-1}v(s)|]\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{2\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})L_1(s)+L_2(s)]\mathrm{d}t}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\|u-v\|\leqslant$$

$$\Lambda\|u-v\|<$$

$$\|u-v\|,$$

且

$$|D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)-D_{0+}^{\alpha-1}Tv(t)|\leqslant$$

$$\frac{2\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))-f(s,v(s),D_{0+}^{\alpha-1}v(s))|\mathrm{d}s<$$

$$\Gamma(\alpha)\|u-v\|\leqslant\|u-v\|,$$

因此，$\|Tu-Tv\|\leqslant\|u-v\|$，故 T 为压缩映射。于是，由 Banach 压缩映像原理可知边值问题(1)有唯一解，证毕。

定理 2 设 $f:J\times R^2\to R$ 是连续的，且 $\exists$ 非负函数 $p(t),q(t),r(t)\in L^1[J,+\infty)$，$t^{\alpha-1}p(t)\in L^1[J,+\infty)$ 使得：

$$|f(t,u,v)|\leqslant p(t)|u|+q(t)|v|+r(t),\quad t\in J,\quad (u,v)\in R^2 \tag{6}$$

成立。若$\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s<\dfrac{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}{2}$，则边值问题(1)至少有1个解。

证明 首先，由注3以及 f 的连续性可知，$Tu(t)$ 和 $D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)$ 在 J 上是连续的。下面分3步来证明定理。

第1步，证明 T 将有界集映到有界集。

选取

$$R\geqslant\frac{2\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}-2\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(t)+q(t)]\mathrm{d}t},$$

令 $U=\{u\in C_\infty:\|u\|\leqslant R\}$，则 $T:U\to U$。事实上，$\forall u(t)\in U$，由引理3、注3、式(3)、式(4)及式(6)，可得：

$$\frac{|Tu(t)|}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}[p(s)|u(s)|+q(s)|D_{0+}^{\alpha-1}u(s)|+r(s)]\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\{\|u\|\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s\}\leqslant R,$$

且

$$|D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)|\leqslant\frac{2\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\mathrm{d}s\leqslant\Gamma(\alpha)R\leqslant R,$$

故有 $\|Tu\|\leqslant R$，于是 $T:U\to U$。

第2步，证明 $T:U\to U$ 是连续的。

设 $u_n,u\in U,n=1,2,\cdots$，且当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n-u\|\to 0$，则由引理3、注3、式(3)、式(4)及式(6)，可得：

$$\left|\frac{Tu_n(t)}{1+t^{\alpha-1}}-\frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|\leqslant\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}|f(s,u_n(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_n(s))-f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\,\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\left[\int_0^{+\infty}|f(s,u_n(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_n(s))|\,\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\,\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\{\|u_n\|\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s+$$

$$\|u\|\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s\}\leqslant$$

$$\frac{4R\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+4\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}},$$

且

$$|D_{0+}^{\alpha-1}Tu_n(t)-D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)|\leqslant$$

$$\frac{2\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}|f(s,u_n(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_n(s))-f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\,\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{4\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}[R\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s],$$

于是,由 Lebesgue 控制收敛定理可知,T 是连续的。

第 3 步,设 V 是 U 的一个子集,应用引理 3 证明 TV 是相对紧集。

设 $I\subset J$ 是一个紧区间。$\forall t_1,t_2\in I$ 且 $t_1<t_2$,易知 $f(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t))$ 在 I 上是有界的。于是,$\forall u(t)\in V$,有:

$$\left|\frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\frac{\left|\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\alpha-1}f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mathrm{d}s-\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mathrm{d}s\right|}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}\right)}+$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mathrm{d}s-\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\frac{2\int_0^{+\infty}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\,\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}+$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_1}\left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right||f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\,\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\,\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\frac{2\left(R\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s\right)}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}+$$

$$\frac{\max\limits_{s\in I,u\in V}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_1}\left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\mathrm{d}s\right]\to 0,\quad t_1\to t_2,$$

且

$$|D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t_2)-D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t_1)|\leqslant$$

$$\int_{t_1}^{t_2}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\max_{s\in I,u\in V}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))||t_2-t_1|\to 0,\quad t_1\to t_2,$$

于是，$\frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}}$ 和 $D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)$ 在 I 上均是等度连续的。

现在，证明 $\forall u(t)\in V$，$\frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}}$ 和 $D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)$ 满足引理3中的条件ii)。由式(6)可知，

$$\int_0^{+\infty}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\|u\|\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\{\|u\|\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s\}\leqslant R,$$

