文章编号:1008-1542(2015)02-0150-07 doi:10.7535/hbkd.2015yx02006

非线性不确定多时滞切换奇异系统的鲁棒 H_∞ 保性能控制

张立俊[1],杨丽芸[1],刘春菊[2],仇计清[1],丛 悦[1],鲍冬冬[1]

(1. 河北科技大学理学院,河北石家庄 050018;2. 石家庄铁道大学四方学院,河北石家庄 050228)

摘 要:对非线性不确定多时滞切换奇异系统的鲁棒 H_∞ 保性能控制问题进行了研究。假设系统是正则的和无脉冲情况下有一个范数有界的非线性函数式满足相应的切换规则和 Lyapunov 函数,应用线性矩阵不等式(LMIs)的方法,得到闭环系统的零解是渐进稳定的,给出鲁棒 H_∞ 保性能控制器存在的充分条件和设计方法。最后通过仿真例子,验证所用方法的有效性。

关键词:稳定性理论;非线性;多时滞;奇异系统;保性能; 线性矩阵不等式

中图分类号:O231 **MSC(2010)主题分类**:93C10 **文献标志码**:A

Robust H_∞ guaranteed cost control for non-linear uncertain switched singular systems with multiple time-delay

ZHANG Lijun[1], YANG Liyun[1], LIU Chunju[2], QIU Jiqing[1], CONG Yue[1], BAO Dongdong[1]

(1. School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China; 2. Sifang College, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang, Hebei 050228, China)

Abstract: This paper investigates the problem of robust H_∞ guaranteed cost control for non-linear uncertain switched singular systems with multiple time-delay. Nonlinear is considered to be norm bounded and the systems are regular and impulse free. A sufficient condition for existences of robust H_∞ guaranteed cost controller is given by the linear matrix inequalities (LMI) at the Lyapunov function and switching rule. It is shown that the closed-loop systems are asymptotically stable. Finally, the results are validated and advantage, through a given example.

Keywords: theory of stability; non-linear; multiple time-delay; singular system; guranteed cost; LMIs

切换系统是一类特殊的混杂系统,它是由若干子系统和描述它们之间联系的切换规则组成。根据恰当的切换规则可以使系统获得较好的性能,例如,2个不稳定的子系统可以通过适当的切换规则使得系统渐进稳定[1]。因为实际系统本身就包含了时滞和不确定性,而这些时滞和不确定性是造成系统不稳定的主要原因[2]。因此,人们对不确定时滞系统进行了广泛的研究[3-6]。在控制这一类系统的时候,人们希望既可以确

收稿日期:2014-09-03;修回日期:2014-11-19;责任编辑:张 军

基金项目:河北省自然科学基金(F2014208042)

作者简介:张立俊(1987—),女,河北邯郸人,硕士研究生,主要从事复杂系统中的优化控制、鲁棒控制、切换系统等方面的研究。

通讯作者:仇计清教授。E-mall:qiujiqing@263.net

张立俊,杨丽芸,刘春菊,等.非线性不确定多时滞切换奇异系统的鲁棒 H_∞ 保性能控制[J].河北科技大学学报,2015,36(2):150-156.

ZHANG Lijun, YANG Liyun, LIU Chunju, et al. Robust H_∞ guaranteed cost control for non-linear uncertain switched singular systems with multiple time-delay[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2015, 36(2):150-156.

