第 36 卷第 2 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 36, No. 2
2015 年 4 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Apr. 2015

文章编号：1008-1542(2015)02-0144-06　　**doi:10.7535/hbkd.2015yx02005**

给定距离数的有限点集直径图的研究

魏祥林，丛　悦，高飞星

（河北科技大学理学院，河北石家庄　050018）

摘　要：给定一平面点集 X，若点集 X 确定 k 个互异距离，则称 X 为 k 距离集，其中最长距离称为直径 D。X_D 表示所有直径端点构成的集合，$m=m(X)=|X_D|$ 表示 X_D 中的元素个数。$DG(X_D)$ 表示 X 中的所有直径构成的图形。令 $g(k)$ 表示确定 k 个距离的最大点集所含点的个数，目前对 $k\leqslant 6$ 的 $g(k)$ 取值有了确切的结果。研究了距离数 $k\geqslant 7$ 的平面点集。首先，对 $m=|X_D|=2k-1$ 的 k 距离直径图 $DG(X_D)$ 中所有顶点的度值 $d(v)$ 分析判断，得出 $d(v)\leqslant 2$。在此基础上研究了 7 距离集的情形，证明当 7 距离集的直径图为 $DG(X_D)=P_{10}\cup P_2$ 时，必有 $X_D=R_{15}-3$。这是研究最大 7 距离集的基础。

关键词：组合数学；互异距离；直径图；k 距离集

中图分类号：O157.3　　**MSC(2010)主题分类：**51K05　　**文献标志码：**A

Research on diameter graphs of finite point sets defined by the number of distance

WEI Xianglin, CONG Yue, GAO Feixing

(School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: A planar point set X is called a k-distance set if there are exactly k distinct distances defined by every two points in X, and the longest distance is called diameter D. The set of the endpoints of all diameters is denoted by X_D. Let $m=m(X)=|X_D|$ be the number of elements of X_D, and the diameter graph $DG(X_D)$ be all diameters in X. There are many results on determining the value of $g(k)$ when $k\leqslant 6$, where $g(k)$ is the number of points of the largest point set having k distinct distances. We consider planar point sets for the case of $k\geqslant 7$. Firstly, we perform an analysis on the degree value $d(v)$ of all vertices in k-distance $DG(X_D)$ for $m=|X_D|=2k-1$, and obtain that $d(v)\leqslant 2$. Based on this result, we research the case of 7-distance. We get $X_D=R_{15}-3$ when the 7-distance sets $DG(X_D)=P_{10}\cup P_2$. The result provides a theoretical foundation for further discussions on 7-distance sets.

Keywords: combinatorial mathematics; distinct distance; diameter graph; k-distance sets

给定一平面点集 X，如果 X 中的任意两点确定的互异距离数为 k，则称 X 为 k 距离集。用 $d(x,y)$ 表示平面上互异两点 x,y 之间的距离，记 X 中的最大距离为直径 D。令 $X_D=\{x,y\in X:d(x,y)=D\}$。用 $m=$

收稿日期：2014-06-24；修回日期：2014-09-17；责任编辑：张　军

基金项目：河北省自然科学基金(A2014208095)

作者简介：魏祥林(1974—)，女，河北张家口人，教授，博士，主要从事离散与组合几何方面的研究。

E-mail：wxlhebtu@126.com

魏祥林，丛　悦，高飞星．给定距离数的有限点集直径图的研究[J]．河北科技大学学报，2015，36(2)：1144-149.

WEI Xianglin, CONG Yue, GAO Feixing. Research on diameter graphs of finite point sets defined by the number of distance[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2015, 36(2): 144-149.