因此，$\forall\varepsilon>0$ $\exists L>0$，有：

$$\int_L^{+\infty}|f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))|\mathrm{d}s<\varepsilon。\tag{7}$$

另外，由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}=1$，则 $\exists T_1>L>0$，$\forall t_1,t_2\geqslant T_1$，有：

$$\left|\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon,\tag{8}$$

类似地，由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(t-L)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}=1$，则 $\exists T_2>L>0$，当 $0\leqslant s\leqslant L$，$\forall t_1,t_2\geqslant T_2$，有：

$$\left|\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon,\tag{9}$$

于是，取 $T_0=\max\{T_1,T_2\}$，则 $\forall t_1,t_2\geqslant T_0$，由式(7)—式(9)可得：

$$\left|\frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\frac{2\left(R\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s\right)}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}+$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^L\left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\mid f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mid \mathrm{d}s+$$

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\mid f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mid \mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{2\left(R\int_0^{+\infty}[(1+s^{\alpha-1})p(s)+q(s)]\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s\right)}{\Gamma(\alpha)-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\varepsilon+$$

$$\frac{\max\limits_{s\in I}\mid f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mid}{\Gamma(\alpha)}L\varepsilon+\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon,$$

且

$$\mid D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t_2)-D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t_1)\mid\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\mid f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mid \mathrm{d}s\leqslant\int_L^{+\infty}\mid f(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s))\mid \mathrm{d}s<\varepsilon,$$

因此，TV 是相对紧集。

综上所述，由 Schauder 不动点定理可知，边值问题(1) 在 U 上至少有 1 个解，证毕。

3　例子

例 1　考虑下面的边值问题：

$$\begin{cases}D_{0+}^{\frac{4}{3}}u(t)=\dfrac{t\sin(u(t))}{10(1+t^2)^2(1+\sqrt[3]{t})}+\dfrac{t\arctan(D_{0+}^{\frac{1}{3}}u(t))}{20\mathrm{e}^{t^2}}+t,\quad t\in J,\\ u(0)=0,D_{0+}^{\frac{1}{3}}u(\infty)=\dfrac{1}{2}u(1)+\dfrac{1}{10}u(10),\end{cases}\tag{10}$$

其中，$\alpha=\dfrac{4}{3}$，$f(t,u,v)=\dfrac{t\sin(u)}{10(1+t^2)^2(1+\sqrt[3]{t})}+\dfrac{t\arctan(v)}{20\mathrm{e}^{t^2}}+t$，显然有：

$$\mid f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)\mid\leqslant\frac{t}{10(1+t^2)^2(1+\sqrt[3]{t})}\mid u_1-u_2\mid+\frac{t}{20\mathrm{e}^{t^2}}\mid v_1-v_2\mid,$$

即有 $L_1(t)=\dfrac{t}{10(1+t^2)^2(1+\sqrt[3]{t})}$，$L_2(t)=\dfrac{t}{20\mathrm{e}^{t^2}}$，通过计算可得：

$$\Lambda=\frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}[(1+t^{\alpha-1})L_1(t)+L_2(t)]\mathrm{d}t\approx 0.844\ 9<1,$$

由定理 1 可知，边值问题(10) 存在唯一解。

例 2　考虑下面的边值问题：

$$\begin{cases}D_{0+}^{\frac{5}{4}}u(t)=\dfrac{\ln(1+\mid u(t)\mid)}{20\mathrm{e}^{\sqrt{t}}(1+\sqrt[4]{t})}+\dfrac{\arctan(\mid D_{0+}^{\frac{1}{4}}u(t)\mid)}{10\mathrm{e}^t}+t\mathrm{e}^{-t^2},\quad t\in J,\\ u(0)=0,\quad D_{0+}^{\frac{1}{4}}u(\infty)=\dfrac{1}{10}u(\dfrac{1}{10})+\dfrac{1}{4}u(2)+\dfrac{1}{8}u(4),\end{cases}\tag{11}$$

其中，$\alpha=\dfrac{5}{4}$，$f(t,u,v)=\dfrac{\ln(1+\mid u\mid)}{20\mathrm{e}^{\sqrt{t}}(1+\sqrt[4]{t})}+\dfrac{\arctan(\mid v\mid)}{10\mathrm{e}^t}+t\mathrm{e}^{-t^2}$，显然有：

$$\mid f(t,u,v)\mid\leqslant\frac{\mid u\mid}{20\mathrm{e}^{\sqrt{t}}(1+\sqrt[4]{t})}+\frac{\mid v\mid}{10\mathrm{e}^t}+t\mathrm{e}^{-t^2},$$