保系统的稳定性，又可以获得一定的鲁棒性能。在这种研究背景下，文献[7]提出了保性能控制的思想，即设计一个控制器，使得该闭环系统对所有的不确定性，既保持鲁棒稳定性，又保证其给定的性能指标小于某一上界。对于保性能控制问题已经取得了丰富的研究成果[8-11]。文献[12]为了给不确定时滞系统设计鲁棒保性能控制器，提出了利用 Riccati 方程的方法。而文献[13]将最优保性能控制器的设计归结为具有 LMIs 约束的凸优化问题。

近几十年来，奇异系统已经被广泛地扩展到电力、经济等系统中，因为应用奇异模型描述问题来比其他系统模型更直接。因此，许多建立在奇异系统基础上的其他系统也得到了广泛的应用[14-16]，如基于线性矩阵不等式的奇异系统的鲁棒稳定性控制[17]，不确定时滞离散奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制[18]等。但目前研究的切换奇异系统以不确定单时滞系统居多，而关于多时滞的研究尚不多见。本文研究了非线性不确定多时滞切换奇异系统的鲁棒 H_∞ 保性能控制问题。首先，定义鲁棒 H_∞ 保性能控制的定义；然后应用线性矩阵不等式 LMIs 的方法，根据相应的切换规则，设计鲁棒 H_∞ 保性能控制器，使得闭环系统符合鲁棒 H_∞ 保性能控制的定义，最后通过一个数值算例和仿真验证此方法的有效性。

1　问题描述和准备知识

考虑如下非线性不确定多时滞切换奇异系统：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\boldsymbol{A}_{\sigma(t)}+\Delta\boldsymbol{A}_{\sigma(t)}(t)]\boldsymbol{x}(t)+[\boldsymbol{A}_{d\sigma(t)}+\Delta\boldsymbol{A}_{d\sigma(t)}(t)]\boldsymbol{x}(t-d)+\boldsymbol{B}_{1\sigma(t)}\boldsymbol{u}(t)+ \\ \qquad \boldsymbol{B}_{2\sigma(t)}\boldsymbol{u}(t-h)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{G}_{\sigma(t)}\boldsymbol{\omega}(t), \\ z(t)=\boldsymbol{C}_{\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_{\sigma(t)}\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),t\in[-\xi,0],\xi=\max[h,d], \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{R}^m$，$z(t)\in\boldsymbol{R}^q$ 和 $\boldsymbol{\omega}(t)\in L_2[0,+\infty)$ 分别表示状态，控制输入，被控输出和扰动输入向量，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))$ 表示非线性干扰，且满足 $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))\|\leqslant\|\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)\|$；$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 表示 $[-\xi,0]$ 上连续的初始状态，h,d 表示正的时滞常数，$\boldsymbol{E}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 表示奇异矩阵，且满足 rank $\boldsymbol{E}=r<n$；$\delta(\cdot):[0,+\infty)\to\{1,2,\cdots,n\}\overset{\text{def}}{=}\bar{N}$ 表示分段常值切换信号，且 $\sigma(t)=i$ 表示第 i 个子系统在 t 时刻被激活。假设 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_{di},\boldsymbol{B}_{1i},\boldsymbol{B}_{2i},\boldsymbol{C}_i,\boldsymbol{D}_i,\boldsymbol{G}_i,\boldsymbol{M}$ 表示系统具有适当维数的常矩阵，$\Delta\boldsymbol{A}_i,\Delta\boldsymbol{A}_{di}$ 表示描述参数不确定性的不变矩阵，且具有如下形式：

$$[\Delta\boldsymbol{A}_i\ \Delta\boldsymbol{A}_{di}]=\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{F}_i(t)[\boldsymbol{H}_i\ \boldsymbol{H}_{di}],\quad \forall i\in\bar{N}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{H}_{di}(i\in\bar{N})$ 表示给定的具有相应维数的常矩阵。$\boldsymbol{F}_i(t)$ 表示不确定矩阵，且满足 $\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_i(t)\leqslant\boldsymbol{I}$。

定义 1　考虑系统(1)的自由系统如下：

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}_d, \tag{3}$$

1) 对每一个 $i\in\boldsymbol{M}$，存在 $s\in\mathbf{C}$，使得 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{A}_{di})\neq0$，则称切换奇异系统(3)是正则的；