$m(X)=|X_D|$ 表示 X_D 中的元素个数。文献[1]引入了直径图 $DG(X_D)$ 的概念，直径图 $DG(X_D)$ 是由 X 中所有直径构成的图。$d(v)$ 表示直径图 $DG(X_D)$ 中与 v 关联的边数，称之为 v 的度。P_n 表示由 n 个顶点构成的一条路，C_n 表示由 n 个顶点构成的一个圈。当有 n 个点时，加法运算在模 n 的条件下进行。定义 R_n 为正 n 边形顶点所构成的集合，R_n^+ 为正 n 边形顶点和中心所组成的集合，R_n-i 表示正 n 边形中 $n-i$ 个顶点组成的集合。ERDOS 和 FISHBURN 在文献[2]中讨论了确定 k 距离的最大点集，记最大点集所含点数为 $g(k)$，并给出 $g(1)=3$，$g(2)=5$，$g(3)=7$，$g(4)=9$，$g(5)=12$，对最大 5 距离集给出了详细的讨论，提出两大猜想：$g(6)=13$ 且这样的十三点集只有 3 个；确定了 $g(k)(k\geqslant 7)$ 的最大点集只能在三角形格点上。文献[3]论证了 3 距离集的构造。SHINOHARA 在文献[1]中论证了 12 点 5 距离集的构造唯一性。文献[4]—文献[8]中给出的 11 点 5 距离集的构造，7 点 4 距离集的构造，证明了最大 6 距离集为 13 点集的猜想，即 $g(6)=13$。文献[8]对直径图为圈 C_{2k-3} 的 k 距离集进行了分析，相关的研究见文献[9]—文献[14]。本文通过对直径图中 $d(v)$ 的分析，给出了 $m=12$ 时一类特殊的 7 距离集直径图，这是研究最大 7 距离集的基础。

1 预备知识

引理 1[2] 设 D 为平面 n 点集 X 的直径，其中 $n\geqslant 3$，$m=|X_D|$，

1）如果 $m\geqslant 3$，那么 X_D 的点是凸 m 边形的顶点；

2）如果 X_D 中减少的点数超过 $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$，那么直径 D 不存在。

引理 2[1] 在 X 中，设直径图 $G=DG(X_D)$。则有：

1）当 $k\geqslant 2$ 时，G 中不包含 C_{2k}，即 G 中只能包含奇圈。

2）G 中最多只能包含一个圈。

引理 3[5] 如果 $d(v)=k\geqslant 2$，$v\in X_D$，那么 v 所对应的 k 条直径的端点是相继的。

引理 4[5-6] 平面点集 X，$m=|X_D|$，设 $X_D=\{1,2,3,\cdots,m\}$，m 个点逆时针顺序连续排列，S 是 X_D 中的一个子集，$S=\{k,k+1,k+2,\cdots,k+l-1\}$。如果线段$[k,k+l-1]$是 S 中的最长线段，$d(k,k+i)<d(k,k+l-1)$，$i=1,2,3,\cdots,l-2$，那么 $d(k,k+1)<d(k,k+2)<d(k,k+3)<\cdots<d(k,k+l-1)\leqslant D$。

引理 5[15] 设 X 是含有 s 个距离的凸 n 边形顶点集，其中 $D=d_1>d_2>\cdots>d_s$。如果凸 n 边形有一条边的长度为 D，那么必有 $s\geqslant n-2$。

引理 6[2] 同一个图中任意 2 条直径相交或者有一端点相同。

2 k 距离集直径图

定理 1 设 X 是 k 距离集，且 $m=|X_D|=2k-1$，那么对于任意 $v\in X_D$，$d(v)\leqslant 2$。

证明 设 X 的 k 个距离为 $D=d_1>d_2>\cdots>d_k$，根据引理 1 可得 X_D 是一个凸的 $2k-1$ 边形的顶点集。设 $X_D=\{1,2,3,\cdots,2k-1\}$，$2k-1$ 个点按逆时针顺序依次排列。对于任意 $i\in X_D$，若 $d(i,j)=D$，$j=\{i+1,i+2,\cdots,i+k-3\}$，根据引理 5，此时 X 的互异距离数大于 k，于是 $d(i)\leqslant 4$，$i\in X_D$。由于 X_D 上所有 $2k-1$ 个点没有本质上的区别，讨论情形一样，不失一般性，下面讨论 $d(1)\leqslant 4$ 的情况。

情形 1：推证 $d(1)\neq 4$。

若 $d(1)=4$，由引理 3 可知 $d(1,k-1)=d(1,k)=d(1,k+1)=d(1,k+2)=D$。再根据引理 6，可知 $d(2,k+1)\neq D$。通过引理 4 得到 $D=d(1,k+1)>d(2,k+1)>d(3,k+1)>\cdots>d(k,k+1)$，共 k 个不同距离。并且 $d(k,k+1)=d(k-1,k)=d(k-2,k-1)=\cdots=d(1,2)=d_k$，$d(k-1,k+1)=d(k-2,k)=d(k-3,k-1)=\cdots=d(1,3)=d_{k-1}$。由此推得 $1,2,3,\cdots,k+1$ 在同一个圆上。显然与 $d(1,k-1)=d(1,k)=d(1,k+1)$ 矛盾。

