第36卷第6期 河北科技大学学报 Vol. 36, No. 6
2015年12月 Journal of Hebei University of Science and Technology Dec. 2015

文章编号:1008-1542(2015)06-0573-04 doi:10.7535/hbkd.2015yx06004

不动点集 $HP_1(2m)\bigcup HP_2(2m)\bigcup HP(2n+1)$ 的对合

赵素倩

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

摘 要:设(M^r,T)是一个带有光滑对合T的r维光滑闭流形,T的不动点集为$F=HP_1(2m)\bigcup HP_2(2m)\bigcup HP(2n+1)(m\geqslant 1)$,其中$HP(n)$表示$n$维四元数射影空间。通过构造合适的对称多项式和计算示性数,证明了当$r>8m+8n+8$时,每一个以F为不动点集的对合(M^r,T)协边于零。

关键词:代数拓扑学;对合;不动点集;示性类;协边

中图分类号:O189.3 **MSC(2010)主题分类**:55N22 **文献标志码**:A

Involutions fixing $HP_1(2m)\bigcup HP_2(2m)\bigcup HP(2n+1)$ of the fixed point set

ZHAO Suqian

(School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: Let (M^r,T) be a smooth closed manifold of dimension r with a smooth involution T whose fixed point set is $F=HP_1(2m)\bigcup HP_2(2m)\bigcup HP(2n+1)(m\geqslant 1)$, where $HP(n)$ denotes the n-dimensional quaternionic projective space. By constructing symmetric polynomial and computing characteristic number, it is proved that when $r>8m+8n+8$, every involution (M^r,T) fixes F bounds.

Keywords: algebraic topology; involution; fixed point set; characteristic class; bordism

令(M^r,T)是一个具有光滑对合$T:M\to M$的r维光滑闭流形,T在M上的不动点集为$F=\{x\mid T(x)=x,x\in M\}$。对于给定的$F$,能否确定以$F$为不动点集的所有带对合的流形$(M^r,T)$的协边分类呢?当$F$为射影空间以及它们的不交并,$F$为Dold流形以及它们的不交并、射影空间与Dold流形并的情形,已有很多结果[1-13]。对于F为乘积空间及其不交并的情形,也有一部分结果[14-18]。文献[19-22]研究了当F为更一般的空间并时对合(M^r,T)的协边分类。当F为多个不同维数的射影空间并时,研究结果不多。文献[23]研究了F为2个相同的偶数维射影空间与一个奇数维射影空间并的情形。本文考虑不动点集为2个相同的偶数维四元数射影空间与1个奇数维四元数射影空间并的情形,得到如下结果。

收稿日期:2015-06-02;修回日期:2015-10-30;责任编辑:张 军

基金项目:国家自然科学基金(11371118,11201314);高等学校博士学科点专项科研基金(20121303110004);河北科技大学博士科研启动基金(QD201021)

作者简介:赵素倩(1973—),女,河北高邑人,副教授,博士,主要从事代数拓扑和微分拓扑方面的研究。

E-mail:suqianzhao@126.com

赵素倩.不动点集$HP_1(2m)\bigcup HP_2(2m)\bigcup HP(2n+1)$的对合[J].河北科技大学学报,2015,36(6):573-576.

ZHAO Suqian. Involutions fixing $HP_1(2m)\bigcup HP_2(2m)\bigcup HP(2n+1)$ of the fixed point set[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology,2015,36(6):573-576.

定理 1 设(M^r,T)是带有光滑对合 T 的 r 维光滑闭流形，T 的不动点集为 $F=HP_1(2m)\cup HP_2(2m)\cup HP(2n+1)(m\geqslant 1)$，其中 $HP(n)$表示 n 维四元数射影空间，则当 $r>8m+8n+8$ 时，(M^r,T)协边于零。

以下所讨论的流形与对合都是光滑的而且对合是非平凡的。系数群是整数模 2 加群 Z_2；$\lambda\to F$ 表示 F 在 M 中的法丛，$W(\lambda)$ 表示法丛 λ 的全 Stiefel-Whitney 示性类。$\sigma_i(x)$ 表示第 i 个基本对称多项式 $\sum x_1x_2\cdots x_i$。$[M^r]$ 表示流形 M 的基本同调类。