2) 如果系统(3)是正则的，对所有 $s\in\mathbf{C}$，均满足 $\deg(\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{A}_{di}))=\text{rank}\ \boldsymbol{E}$，$i\in\boldsymbol{M}$，$\deg(p(s))$ 表示多项式 $p(s)$ 的次数，则称切换奇异系统(3)是无脉冲的。

注 1：文中所研究的切换奇异系统均是正则和无脉冲的。证明过程可以参见文献[17]。

注 2：$\boldsymbol{M}$ 表示一个有限的整数范围，$\mathbf{C}$ 表示全体实数。

为了方便对问题的研究，$\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{x}(t-d)$，$\boldsymbol{x}(t-h)$，$\boldsymbol{\omega}(t)$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))$ 分别被记为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d,\boldsymbol{x}_h,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{g}$，且 $\bar{\boldsymbol{A}}_i=\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i(t)$，$\bar{\boldsymbol{A}}_{di}=\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di}(t)$，$\bar{\boldsymbol{C}}_i=\boldsymbol{C}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{K}_i$。

系统(1)在状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}_{\delta(t)}(t)=\boldsymbol{K}_{\delta(t)}\boldsymbol{x}(t)$ 作用下的闭环系统为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\bar{\boldsymbol{A}}_i+\boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}+\bar{\boldsymbol{A}}_{di}\boldsymbol{x}_d+\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}_h+\boldsymbol{g}+\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{\omega}, \\ z(t)=\bar{\boldsymbol{C}}_i\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\quad t\in[-\xi,0],\quad \xi=\max[h,d], \end{cases} \tag{4}$$

引入性能指标：

$$\boldsymbol{J}=\int_0^\infty(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}_{\delta(t)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{\delta(t)})\mathrm{d}t, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是给定的正定加权矩阵。

定义 2　对于系统(1) 和给定的常数 $\gamma>0$，设计切换规则 $\sigma(t)$，如果对于所有的参数和性能指标(5)，使得到的闭环奇异切换系统(4) 满足：

1) 当 $\boldsymbol{\omega}(t)\equiv 0$ 时,闭环奇异切换系统(4) 的零解是渐近稳定的;

2) 当 $\boldsymbol{\varphi}(t)=0$ 时,对任意非零向量 $\boldsymbol{\omega}(t)\in L_2[0,+\infty)$,满足 $\|\boldsymbol{z}\|_{[0,+\infty)}<\gamma^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{[0,+\infty)}$ 成立;

3) 存在性能指标的一个上界 $\boldsymbol{J}^*>0$,使得闭环系统(4) 是渐进稳定的,且满足 $\boldsymbol{J}\leqslant\boldsymbol{J}^*$。则称状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}_{\delta(t)}$ 为系统(1) 的鲁棒 H_∞ 保性能控制律。

引理 1[14] (schur 补引理) 若已知 3 个矩阵和 $\boldsymbol{\Omega}_1$,$\boldsymbol{\Omega}_2$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_3$,则 $\boldsymbol{\Omega}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Omega}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_2^{-1}\boldsymbol{\Omega}_3<0$,当且仅当

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{\Omega}_3^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Omega}_3 & -\boldsymbol{\Omega}_2\end{bmatrix}<0 \quad 或者 \quad \begin{bmatrix}-\boldsymbol{\Omega}_2 & \boldsymbol{\Omega}_3\\ \boldsymbol{\Omega}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Omega}_1\end{bmatrix}<0。$$

引理 2[15] 对于任意给定的适当维数的矩阵 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$ 和任意标量 $\alpha>0$,有:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\leqslant\alpha\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\alpha^{-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}。$$

引理 3[16] 对于适当维数的矩阵 $\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{H}$,则 $\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{MFH}+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}<0$,对于所有满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{I}$ 的矩阵成立,当且仅当存在标量 $\varepsilon>0$,有:

$$\boldsymbol{Y}+\varepsilon\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}<0。$$