情形 2：推证 $d(1)\neq 3$。

若 $d(1)=3$，令 $d(1,k)=d(1,k+1)=d(1,k+2)=D$。如果 $d(3,k+2)\neq D$，则 $d(3,k+3)=D$，根据定理 4 可得 $D=d(3,k+3)>d(4,k+3)>d(5,k+3)>\cdots>d(k+2,k+3)=d_k$，因此 $3,4,5,\cdots,k+2,k+3$ 在同一个圆上，推出 $d(1,k+3)=D$，矛盾。所以 $d(3,k+2)=D$。根据引理 3，可以得到 $d(2,k+2)=D$，再由

引理 4 得出 $d(k+1,k+2)\leqslant d_{k-1}$，$d(1,2)\leqslant d_{k-1}$。若 $d(k+1,k+2)=d_{k-1}$，则 $d(k,k+2)=d_{k-2}$。因为 $d(2,k+1)<d_1$，所以 $d(k,k+1)=d_k$，$d(k-1,k+1)=d_{k-1}$，$d(k-2,k+1)=d_{k-2}=d(k,k+2)$，$d(k-2,k)=d_{k-1}$，于是$\angle(k-2)k(k+1)=\angle(k+2)k+1(k)$，$\angle(k-2)k(k+1)=\angle(k+2)k+1(k)$。得到 $\Delta(k-2)k(k+1)\cong\Delta(k+2)k(k+1)$。从而 $k-2,k,k+1,k+2$ 共圆，得到 $d(1,k-2)=d(1,k)=d(1,k+1)=d(1,k+2)=D$，和已知矛盾，故 $d(k+1,k+2)=d_k$。假设 $d(1,2)=d_{k-1}$，由引理 4 可得 $d(1,3)=d_{k-2}=d(2,5)$，$d(1,2)=d(3,5)=d_{k-1}$，$\Delta123\cong\Delta532$。于是 1，2，3，5 共圆，从而 $d(1,k+2)=d(2,k+2)=d(3,k+2)=d(5,k+2)=D$，矛盾。故 $d(1,2)=d_k$。$d(k,k+2)=d(k-1,k+1)=d_{k-1}$，$d(k+1,k+2)=d(k-1,k)=d_k$，则 $k-1,k,k+1,k+2$ 共圆，与已知矛盾。类似地，$d(1,3)=d(2,4)=d_{k-1}$，$d(1,2)=d(3,4)=d_k$，1，2，3，4 共圆，矛盾。

3 $m=12$ 的 7 距离集

定理 2 设 X 是 7 距离集，并且 $m=|X_D|=12$，$DG(X_D)=P_{10}\cup P_2$。则 $X_D=R_{15}-3$。

证明 设 X 的 7 个距离为 $D=d_1>d_2>d_3>d_4>d_5>d_6>d_7$，且 $DG(X_D)=P_{10}\cup P_2$。如图 1 所示，令 $X_D=\{1,2,3,\cdots,12\}$，因为 X 是 7 距离集，由引理 4 得到 $d_7\leqslant d(i,i+1)\leqslant d_6$，$i\in X_D$。通过引理 3，不妨令 $D=d(1,7)=d(2,8)=d(3,8)=d(3,9)=d(4,9)=d(4,10)=d(5,10)=d(5,11)=d(6,11)=d(6,12)$。

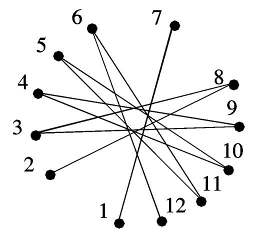

图 1 直径图 $P_{10}\cup P_2$

Fig. 1 Diameter graph $P_{10}\cup P_2$

情形 1：推证 $d(2,3)=d(11,12)=d_7$。

下面证明 $d(2,3)=d_7$，($d(11,12)=d_7$ 的证明类似)。

用反证法证明，假设 $d(2,3)=d_6$，推出矛盾，则结论正确。

根据引理 4 得到 $d_6=d(2,3)<d(2,4)<d(2,5)<d(2,6)<d(2,7)<d(2,8)=D$，$d_6=d(3,2)<d(3,1)<d(3,12)<d(3,11)<d(3,10)<d(3,9)=D$，$d_5=d(1,3)<d(1,4)<d(1,5)<d(1,6)<d(1,7)=D$，$d_5=d(4,2)<d(4,1)<d(4,12)<d(4,11)<d(4,10)=D$。

