

加权相位差分测频算法及其工程应用

王晓君,安国臣,张秀清

(河北科技大学信息科学与工程学院,河北石家庄 050018)

摘要:相位差分算法是正弦频率估计中的一种重要方法。首先详细介绍了加权相位差分测频算法的原理,应用仿真方法分析了不同数据长度、不同信噪比情况下的测频性能,并与其他工程常用的测频算法进行了比较,然后对该算法在工程应用中的改进方法和降低信噪比检测阈值的方法进行了论述,最后给出了基于 FPGA 的工程实现框图。

关键词:Kay 算法;测频;性能分析;工程应用

中图分类号:TN911.72 **文献标志码:**A

Measurement frequency algorithm of weighted phase difference and its application in engineering

WANG Xiaojun, AN Guochen, ZHANG Xiuqing

(School of Information Science and Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: The phase difference measurement of frequency is an important method of sinusoid frequency estimation. The principle of weighted phase difference measurement frequency is derived first. And then the algorithm performance is analyzed under conditions of different data length and SNR, and compared with other measurement frequency methods. The improved method and decreasing SNR-threshold method of this algorithm are expatiated, and the implementation block diagram based on FPGA is provided.

Key words: Kay algorithm; measurement frequency; performance analysis; engineering application

在侦察接收机信号处理系统中,需要从数字信道化后的实时数据流中得到信号的载波频率。由于信道化后得到的是实时数据流,数据流中所包含信号的信噪比有很大不同,故所采用的算法应该首先具有实时处理能力,其次在低信噪比情况下也能有较好的测频精度。

工程中应用的测频方法有许多^[1-6],其中 Kay 测频算法是一种基于最小均方误差的相位差分频率估计法,它的高信噪比复信号(复指数信号加高斯白噪声)时,频率估计方差可以达到 Crammer-Rao(CR)界。

首先给出 Kay 测频算法的测频原理,然后通过仿真与其他测频方法进行比较,给出不同信噪比情况下的性能比较,最后论述在工程应用中如何改进算法性能,如何降低 Kay 测频算法的信噪比阈值以及探讨基于 FPGA 的工程实现方法。

1 算法原理

叠加复高斯白噪声的复正弦信号的 N 个观测值可以表示为^[1]

收稿日期:2013-05-02;修回日期:2013-06-13;责任编辑:陈书欣

基金项目:河北科技大学校立基金(XL201064)

作者简介:王晓君(1973-),男,河北赤城人,教授,博士,主要从事信号处理及卫星导航技术方面的研究。

E-mail: eicont@139.com

$$x_k = Ae^{j(\omega_0 k + \theta)} + n_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

式中: A 为幅度; ω_0 为信号频率; 相位 θ 是确定但不知道的常量; n_k 是方差为 σ_n^2 的零均值复高斯白噪声。

将式(1)重写为

$$x_k = Ae^{j(\omega_0 k + \theta)} (1 + \hat{n}_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

式中: $\hat{n}_k = \frac{n_k}{A} e^{-j(\omega_0 k + \theta)}$, \hat{n}_k 是方差为 σ_n^2/A^2 的复高斯白噪声, 令 $\hat{n}_k = u_k + jv_k$, 那么

$$1 + \hat{n}_k = \sqrt{(1 + u_k)^2 + v_k^2} \cdot e^{j \tan^{-1} \left(\frac{v_k}{1 + u_k} \right)}.$$

当信噪比具有较大值时, 即 $\sigma_n^2/A^2 \ll 1$, 有

$$1 + \hat{n}_k \cong e^{j \tan^{-1}(v_k)} \cong e^{jv_k}, \quad (3)$$

式(2)可写为

$$x_k \cong Ae^{j(\omega_0 k + \theta + v_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

式中 v_k 是方差为 $\sigma_n^2/2A^2$ 的实高斯白噪声。 x_k 的幅角由式(4)给出:

$$\angle x_k = \omega_0 k + \theta + v_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

在式(4)的基础上, Kay 提出了一种可达到 CR 界的加权差分算法。相位差定义为

$$\Delta_k = \angle x_{k+1} - \angle x_k,$$

即

$$\Delta_k = \omega_0 + v_{k+1} - v_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-2. \quad (5)$$

从式(5)可知, 问题转化为从有色高斯噪声过程中估计 ω_0 的均值。该随机过程等效成一个系数为 1 和 -1 的滑动平均模型。因此 ω_0 的最大似然估计等效于线性模型的最小方差无偏估计, 即最小化 J ,

$$J = (\Delta - \omega_0 \vec{1})^T \mathbf{C}^{-1} (\Delta - \omega_0 \vec{1}),$$