2 主要结果

定理 1 对于给定的常数 $\gamma>0$,$\lambda>0$ 和性能指标(5),若存在可逆对称矩阵 $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,矩阵 $\boldsymbol{K}_i$ 及对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$,$\boldsymbol{Q}_2$,n 个满足 $\alpha_i>0$,$i\in\bar{N}$,且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ 的实数 α_i,使得如下矩阵不等式成立:

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\geqslant 0, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_i & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{K}_i & \lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{C}}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & -\boldsymbol{Q}_2 & 0 & 0 & 0\\ \lambda\boldsymbol{P} & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ \bar{\boldsymbol{C}}_i & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0, \tag{7}$$

则系统(1) 是具有鲁棒 H_∞ 干扰抑制水平 γ 状态反馈可切换正定的。其中:$\boldsymbol{\Lambda}_i=\bar{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}/\lambda^2+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i$,$\boldsymbol{u}_i(t)=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(1) 的一个鲁棒 H_∞ 保性能控制律,且相应的性能指标满足:

$$\boldsymbol{J}\leqslant\boldsymbol{J}^*=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varphi}(0)+\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\varphi}(t)\mathrm{d}t+\int_{-h}^{0}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\varphi}(t)\mathrm{d}t, \tag{8}$$

选取的切换规则为

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\arg\min_{i\in\bar{N}}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Lambda}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di}\boldsymbol{Q}_1^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\lambda^2\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\bar{\boldsymbol{C}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}_i+\gamma^{-2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}\}。 \tag{9}$$

证明 由引理 1,不等式(7) 等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[\boldsymbol{\Lambda}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di}\boldsymbol{Q}_1^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\lambda^2\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\bar{\boldsymbol{C}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}_i+\gamma^{-2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}]<0, \tag{10}$$

即对于 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n/\{0\}$,有:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Lambda}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di}\boldsymbol{Q}_1^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\lambda^2\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\bar{\boldsymbol{C}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}_i+\gamma^{-2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}]<0, \tag{11}$$

由于 $\bar{\boldsymbol{C}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}_i$ 和 $\gamma^{-2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 均不小于 0,故对于 $\forall\,t\geqslant 0$,下列不等式总成立:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Lambda}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di}\boldsymbol{Q}_1^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\lambda^2\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}]<0。 \tag{12}$$

假设$\{(t_k,i_k),0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\}$ 是由切换规则(9) 在区间$[0,+\infty)$ 上生成的切换序列,其中(t_k,i_k) 表示当 $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$ 第 i_k 个子系统被激活且在 t_{k+1} 时离开。对闭环系统(4) 构造 Lyapunov 函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_t)$,使得对任意非零状态 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_t)$ 是正定的。令

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_t)=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-d}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm{d}\tau+$$
$$\int_{0}^{t}\|\lambda^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(\tau)\|^2-\|\lambda^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(\tau))\|^2\mathrm{d}\tau。 \tag{13}$$

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_t)$ 沿闭环系统(4) 对 t 求导，可得：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}_t) = {} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{i_k}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di_k}\boldsymbol{x}_d + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}\boldsymbol{K}_{i_k}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}\boldsymbol{K}_{i_k}\boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{i_k}\boldsymbol{\omega} + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x} - \mathrm{x}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_d + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}/\lambda^2 - \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}/\lambda^2。\end{aligned} \tag{14}$$

首先证明当 $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$ 时，闭环系统(4) 在切换规则(9) 下的零解是渐进稳定的。

当 $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$ 时，

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}_t) = {} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{A}}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{i_k} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}\boldsymbol{K}_{i_k} + \boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}/\lambda^2 + \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di_k}\boldsymbol{x}_d + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}\boldsymbol{K}_{i_k}\boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g} + \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_h - \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}/\lambda^2 = \\ & [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{\Theta}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中：$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{i_k} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di_k} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}\boldsymbol{K}_{i_k} & \lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{di_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q}_1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & -\boldsymbol{Q}_2 & 0 \\ \lambda\boldsymbol{P} & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$；