如果 $d(9,10)=d_6$，由引理 4 得，$d_6=d(9,10)<d(9,11)<d(9,12)<d(9,1)<d(9,2)<d(9,3)=D$，$d_4=d(9,12)<d(8,12)<d(7,12)<d(6,12)=D$。因为 $d(2,3)=d(9,10)$，$d(2,9)=d(3,10)=d_2$，可以得到点 2，3，9，10；1，3，9，11；1，5，8，12；2，4，9，11；2，5，9，12；1，2，6，9；1，2，7，8；2，6，8，12；1，4，9，12 分别共圆。若 $d(3,4)=d_6$，则 $d(3,4)=d(9,10)=d_6$，3，4，9，10 共圆，因此 1，2，…，12 共圆。此时得到的是一个不含有 d_7 距离的集合，矛盾。如果 $d(3,4)=d_7$，$\angle398=\angle389$，由于 $d_6=d(2,3)>d(3,4)=d_7$，因此$\angle283>\angle394$，从而$\angle289=\angle389-\angle283<\angle398-\angle394=\angle498$。$d(9,10)=d_6$，通过引理 4 得到 $d(2,9)=d_2$。在$\triangle289$ 和$\triangle489$ 中，显然 $d(4,8)>d(2,9)=d_2$，且 $d(4,8)\neq D$，矛盾。所以 $d(9,10)=d_7$。

假设 $d(8,9)=d_6$，由引理 4 得，$d_6=d(8,9)<d(8,10)<d(8,11)<d(8,12)<d(8,1)<d(8,2)=D$，$d_3=d(8,12)<d(12,7)<d(12,6)=D$，可以得到点 2，3，8，9；1，3，8，10；3，8，11，12；1，2，7，8；2，4，8，10；2，5，8，11；2，6，8，12 分别共圆。若 $d(3,4)=d_6$，则 3，4，8，9 共圆，于是所有点共圆，其中 3，4，9，10 共圆，$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。当 $d(3,4)=d_7$ 时，$\angle439=\angle349$。由于 $d_6=d(8,9)>d(9,10)=d_7$，所以$\angle839>\angle94*$（*表示点 10）。$\angle34*=\angle349-\angle94*>\angle439-\angle839=\angle438$，在$\triangle34*$ 和$\triangle348$ 中，$d(3,10)>d(4,8)$。类似地，$\angle289<\angle498$，$d(2,9)<d(4,8)$。通过引理 4，$d(2,9)\geqslant d_3$，可得$d(4,8)=d_2$。而 $d(3,10)\neq D$，显然与 $d(3,10)>d(4,8)$矛盾，所以 $d(8,9)=d_7$。

如果 $d(10,11)=d_6$，根据引理 4 可得 $d_6=d(10,11)<d(10,12)<d(10,1)<d(10,2)<d(10,3)<d(10,4)=D$，$d_5=d(10,12)<d(12,9)<d(12,8)<d(12,7)<d(12,6)=D$，于是点 2，3，10，11；1，3，10，12；1，4，9，12 分别共圆。若 $d(3,4)=d_6$，则点 3，4，10，11；2，4，10，12 分别共圆。因此 3，4，9，10 共圆。即 $d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。若 $d(3,4)=d_7$，$\angle398=\angle389$，因为 $d_6=d(2,3)>d(3,4)=d_7$，所以$\angle283>\angle394$，且$\angle289=\angle389-\angle283<\angle398-\angle394=\angle498$。故 $d(10,11)=d_6$，通过引理 4 可得，$d(2,9)=d_2$。在$\triangle289$ 和$\triangle489$ 中，显然 $d(4,8)>d(2,9)=d_2$，且 $d(4,8)\neq D$，矛盾。故 $d(10,11)=d_7$。

如果 $d(11,12)=d_6$，根据引理 4 可得 $d_6=d(11,12)<d(10,12)<d(9,12)<d(8,12)<d(7,12)<d(6,12)=D$，$d_6=d(11,12)<d(1,11)<d(2,11)<d(3,11)<d(4,11)<d(5,11)=D$，于是 2，3，11，12；