1 预备知识

由文献[24]知，带对合的流形(M^r,T) 的协边类由它的不动点集的法丛(F^{r-k},η^k) 的协边类决定，而法丛(F^{r-k},η^k) 的协边类由它的示性数来决定。下面的定理建立了 M 的示性数与它的法丛(F^{r-k},η^k) 的示性数之间的联系。

引理 1[25] 设(M^r,T) 是带光滑对合的 r 维光滑闭流形，对合的不动点数据是$(F,\eta)=\bigcup\limits_k(F^{r-k},\eta^k)$。如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 为 Z_2 上关于 r 个变量的对称多项式，它的次数 $\deg f(x)\leqslant r$，则有示性数公式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_r)[M^r]=\sum\frac{f(1+y_1,1+y_2,\cdots,1+y_k,z_1,z_2,\cdots,z_{r-k})}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1+y_i)}[F^{r-k}],$$

其中表达式中的对称多项式可用基本对称多项式 $\sigma_i(x),\sigma_i(y),\sigma_i(z)$ 表示，分别用 $W_i(M),W_i(\eta^k),W_i(F)$ 代替 $\sigma_i(x),\sigma_i(y),\sigma_i(z)$，等式两边得到的是上同调类在基本同调类上作用的值。

引理 2[25] 假设 $\sigma_i(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_r)$ 是关于 r 个变量的第 i 个基本对称多项式，则有：

$$\sigma_i(1+y_1,\cdots,1+y_k,z_1,\cdots,z_{r-k})=\sum_{p+q\leqslant i}\binom{k-p}{i-p-q}\sigma_p(y_1,\cdots,y_k)\sigma_q(z_1,\cdots,z_{r-k})。$$

2 定理的证明

设 v_1,v_2,v_3 分别表示 $HP_1(2m),HP_2(2m)$ 和 $HP(2n+1)$ 在 M 中的法丛，法丛的维数分别为 k_1,k_2,k_3，$k_1=k_2=r-8m,k_3=r-(8n+4)$，且有：

$$W(v_1)=(1+a)^{t_1},\quad W(v_2)=(1+b)^{t_2},\quad W(v_3)=(1+c)^{t_3},$$

其中 $a\in H^4(HP_1(2m);Z_2),b\in H^4(HP_2(2m);Z_2),c\in H^4(HP(2n+1);Z_2)$，为生成元，$t_i(i=1,2,3)$ 为非负整数。设 $2m$ 的二进制分解式中的最大项为 2^S，则 $t_1<2^{S+1},t_2<2^{S+1}$；设 $2n$ 的二进制分解式的最大项是 2^l，则 $t_3<2^{l+1}$。

命题 1 如果 $t_1=t_2$，则对合(M^r,T) 存在，且协边于零。

证明 如果 $t_1=t_2$，则法丛 $v_1\to HP_1(2m)$ 和 $v_2\to HP_2(2m)$ 协边，故此时对合(M^r,T) 的协边类由法丛 $v_3\to HP(2n+1)$ 的协边类决定。由文献[6]可知，当 $r>8n+4$ 时，对合(M^r,T) 存在且协边于零，因此当 $r>8m+8n+8$ 时，(M^r,T) 存在且协边于零。

在下面的证明中总假定 $t_1\neq t_2$。k_1,k_3 分别表示 $HP(2m),HP(2n+1)$ 在 M 中法丛的维数。

命题 2 若 t_3 为奇数，则对合(M^r,T) 不存在。

证明 1) 当 t_1 和 t_2 都为奇数时，对合(M^r,T) 不存在。

利用反证法，若对合(M^r,T) 存在，取对称多项式：

$$f(x)=\left[\sigma_4(x)-\binom{k_1}{4}\right]\left[\sigma_4(x)-\binom{k_3}{4}\right]^{2n+1},$$

其中 $k_1=r-8m,k_3=r-(8n+4)$。由于 $\deg f(x)=8n+8<r$，故有 $f(x)[M^r]=0$。

利用引理 1 和引理 2 得：

$$f(x)[M^r]=\frac{c^{2n+1}(1+c)}{(1+c)^{t_3}}[HP(2n+1)]=c^{2n+1}[HP(2n+1)]=1,$$

从而得到矛盾，故对合(M^r,T) 不存在。

2) 当 t_1 和 t_2 为一奇一偶时,对合(M^r, T) 不存在。不失一般性,可设 t_1 为偶数,t_2 为奇数(若 t_1 为奇数,t_2 为偶数,可类似证明)。