$\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{i_k} = \bar{\boldsymbol{A}}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{i_k} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}\boldsymbol{K}_{i_k} + \boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}/\lambda^2 + \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2$。

结合式(7) 和式(12) 可得：

$$\dot{\boldsymbol{V}}(x_{i_k}) \leqslant -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_{i_k})\boldsymbol{x} < 0。\tag{15}$$

由 Lyapunov 稳定性理论，闭环系统(4) 在切换规则(9) 下的零解是渐进稳定的。

下面证明闭环系统(4) 满足给定的 H_∞ 性能指标。

由引理 2 知：

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{i_k}\boldsymbol{\omega} \leqslant \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} + \gamma^{-2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{i_k}\boldsymbol{G}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}。\tag{16}$$

对于任意的 $\boldsymbol{\omega}(t) \in L_2[0, +\infty)$，结合式(14) 和式(16)，可得：

$$\begin{aligned}& \dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}_t) + \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t) \leqslant \\ & \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{i_k}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di_k}\boldsymbol{x}_d + \\ & \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}\boldsymbol{K}_{i_k}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}\boldsymbol{K}_{i_k}\boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_d + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_h + \\ & \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}/\lambda^2 - \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}/\lambda^2 + \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} + \gamma^{-2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{i_k}\boldsymbol{G}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}_{i_k}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}_{i_k}\boldsymbol{x} - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} = \\ & \quad [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{g}]\bar{\boldsymbol{\Theta}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_h^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{g}]^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中：

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{i_k} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{di_k} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}\boldsymbol{K}_{i_k} & \lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{di_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q}_1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & -\boldsymbol{Q}_2 & 0 \\ \lambda\boldsymbol{P} & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{i_k} = \bar{\boldsymbol{A}}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_{i_k} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}\boldsymbol{K}_{i_k} + \boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}/\lambda^2 + \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2 + \bar{\boldsymbol{C}}_{i_k}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}_{i_k} + \gamma^{-2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{i_k}\boldsymbol{G}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}。$$

故，

$$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}_t) + \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t) < 0。\tag{17}$$

当 $\varphi(t) = 0$ 时，式(17) 两边分别从 $0 \sim +\infty$ 对 t 积分，可得：

$$\int_0^{+\infty}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)\mathrm{d}t - \gamma^2\int_0^{+\infty}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t < -\boldsymbol{V}(x_{+\infty}) \leqslant 0,\tag{18}$$

故，对于任意的 $\boldsymbol{\omega}(t) \in L_2[0, +\infty)$，有 $\| \boldsymbol{z} \|_{[0,+\infty)} < \gamma^2 \| \boldsymbol{\omega} \|_{[0,+\infty)}$。

将式(15) 两边分别对 t_k 从 $0 \sim +\infty$ 取积分，可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} < {} & -\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_{t_0}) = \\ & \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\varphi}(0) + \int_{-b}^{0}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\varphi}(t)\mathrm{d}t + \int_{-h}^{0}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\varphi}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{J}^*。\end{aligned}\tag{19}$$

由此定理得证。

定理 2 满足定理 1 条件，式(6) 与式(7) 的充要条件为对于任意给定的正实数 $\gamma > 0$，常数 $\lambda > 0$，若存在 非奇异可逆矩阵 $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\varepsilon > 0$，及对阵正定矩阵 $\boldsymbol{K}_i$，$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，常数 $\varepsilon > 0$，n 个满足 $\alpha_i > 0$，$i \in \overline{N}$，且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ 的实数 α_i，使得如下矩阵不等式成立：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1} = (\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} \geqslant 0, \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi} & \boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{V}_i & \lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_i & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}_{di}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}^{\mathrm{T}} & 0 & -\boldsymbol{Y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\boldsymbol{I} & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{T}_i & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{H}_i\boldsymbol{S} & \boldsymbol{H}_{di}\boldsymbol{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{X} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{Y} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{Z} & 0 \\ \boldsymbol{T}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{W} \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