2，4，10，12；1，2，4，11 分别共圆。若 $d(3,4)=d_6$，则点 3，4，11，12；1，4，9，12 分别共圆，从而 3，4，9，10 共圆，矛盾。若 $d(3,4)=d_7$，$\angle 398=\angle 389$，由于 $d_6=d(2,3)>d(3,4)=d_7$，使得 $\angle 283>\angle 394$，从而 $\angle 289=\angle 389-\angle 283<\angle 398-\angle 394=\angle 498$。并且 $d(11,12)=d_6$，再根据引理 4 得出 $d(2,9)=d_2$，在 $\triangle 289$ 和 $\triangle 489$ 中，$d(4,8)>d(2,9)=d_2$，明显与 $d(4,8)\neq D$ 矛盾。所以 $d(11,12)=d_7$。

若 $d(1,12)=d_6$，根据引理 4 得 $d_6=d(1,12)<d(1,11)<d(1,10)<d(1,9)<d(1,8)<d(1,7)=D$，$d_6=d(1,12)<d(2,12)<d(3,12)<d(4,12)<d(5,12)<d(6,12)=D$，那么点 1，2，3，12；1，2，4，11；1，2，5，10 分别共圆。如果 $d(3,4)=d_6$，易得点 1，3，4，12；1，2，4，9；1，3，5，11 分别共圆，从而点 3，4，9，10共圆。$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$ 矛盾。如果 $d(3,4)=d_7$，$\angle 398=\angle 389$，由于 $d_6=d(2,3)>d(3,4)=d_7$，于是 $\angle 283>\angle 394$，从而 $\angle 289=\angle 389-\angle 283<\angle 398-\angle 394=\angle 498$。并且 $d(1,12)=d_6$，再根据引理 4 得到 $d(2,9)=d_2$，在 $\triangle 289$ 和 $\triangle 489$ 中，显然 $d(4,8)>d(2,9)=d_2$，且 $d(4,8)\neq D$，矛盾。所以 $d(1,12)=d_7$。

若 $d(3,4)=d_7$，由于 $d_6=d(2,3)>d(3,4)=d_7$，所以 $\angle 283>\angle 394$，从而 $\angle 289=\angle 389-\angle 283<\angle 398-\angle 394=\angle 498$。根据引理 4 得到 $d(2,9)\geqslant d_3$，在 $\triangle 289$ 和 $\triangle 489$ 中，显然 $d(4,8)>d(2,9)$，且 $d(4,8)<D$，因此 $d(4,8)=d_2>d(2,9)\geqslant d_3$，再根据引理 4，得到 $d(1,2)=d_7$。于是 1，2，3，4，5，8，9，10，11，12 在同一个圆上，即 2，3，8，9 共圆。$d_6=d(2,3)=d(8,9)=d_7$，矛盾。因此 $d(3,4)=d_6$。

在 $\triangle 49*$ 中（* 表示点 10），如果 $d(3,4)>d(4,5)$，那么 $\angle 394>\angle 4*5$。得到 $\angle 39*<\angle 5*9$，因此 $d(5,9)>d(3,10)$，而根据引理 4 得到 $d(3,10)=d_2$，而 $d(5,9)\neq D$，矛盾。因此 $d(3,4)\leqslant d(4,5)$。由于 $d(i,i+1)\leqslant d_6$，于是 $d(3,4)=d(4,5)=d_6$。同理，得到 $d(5,6)=d(4,5)=d_6$。

若 $d(1,2)=d_6$，通过引理 4，$d_6=d(1,2)<d(2,12)<d(2,11)<d(2,10)<d(2,9)<d(2,8)$，且 $d_6=d(1,2)=d(2,3)=d(3,4)=d(4,5)=d(5,6)$，因此 1，2，3，4，5，6 在同一个圆上，并且 2，3，6，11；2，3，5，12 共圆，所以 5，6，11，12 共圆，$d_6=d(5,6)=d(11,12)=d_7$，矛盾，因此 $d(1,2)=d_7$。

如果 $d(6,7)=d_6$，1，2，3，4，5，6，7 共圆，即 1，2，6，7 共圆，$d_6=d(6,7)=d(1,2)=d_7$，矛盾，所以 $d(6,7)=d_7$。

当 $d(7,8)=d_6$ 时，点 1，2，3，4，5，6，7 在同一个圆上，且 1，3，7，9；1，4，7，10 分别共圆，从而 3，4，9，10共圆。$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。当 $d(7,8)=d_7$ 时，同样得到 3，4，9，10 共圆，即 $d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。由上述讨论可知 $d(7,8)=d_6$ 及 $d(7,8)=d_7$ 均不成立，因此假设 $d(2,3)=d_6$不成立。故 $d(2,3)=d_7$。