如果对合(M^r, T) 存在,取对称多项式:

$$f(x) = \left[\sigma_4(x) - \binom{k_1}{4}\right]^{2m+1}\left[\sigma_4(x) - \binom{k_3}{4}\right]^{2n+1},$$

因 $\deg f(x) = 8m+8n+8 < r$,故 $f(x)[M^r] = 0$。利用引理 1 和引理 2 经计算得:

$$f(x)[M^r] = \frac{a^{2m+1}(1+a)^{2n+1}}{(1+a)^{t_1}}[HP_1(2m)] + 0 + \frac{(1+c)^{2m+1}c^{2n+1}}{(1+c)^{t_3}}[HP(2n+1)] =$$

$$0 + c^{2n+1}[HP(2n+1)] = 1,$$

从而产生矛盾,故此种情况(M^r, T) 不存在。

3) 如果 t_1, t_2 均为偶数时,对合(M^r, T) 不存在。

若对合(M^r, T) 存在,取对称多项式:

$$f(x) = \left[\sigma_4(x) - \binom{k_1}{4}\right]^{2m}\left[\sigma_4(x) - \binom{k_3}{4}\right]^{2n},$$

因 $\deg f(x) = 8m+8n < 8m+8n+8 < r$,故 $f(x)[M^r] = 0$。又据引理 1 和引理 2 得:

$$f(x)[M^r] = \frac{(1+a)^{2n}a^{2m}}{(1+a)^{t_1}}[HP_1(2m)] + \frac{(1+b)^{2n}b^{2m}}{(1+b)^{t_2}}[HP_2(2m)] + \frac{c^{2n}(1+c)^{2m}}{(1+c)^{t_3}}[HP(2n+1)] =$$

$$a^{2m}[HP_1(2m)] + b^{2m}[HP_2(2m)] + c^{2n+1}[HP(2n+1)] = 1。$$

从而产生矛盾,故此种情况对合不存在。

综上所述,命题 2 得证。

由命题 2 可知,要使对合存在,t_3 必为偶数。

命题 3　如果 t_3 为偶数,则对合(M^r, T)存在且协边于零。

证明　若 t_3 为偶数,由文献[6]可知法丛 $v_3 \to HP(2n+1)$ 协边,此时的对合(M^r, T) 协边类由法丛 $(v_1 \to HP_1(2m)) \cup (v_2 \to HP_2(2m))$ 的协边类决定,据文献[6]可知,(M^r, T) 存在且协边于零。故当 $r > 8m+8n+8$ 时(M^r, T)存在且协边于零。

综合命题 1－命题 3,定理 1 可证。

参考文献/References:

[1] ROYSTER D C. Involutions fixing the disjoint union of two projective spaces[J]. Indiana Univ Math J, 1980, 29(2):267-276.

[2] 吴振德,刘宗泽. 不动点集为 $RP(2m) \cup RP(2n)$ 的带有对合的流形[J]. 数学季刊,1986, 1(2):19-41.
WU Zhende, LIU Zongze. Involutions fixing $RP(2m) \cup RP(2n)$[J]. Chinese Quaterly J Math, 1986, 1(2):19-41.

[3] TORRENCE B F. Bordism classes of vector bundles over real projective spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1993, 118 (3):963-969.

[4] HOU D, TORRENCE B. Involutions fixing the disjoint union of copies even dimensional projective spaces[J]. Acta Mathematica Sincia, 1996, 12(2):162-166.

[5] HOU D, TORRENCE B. Involutions fixing the disjoint union of odd-dimensional projective spaces[J]. Canada Mathematical Bulletin, 1994, 37(1):66-74.

[6] 赵素倩,王荣欣. 不动点集为 $\bigcup_{i=1}^{m} HP_i(n)$ 光滑流形的对合[J]. 河北师范大学学报(自然科学版),2002, 26(6):545-550.
ZHAO Suqian, WANG Rongxin. Involutions fixing the disjoint union of projective spaces $\bigcup_{i=1}^{m} HP_i(n)$[J]. Journal of Hebei Normal University (Natural Science Edition), 2002, 26(6):545-550.

[7] 刘秀贵,蒋云峰. 不动点集是 $\bigcup_{i=1}^{m} CP_i(2n)$ 的对合[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2003, 36(2): 84-88.
LIU Xiugui, JIANG Yunfeng. Involutions fixing the disjoint union of copies of $CP(2n)$[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis[J], 2003, 36(2): 84-88.