其中：$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{S} + \boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{T}_i + \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i}^{\mathrm{T}} + \varepsilon\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{Q}_1^{-1} = \boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Q}_2^{-1} = \boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{Q}_2^{-1} = \boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{T}_i$，

此时，

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \arg\min_{i\in N}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\Pi_i + (\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_{di}\boldsymbol{Q}_1^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_{di}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1}) + (\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{Y}\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{2i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1}) + \lambda^2(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1}) + (\boldsymbol{C}_i + \boldsymbol{D}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_i + \boldsymbol{D}_i\boldsymbol{K}_i) + \gamma^{-2}(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1}))\boldsymbol{x}\},$$

其中：$\boldsymbol{\Pi}_i = \overline{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1}) + (\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_i + (\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{K}_i + \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{1i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1}) + \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}/\lambda^2 + \boldsymbol{X}^{-1} + \boldsymbol{Y}^{-1} + \boldsymbol{Z}^{-1} + \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}$。

证明 根据定理 1 只需要证明式(6) 和式(7) 分别与式(20) 和式(21) 等价即可。

在式(7) 中，分别用 $\boldsymbol{A}_i + \Delta\boldsymbol{A}_i(t) = \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{H}_i$，$\boldsymbol{A}_{di} + \Delta\boldsymbol{A}_{di}(t) = \boldsymbol{A}_{di} + \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{H}_{di}$，$\boldsymbol{C}_i + \boldsymbol{D}_i\boldsymbol{K}_i$ 代替 $\overline{\boldsymbol{A}}_i$，$\overline{\boldsymbol{A}}_{di}$，$\overline{\boldsymbol{C}}_i$，可以得到下面的式子：

$$\text{式(7)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}\boldsymbol{M}_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{F}_i(t)[\boldsymbol{H}_i \quad \boldsymbol{H}_{di} \quad 0 \quad 0 \quad 0] + \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{H}_{di}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{F}_i(t)[\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] < 0。 \tag{22}$$

由引理 3，式(22) 成立时，当且仅当

$$\text{式(7)} + \varepsilon\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}\boldsymbol{M}_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{H}_{di} \quad 0 \quad 0 \quad 0] + \varepsilon^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{H}_{di}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} \quad \boldsymbol{H}_{di} \quad 0 \quad 0 \quad 0] < 0 \tag{23}$$

成立。

对式(23) 应用引理 1，并且左乘 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{Q}_1^{-1},\boldsymbol{Q}_2^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}^{\mathrm{T}}$ 右乘 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{Q}_1^{-1},\boldsymbol{Q}_2^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$，并令 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{Q}_1^{-1} = \boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Q}_2^{-1} = \boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{Q}_2^{-1} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{i}}$，$\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{T}_i$，则可推导出式(21) 与式(7) 等价。

另外，令 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{X}$，容易得出式(20) 与式(6) 等价。故定理 2 得证。

定理 3 对于系统(1) 和性能指标(5)，对于给定的常数 $\gamma > 0$，$\lambda > 0$，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\varepsilon > 0$，$\beta > 0$，及对阵正定矩阵 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{N}_1$，$\boldsymbol{N}_2$，n 个满足 $\alpha_i > 0$，$i \in \overline{N}$，且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ 的实数 α_i，使得以下凸优化

问题有最优解 $\min\limits_{\varepsilon,\beta,\boldsymbol{S},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2}\{\beta+\mathrm{trace}(\boldsymbol{N}_1)+\mathrm{trace}(\boldsymbol{N}_2)\}$,

$$\text{s.t.}\begin{cases}1)\ \text{LMIs (21)},\\ 2)\begin{bmatrix}-\beta & \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)\\ \boldsymbol{\varphi}(0) & -\boldsymbol{S}\end{bmatrix}<0,\\ 3)\begin{bmatrix}-\boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{U} & -\boldsymbol{X}\end{bmatrix}<0,\\ 4)\begin{bmatrix}-\boldsymbol{N}_2 & \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{U} & -\boldsymbol{Y}\end{bmatrix}<0,\end{cases}\tag{24}$$