情形 2：推证 $d(3,4)=d(10,11)=d_7$。

下面证明 $d(3,4)=d_7$，（$d(10,11)=d_7$ 的证明类似）。

已知 $d(2,3)=d(11,12)=d_7$。假设 $d(3,4)=d_6$，通过引理 4，$d_6=d(3,4)<d(2,4)<d(1,4)<d(12,4)<d(11,4)<d(10,4)=D$。

如果 $d(10,11)=d_6$，显然 1，4，10，11 共圆。如果 $d(9,10)=d_6$，那么 3，4，9，10；2，4，10，12；2，4，9，11 分别共圆，即 2，3，4，9，10，11，12 在同一个圆上。因此 9，10，11，12 共圆，$d_6=d(9,10)=d(11,12)=d_7$，矛盾。如果 $d(9,10)=d_7$，因为 $d(10,11)>d(9,10)$，所以 $\angle *5a>\angle 94*$，（其中 * 表示点10，a 表示点 11），那么 $\angle 45a<\angle 549$，$d(4,11)<d(5,9)$，通过引理 4 得 $d(4,11)=d_2$。而 $d(5,9)\neq D$，矛盾。因此 $d(10,11)=d_7$。

如果 $d(9,10)=d_6$，那么 3，4，9，10 共圆。如果 $d(4,5)=d_6$，那么 4，5，9，10；3，5，9，11 分别共圆，即 4，5，10，11 共圆。$d_6=d(4,5)=d(10,11)=d_7$，矛盾。如果 $d(4,5)=d_7$，那么 4，5，10，11；4，5，11，12；5，6，10，12 分别共圆。得到 5，6，10，11 共圆，$d(5,6)=d(10,11)=d_7$。于是 2，3，4，5；2，3，5，6 共圆，那么 4，5，9，10 共圆。$d_6=d(9,10)=d(4,5)=d_7$，矛盾。所以 $d(9,10)=d_7$。

如果 $d(8,9)=d_6$，那么 3，4，8，9 共圆。当 $d(4,5)=d_6$ 时，3，5，8，10；3，5，9，10、3，4，8，9 分别共圆，3，4，5，8，9，10 共圆，即 3，4，9，10 共圆。$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。如果 $d(4,5)=d_7$，易得 4，5，6，9，10，11，12 共圆。因为 5，6，10，11 共圆，$d(5,6)=d(10,11)=d_7$，所以 2，3，4，5；2，3，5，6 共圆。得到 3，4，9，10 共圆。$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。故 $d(8,9)=d_7$。

如果 $d(4,5)=d_7$，那么 $d(3,4)>d(4,5)$，从而 $\angle 394>\angle 4*5$，因此 $\angle 39*<\angle 5*9$，于是 $d(3,10)<d(5,9)$，$d(3,10)=d_3$。再根据引理 4，$d(1,2)=d(1,12)=d_7$，那么 1，2，3，4，5，9，10，11，12 共圆，即 3，

4，9，10共圆。$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。所以$d(4,5)=d_6$。

如果$d(5,6)=d_7$，那么$d(4,5)>d(5,6)$，从而$\angle 4*5>\angle 5a6$，得到$\angle 4*a<\angle 6a*$，于是$d(4,11)<d(5,10)$。再根据引理4，$d(4,11)=d_2$，$d(5,10)\neq D$，矛盾。所以$d(5,6)=d_6$。

如果$d(1,2)=d_6$，那么1，2，3，4；3，4，5，6；2，3，8，9；2，3，9，10；2，3，10，11；2，3，11，12分别共圆，从而2，3，8，9，10，11，12共圆。且1，2，4，6；3，5，9，10分别共圆，那么3，4，9，10共圆。$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。因此$d(1,2)=d_7$。

如果$d(1,12)=d_6$，同理可得1，2，3，4，5，6，8，9，10，11，12在同一个圆上，即3，4，9，10共圆。$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。所以$d(1,12)=d_7$。

如果$d(6,7)=d_6$，那么2，3，4，5，6，7共圆，从而2，3，6，7共圆。$d_7=d(2,3)=d(6,7)=d_6$，矛盾。所以$d(6,7)=d_7$。

当$d(7,8)=d_6$时，易得1，2，3，4，5，6，7共圆。且1，6，7，12；3，5，9，10；4，6，10，11；5，6，10，12；4，5，9，11；3，4，8，10分别共圆，即3，4，9，10共圆。$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。当$d(7,8)=d_7$，那么1，2，3，4，5，6，7共圆。并且1，2，7，8；2，3，8，9；3，5，9，10分别共圆，从而得到3，4，9，10共圆。$d_6=d(3,4)=d(9,10)=d_7$，矛盾。于是$d(3,4)=d_7$。