[8] PERGHER P L Q, FIGUEIRA F G. Z_2^k-actions fixing $K_d P^{2^s} \cup K_d P^{\text{even}}$[J]. Topology Appl, 2009, 156(13): 629-642.

[9] 刘秀贵. 不动点集是 Dold 流形 $P(2m,2n+1)$的对合[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2003, 40(5): 795-797.
LIU Xiugui. Involutions fixing the Dold manifold $P(2m,2n+1)$[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2003, 40(5): 795-797.

[10] 丁雁鸿,赵彦,李珊珊. 不动点集为 $P(2m,2l+1)\cup P(2m,2n+1)$的对合[J]. 数学学报,2008, 51(5): 971-978.
DING Yanhong, ZHAO Yan, LI Shanshan. Involutions with fixed point set $P(2m,2l+1)\cup P(2m,2n+1)$[J]. Acta Mathematica Sinica, 2008, 51(5): 971-978.

[11] LU Z. Involutions fixing $RP^{odd}\cup P(h,i)$(Ⅰ)[J]. Transactions of American Mathematical Society, 2002, 354(11):4539-4570.

[12] LU Z. Involutions fixing $RP^{odd}\cup P(h,i)$(Ⅱ)[J]. Transactions of American Mathematical Society,2003, 356(11):1291-1314.

[13] MENG Yuanyuan,WANG Yanying. Involutions with fixed point set $RP(2m)\cup P(2m,2n+1)$[J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 32B (2): 331-342.

[14] LI Jingyan, WANG Yanying, Characteristic classes of vector bundles $RP(h)\times HP(k)$[J]. Topology Appl, 2007, 154: 1778-1793.

[15] 赵素倩,王彦英,李京艳. 不动点集为 $\bigcup_{i=1}^{m} RP_i(3)\times HP_i(k)$的对合[J]. 数学学报,2009,52(6): 1119-1132.
ZHAO Suqian, WANG Yanying, LI Jingyan. Involutions fixing $\bigcup_{i=1}^{m} RP_i(3)\times HP_i(k)$[J]. Acta Mathematica Sinica, 2009, 52(6): 1119-1132.

[16] ZHAO Suqian,Wang Yanying. Involutions fixing $\bigcup_{i=1}^{m} CP_i(1)\times HP_i(n)$[J]. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32B (3): 1021-1034.

[17] LI Jingyan, WANG Yanying. Involutions fixing $RP(2m+1)\times CP(k)$[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2008, 29(4): 485-498.

[18] 郭志芳,赵素倩,陈庆辉. 不动点集为 $RP(2)\times CP(2n+1)$的对合[J]. 河北师范大学学报(自然科学版),2012,36(1):13-20.
GUO Zhifang, ZHAO Suqian. CHEN Qinghui. Involutions fixing $RP(2)\times CP(2n+1)$[J]. Journal of Hebei Normal University (Natural Science Edition), 2012, 36(1):13-20.

[19] KELTON S M. Involutions fixing $RP^j\cup F^n$[J]. Topology Appl, 2005, 149(13): 217-226.

[20] PERGHER P L Q, FIGUEIRA F G. Involutions fixing $F^n\cup F^2$[J]. Topology Appl, 2006, 153(14): 2499-2507.

[21] PERGHER P L Q, FIGUEIRA F G. Bounds on the dimension of manifolds with involution fixing $F^n\cup F^2$[J]. Glas Math J, 2008, 50 (3): 595-604.

[22] PERGHER P L Q. Involutions whose top dimensional component of the fixed point set is indecomposable[J]. Geometriae Dedicata, 2010, 146(1): 1-7.

[23] 赵素倩,丁雁鸿. 不动点集为 $RP_1(2m)\cup RP_2(2m)\cup RP(2n+1)$的对合[J]. 吉林大学学报(理学版),2011, 49(4):684-686.
ZHAO Suqian,DING Yanhong. Involutions fixing $RP_1(2m)\cup RP_2(2m)\cup RP(2n+1)$[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2011, 49(4):684-686.

[24] CONNER P E. Differentiable Periodic Maps[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-verlag, 1979.

[25] KOSNIOWSKI C, STONG R E. Involutions and characteristic numbers[J]. Topology, 1978, 17: 309- 330.