其中:$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\int_{-\xi}^{0}\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t$。

证明　由定理 2 知,若式(21) 成立,则 $\boldsymbol{U}_{\delta(t)}(t)=\boldsymbol{K}_{\delta(t)}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}_{\delta(t)}\boldsymbol{P}$ 为系统(4) 的鲁棒 H_∞ 保性能控制器,性能指标上界由式(19) 确定。

式(24) 中的 2) 等价于 $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\varphi}(0)<\beta$,

式(24) 中的 3) 等价于 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{U}<\boldsymbol{N}_1$,且 $\mathrm{tr}\{\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{U}\}<\mathrm{tr}\{\boldsymbol{N}_1\}$,

式(24) 中的 4) 等价于 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{U}<\boldsymbol{N}_2$,且 $\mathrm{tr}\{\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{U}\}<\mathrm{tr}\{\boldsymbol{N}_2\}$。

由上述关系和式(8) 可知,$\boldsymbol{J}^*\leqslant\min\limits_{\varepsilon,\beta,\boldsymbol{S},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2}\{\beta+\mathrm{trace}(\boldsymbol{N}_1)+\mathrm{trace}(\boldsymbol{N}_2)\}$。因此 $\beta+\mathrm{trace}(\boldsymbol{N}_1)+\mathrm{trace}(\boldsymbol{N}_2)$,取最小值将保证性能指标上界式(8) 最小。

3　数值举例

考虑如下非线性不确定多时滞切换奇异系统(1) 的参数如下:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-0.4 & 0.2\\ -0.11 & -0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_{d1}=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ -0.1 & -0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_{11}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_{21}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_{d1}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.4\\ 0.3 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}7.5 & 3\\ 8 & 2\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2\\ 0.8 & -0.1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_{d2}=\begin{bmatrix}-0.6 & 0\\ 0.2 & -0.5\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_{12}=\begin{bmatrix}200 & 400\\ 10 & 50\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_{22}=\begin{bmatrix}20 & 70\\ -10 & 70\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_{d2}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.1 & 0.5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}10 & 1\\ -20 & 10\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_2=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 4 & 3\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_2=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

选取 $\gamma=1,\lambda=0.3,\xi=1$,性能指标的对称加权矩阵为 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0.8 & 0\\ 0 & 0.8\end{bmatrix},\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$,

初始条件为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{t/2}\\ \mathrm{e}^{-t/2}\end{bmatrix}$。

通过应用 LMIs 工具箱中的 mincx,得到:

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{bmatrix}55.4282 & 19.1429\\ 19.1429 & 22.9747\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{K}_2=\begin{bmatrix}60.9710 & 21.0572\\ 21.0572 & 25.2722\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}^*=23.9055。$$

利用这个可行解构造出该系统的最优鲁棒 H_∞ 保性能控制器:

$$\boldsymbol{u}_1(t)=\begin{bmatrix}55.4282 & 19.1429\\ 19.1429 & 22.9747\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{u}_2(t)=\begin{bmatrix}60.9710 & 21.0572\\ 21.0572 & 25.2722\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)。$$

相应的性能指标 $\boldsymbol{J}^*=23.9055$。

4　结　语

本文针对一类非线性不确定多时滞切换奇异系统,研究了该系统的鲁棒 H_∞ 保性能控制问题。主要目的是给出鲁棒 H_∞ 保性能控制器,该控制器不仅使得闭环系统是渐进稳定的,而且相应的性能指标不得超过某个规定的上界。基于 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式,得到闭环系统渐进稳定的充分条件并设计鲁棒

H_∞ 控制器。最后通过数值举例证明了所用方法的有效性。

参考文献/References：

[1] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems [J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5): 59-70.