情形3：推证$d(4,5)=d(9,10)=d_7$。

下面证明$d(4,5)=d_7$，($d(9,10)=d_7$的证明类似)。

已知$d(3,4)=d(10,11)=d_7$，$d(2,3)=d(11,12)=d_7$。首先假设$d(4,5)=d_6$，根据引理4，$d_6=d(4,5)<d(3,5)<d(2,5)<d(1,5)<d(12,5)<d(11,5)=D$。

如果$d(9,10)=d_6$，那么4，5，9，10；3，5，9，11分别共圆。如果$d(5,6)=d_6$，那么4，5，6，11；4，6，9，10分别共圆，所以3，4，5，6，9，10，11共圆，从而3，4，9，10共圆。$d_6=d(9,10)=d(3,4)=d_7$，矛盾。如果$d(5,6)=d_7$，那么$d(4,5)>d(5,6)$，得到$\angle 4*5>\angle 5a6$，因此$\angle 4*a<\angle 6a*$，于是$d(4,11)<d(6,10)$，所以$d(4,11)=d_3$。再根据引理4，得到$d(1,2)=d(1,12)=d_7$，1，2，3，4，5，6，12共圆。$d(5,6)=d(11,12)=d(10,11)=d_7$，所以5，6，10，11，12共圆。又4，5，9，10共圆，得到3，4，9，10共圆。$d_6=d(9,10)=d(3,4)=d_7$，矛盾。所以$d(9,10)=d_7$。

如果$d(1,2)=d_6$，那么2，3，9，10；2，3，10，11；2，3，11，12；3，4，11，12分别共圆。因此2，3，4，9，10，11，12共圆。又因为2，3，5，12共圆，于是4，5，10，11共圆。$d_6=d(4,5)=d(10,11)=d_7$，矛盾。因此$d(1,2)=d_7$。

如果$d(1,12)=d_6$，同理2，3，4，9，10，11，12共圆。并且2，3，5，12共圆，从而4，5，10，11共圆。$d_6=d(4,5)=d(10,11)=d_7$，矛盾。因此$d(1,12)=d_7$。

如果$d(5,6)=d_7$，那么1，2，3，4，5，10，11，12共圆。并且5，6，10，11，12共圆，从而4，5，10，11共圆。$d_6=d(4,5)=d(10,11)=d_7$，矛盾。所以$d(5,6)=d_6$。

当$d(6,7)=d_7$时，显然1，2，3，4，6，7，12共圆，又2，3，4，9，10共圆，并且5，6，10，12共圆，所以4，5，9，10共圆。$d_6=d(4,5)=d(9,10)=d_7$，矛盾。当$d(6,7)=d_6$时，已知$d(4,5)=d(5,6)=d(6,7)=d_6$。并且$d(11,12)=d(10,11)$，那么$\angle b6a=\angle *5a$(b表示点12)，因此$\triangle 45*\cong\triangle 56a$。因为$\angle b67<56a$，所以$\angle 456>\angle 567$。于是$d(4,6)>d(5,7)$。再根据引理4，得到$d(4,6)\leqslant d_5$，$d(5,7)>d_6$。即$d_5\geqslant d(4,6)>d(5,7)>d_6$，矛盾。因此$d(4,5)=d_7$。

情形4：推证$d(5,6)=d(8,9)=d_7$。

下面证明$d(5,6)=d_7$，($d(8,9)=d_7$的证明类似)。

已知$d(2,3)=d(3,4)=d(4,5)=d(9,10)=d(10,11)=d(11,12)=d_7$。若$d(5,6)=d_6$，那么得到3，4，5，9，10，11在同一个圆上。已知$d_6=d(5,6)>d(4,5)=d_7$，那么$\angle 5a6>4*5$。$\angle *ab=\angle 5a*+\angle 6ab-\angle 5a6$，$\angle 9*a=\angle 4*9+\angle 5*a-\angle 4*5$，所以$\angle *ab<\angle 9*a$，于是$d(9,11)>d(10,12)$。再根据引理4，得到$d(9,11)\leqslant d_5$，$d(10,12)\geqslant d_6$。因此$d(9,11)=d_5$，$d(10,12)=d_6$。于是4，6，9，11共圆。即5，6，10，11共圆。$d_6=d(5,6)=d(10,11)=d_7$，矛盾。因此$d(5,6)=d_7$。