即有 $p(t)=\dfrac{1}{20\mathrm{e}^{\sqrt{t}}(1+\sqrt[4]{t})}$，$q(t)=\dfrac{1}{10\mathrm{e}^t}$，$r(t)=t\mathrm{e}^{-t^2}$，又$\dfrac{\Gamma(\frac{5}{4})-\sum_{i=1}^{2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}{2}\approx 0.213\ 9$，所以有：

$$\int_0^{+\infty}[(1+t^{\frac{1}{4}})p(t)+q(t)]\mathrm{d}t=0.2<\frac{\Gamma(\frac{5}{4})-\sum_{i=1}^{2}\beta_i\eta_i^{\alpha-1}}{2},$$

故由定理 2 可知,边值问题(11) 至少有 1 个解。

参考文献/References:

[1] AGARWAL R P, O'REGAN D. Infinite Interval Problems for Differential, Difference and Integal Equations[M]. London: Kluwer Academic Publisher, 2001.

[2] O'REGAN D. Theory of Singular Boundary Value Problems[M]. New Jersey: World Scientific Publishing, 1994.

[3] AGARWAL R P, O'REGAN D. Nonlinear boundary value problems on the semi-in nite interval: An upper andlower solution approach [J]. Mathematic, 2002,49: 129-140.

[4] BAXLEY J V. Existence and uniqueness for nonlinear boundary value problems on infinite interval[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1990,147(1): 122-133.

[5] JIANG D, AGARWAL R P. A uniqueness and existence theorem for a singular third-order boundary value problemon [0, +∞)[J]. Applied Mathematics Letters, 2002,15(4): 445-451.

[6] 禹长龙,李志广,魏会贤,等. 无穷区间上二阶 m 点共振边值问题解的存在性和唯一性[J]. 河北科技大学学报,2013,34(1):7-14.
YU Changlong, LI Zhiguang, WEI Huixian, et al. Existence and uniqueness of solutions for second-order m-point boundary value problems at resonance on infinite interval[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2013,34(1):7-14.

[7] AHMAD B, ALSAEDI A, ALGHAMDI B S. Analytic approximation of solutions of the forced Duffing equation with integral boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2008,9(4): 1727-1740.

[8] LIAN Hairong, GE Wegao. Solvability for second-order three-point boundary value problems on a half-line[J]. Applied Mathematics Letters, 2006, 19(10): 1000-1006.

[9] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations[M]. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies,2006.

[10] SAMKO S G, KILBAS A A, MARICHEV O I. Fractional Integral and Derivative: Theory and Applications[M]. Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[11] PODLUBNY I, THIMANN K V. Fractional Differential Equations in: Mathematics in Science and Engineering[M]. New York/London/Toronto: Academic Press, 1999.

[12] LAKSHMIKANTHAM V, LEELA S, VASUNDHARA D J. Theory of Fractional Dynamic Systems[M]. Cambridge: Cambridge Scholars Publishing, 2009.

[13] AGARWAL R P, LAKSHMIKANTHAM V, NIETO J J. On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2010, 72(6): 2859-2862.

[14] ROSS B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equation[J]. Wiley, 1993(3): 66-67.

[15] LAKSHMIKANTHAM V. Theory of fractional functional differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(10): 3337-3343.

[16] LAKSHMIKANTHAM V, VATSALA A S. General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations [J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21(8): 828-834.

[17] ZHOU Y, JIAO F. Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2010, 11(5): 4465-4475.

[18] AHMAD B. Existence of solutions for irregular value problems of nonlinear fractional differential equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(4): 390-394.

[19] WANG Y. Positive solutions for fractional m-point boundary value problem in Banach spaces[J]. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32 (4): 246-256.

[20] WANG L, ZHANG X. Positive solutions of m-point boundary value problems for a class of nonlinear fractional differential equations[J]. Journal of Applied Mathematics & Computing, 2013, 42(1/2): 387-399.

[21] CABALLERO J, HARJANI J, SADARANGANI K. Positive solutions for a class of singular fractional boundary value problem[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 62(3): 1325-1332.

[22] ARARA A, BENCHOHRA M, HAMIDI N, et al. Fractional order differential equations on an unbounded domain[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2010, 72(2): 580-586.

[23] ZHAO Xiangkui, GE Weigao. Unbounded solutions for a fractional boundary value problem on the infinite interval[J]. Acta Applicandage Mathematicae, 2010, 109(2): 495-505.

[24] SU Xinwei, ZHANG Shuqin. Unbounded solutions to a boundary value problem of fractional order on the half-line[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 61(4): 1079-1087.