[2] 宋正一，赵军. 不确定时滞线性离散切换系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 自动化学报，2006，32(5)：760-766.
SONG Zhengyi, ZHAO Jun. Robust H_∞ control for linear deiscrete-time switched systems with norm-bounded uncertainties and time-delay [J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(5): 760-766.

[3] 王刻奇，杨智. 不确定离散时滞系统的时滞相关保性能控制[J]. 信息与控制，2010，39(3)：373-378.
WANG Keqi, YANG Zhi. Delay-dependent guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay system[J]. Information and Control, 2010, 39(3): 373-378.

[4] CHEN Wuhua, GUAN Zhihong, LU Xiaomei. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with both state and input delays [J]. Journal of The Franklin Institute, 2004, 341(5): 419-430.

[5] 邱占芝，张庆灵，刘明. 不确定时延输出反馈网络化系统保性能控制[J]. 控制理论与应用，2007，24(2)：274-278.
QIU Zhanzhi, ZHANG Qingling, LIU Ming. Guaranteed performance control for output feedback networked control systems with uncertain time-delay [J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(2): 274-278.

[6] 孙晓岭，杨丽芸，鲍冬冬，等. 时滞网络化控制系统的鲁棒 H_∞ 稳定性分析[J]. 河北科技大学学报，2013，34(4)：297-301.
SUN Xiaoling, YANG Liyun, BAO Dongdong, et al. Analysis of robust H_∞ stability for time delay network control system[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2013, 34(4): 297-301.

[7] SHEKDIN S L, PENG T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1972, 17(4): 474-483.

[8] YONEYAMA J. Robust stabilization for uncertain time-delay systems under time-varying sampling [J]. Applied Mathematical Sciences, 2009, 38(3): 1873-1883.

[9] JIA Huimei, XIANG Zhengrong, KARIMI H R. Robust reliable passive control of uncertain stochastic switched time-delay systems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 231: 254-267.

[10] DU Zhaoping, ZHANG Qinglin. Delay-dependent robustcontrol for uncertain singular systems with multiple state delays [J]. IET Control Theory Application, 2009, 3(6): 731-740.

[11] 何召兰，高岑，武俊峰. 不确定时滞切换奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制 [J]. 北京化工大学学报(自然科学版)，2012，39(1)：89-92.
HE Zhaolan, GAO Cen, WU Junfeng. Robust H_∞ control for uncertain time-delay switched singular systems[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology(Natural Science), 2012, 39(1): 89-92.

[12] MAHMOUD M S, XIE L. Guaranteed cost control of uncertain discrete systems with delay [J]. International Journal of Control, 2000, 73(2), 105-114.

[13] 杨坤，沈艳霞，纪志成. 不确定时变时滞切换奇异切换广义系统的鲁棒 H_∞ 保性能控制[J]. 控制决策，2013，28(5)：787-796.
YANG Kun, SHEN Yanxia, JI Zhicheng. Robust H_∞ guaranteed cost control for uncertain switched singular systems with time-varying delay [J]. Control and Decision, 2013, 28(5): 787-796.

[14] YUE D, HAN Q L. Delay-dependent exponential stability of stochastic systems with time-varying delay nonlinearity and markovian switching [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(2): 217-222.

[15] SU H, WANG X Z. Flocking for multi-agents with a virtual leader [J]. IEEE Transctions on Automatic Control, 2009, 54(2): 293-307.

[16] XU Shengyuan, SHI Peng, CHU Yuming, et al. Robust stochastic stabilization and H_∞ control of uncertain neutral stochastic time-delay systems [J]. Journal of Mathematical Analusis and Applications, 2006, 314(1): 1-16.

[17] WU Zhengguang, ZHOU Wuneng. Delay-dependent robust stabilization for uncertain singular systems with state delay [J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(7): 714-718.

[18] FANG Mei. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain singular systems with state delay [J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(1): 65-70.