通过上面的方法得到$d(2,3)=d(3,4)=d(4,5)=d(5,6)=d(8,9)=d(9,10)=d(10,11)=d(11,12)=d_7$。即点2，3，4，5，6，8，9，10，11，12在同一个圆上。

情形5：讨论$d(1,2)$、$d(1,12)$、$d(6,7)$、$d(7,8)$的情况。

假设 $d(6,7)=d_7$。$\angle 567=\angle 56a+\angle 76b-\angle a6b$（$a$ 表示点 11，b 表示点 12），$\angle *ab=\angle 5a*+\angle 6ab-\angle 5a6$。其中 $\angle 5a6=\angle a6b$，$\angle 56a=\angle 5a*$，$\angle 76b<\angle 6ab$，因此 $\angle 567<\angle *ab$。可以得到 $d_5\geqslant d(10,12)>d(5,7)\geqslant d_6$。据引理 4，1，2，7，8 共圆，1，2，6，9 共圆，即所有点共圆。得到 $d_5=d(10,12)=d(5,7)=d_6$，矛盾。因此 $d(6,7)=d_6$。同理 $d(7,8)=d_6$。

如果 $d(1,2)=d_6$，根据引理 4，那么 $d(2,12)=d(5,7)=d_5$，$d(2,7)=d(5,12)=d_2$，从而 2，5，7，12 共圆。因为 $d(1,2)=d(6,7)=d_6$，那么 $d(1,6)=d(2,7)=d_2$，得到 1，2，6，7 共圆。且已知点 2，3，4，5，6，8，9，10，11，12 共圆，因此得到全部的点都在一个圆上。当 $d(1,12)=d_6$ 时，已知 1，5，6，12 共圆。得到 $d_6=d(1,12)=d(5,6)=d_7$，矛盾。因此 $d(1,12)=d_7$，此时得到 $X_D=R_{15}-3$，如图 1 所示。如果 $d(1,2)=d_7$，同理得到 $d(1,12)=d_6$，此时同样得到 $X_D=R_{15}-3$，如图 1 所示。

参考文献/References：

[1] SHINOHARA M. Uniqueness of maximum planar five-distance sets [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(14): 3048-3055.

[2] ERDOS P, FISHBURN P. Maximum planar sets that determine *k*-distance [J]. Discrete Mathematics, 1996, 160(1/2/3): 115-125.

[3] SHINOHARA M. Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space [J]. European Journal of Combinatorics, 2004, 25(7): 1039-1058.

[4] FISHBURN P. Convex polygons with few intervertex distance [J]. Computational Geometry, 1995, 5(2): 65-93.

[5] WEI Xianglin. Classification of eleven-point five-distance sets in the plane [J]. Ars Combinatoria, 2011, 102: 505-515.

[6] WEI Xianglin. A proof of Erdos-Fishburn's conjecture for $g(6)=13$[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2012,19(4):1-17.

[7] LAN Wenhua, WEI Xianglin. Classfication of seven-point four-distance sets in the plane [J]. Mathematical Notes, 2013, 93(4): 510-522.

[8] WEI Xianglin, LI Guogang, CONG Yue, et al. Distance sets with diameter graph being cycle [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2014,18(6):1981-1990.

[9] 魏祥林，张玉琴. 一类 4-等腰 6 元集[J]. 河北师范大学学报(自然科学版)，2004，28(5)：455-456.
WEI Xianglin, ZHANG Yuqin. A type of 4-isosceles set with 6-point[J]. Journal of Hebei Normal University(Natural Science Edition), 2004,28(5):455-456.

[10] NOZAKI H, SHINOHRAR M. On a generalization of distance sets [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 2010, 117(7): 810-826.

[11] KIDO H. Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional Euclidean space [J]. European Journal of Combinatorics, 2006, 27: 329-341.

[12] CHUNG F, SZEMEREDI E, TROTTER W. The number of different distance determined by a set of points in the Euclidean plane[J]. Discrete & Computational Geometry, 1992, 7: 1-11.

[13] KIDO H. Classification of isosceles 7-point 3-distance sets in 3-dimensional Euclidean space [J]. European Journal of Combinatorics, 2007, 28: 685-704.

[14] LISONEK P. New maximal two-distance sets [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1997, 77(2):318-338.

[15] ALTMAN E. On a problem of P. Erdos[J]. American Mathematical Monthly, 1963, 70(2): 148-157.