式中: $\Delta = [\Delta_0 \ \Delta_1 \ \dots \ \Delta_{N-2}]$; $\vec{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$; \mathbf{C} 是 Δ_k 的 $(N-1) \times (N-1)$ 阶的协方差矩阵。

频率的估计为

$$\hat{\omega}_0 = \frac{\vec{1}^T \mathbf{C}^{-1} \Delta}{\vec{1}^T \mathbf{C}^{-1} \vec{1}}, \quad (6)$$

可以证明估计的方差为

$$\text{var}(\hat{\omega}_0) = \frac{1}{\vec{1}^T \mathbf{C}^{-1} \vec{1}}, \quad (7)$$

协方差矩阵 \mathbf{C} 为

$$\mathbf{C} = \frac{\sigma_n^2}{2A^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

是一个三对角矩阵, 有

$$[\mathbf{C}^{-1}]_{ij} = \frac{2A^2}{\sigma_n^2} \left[\min(i, j) - \frac{i \times j}{N} \right], \quad 1 \leq i, j \leq N-1,$$

经过一定的运算得到

$$\begin{aligned} \vec{1}^T \mathbf{C}^{-1} \vec{1} &= \frac{N(N^2 - 1)A^2}{6\sigma_n^2}, \\ \vec{1}^T \mathbf{C}^{-1} \Delta &= \frac{N(N^2 - 1)A^2}{6\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-2} \omega_k \Delta_k, \end{aligned}$$

式中:

$$\omega_k = \frac{3}{N^2 - 1} \left\{ 1 - \left[\frac{k - \left(\frac{N}{2} - 1 \right)}{\frac{N}{2}} \right]^2 \right\},$$

从而由式(6)得频率的估计为

$$\hat{\omega}_0 = \sum_{k=0}^{N-2} w_k \Delta_k,$$

式中: $\sum_{k=0}^{N-2} w_k = 1$; $\hat{\omega}_0$ 是无偏估计。

频率估计可进一步写成

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \angle x_{k+1} - \angle x_k = \angle x_k^* x_{k+1}, \\ \hat{\omega}_0 &= \sum_{k=0}^{N-2} w_k \angle x_k^* x_{k+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

估计方差为

$$\text{var}(\hat{\omega}_0) = \frac{6}{\frac{A^2}{\sigma_n^2} N(N^2 - 1)},$$

估计方差刚好等于 CR 界。 w_k 是一个关于点 $k = N/2 - 1$ 对称的窗函数。之所以估计能够达到 CR 界, 完全归功于窗函数的选择。

2 测频算法的性能仿真

以单频信号为例, 分析不同数据长度、信噪比及信号频率时 Kay 算法的测频精度。图 1 给出在固定信号频率 ($\omega_0 = 0.4\pi$) 下, 采用不同数据长度, 在不同信噪比时的算法性能。通过仿真分析发现, 同一信号频率下, 增加参与估计的数据长度可以提高测频精度。同时, 可以发现 Kay 算法存在明显的信噪比阈值。只有当信号的信噪比大于这个阈值时, 测频的精度才可逼近 CR 界。

另外, Kay 算法对不同信号频率的测频误差是不同的, 当 ω_0 接近于 π 时, 测频误差明显增加, 这时就需要较高的信噪比来提高测频精度。这是因为当 ω_0 接近被测频率的估计范围 $[-\pi, \pi]$ 两端时, 相位差分结果 $\Delta\phi(n)$ 出现相位折叠的概率大大增加, 从而导致运算误差。

图 2 给出 Kay 算法与曲线拟合法、扩展 Prony 法和高阶相位差法的测频性能比较。仿真条件为数据长度 $N = 32$, 单频信号且 $\omega_0 = 0.4\pi$, 高阶相位差分的阶次取为 10。通过仿真分析发现, Kay 算法和高阶相位差法在信噪比大于信噪比阈值的情况下都可以达到 CR 界, 但扩展 Prony 法和曲线拟合法始终无法达到 CR 界, 相差 5 ~ 6 dB。在处理单频信号时, 可见 Kay 算法和高阶相位差法在性能和运算复杂度上相当。但是对于频率调制信号, 用高阶相位差法进行处理复杂度就会增加。在处理相位编码信号时需用相邻相位差来剔除野值, Kay 算法相比高阶相位差法而言运算复杂度要小。综合分析, 这 4 种算法中以 Kay 算法的总体性能最优。

3 应用研究

Kay 相位差分频率估计算法是针对复指数信号模型提出的, 要求系统使用正交采样技术。首先根据复采样点值计算出对应的相位角, 再根据确定的权值进行差分加权, 即可估计出复信号的频率。影响频率估计精

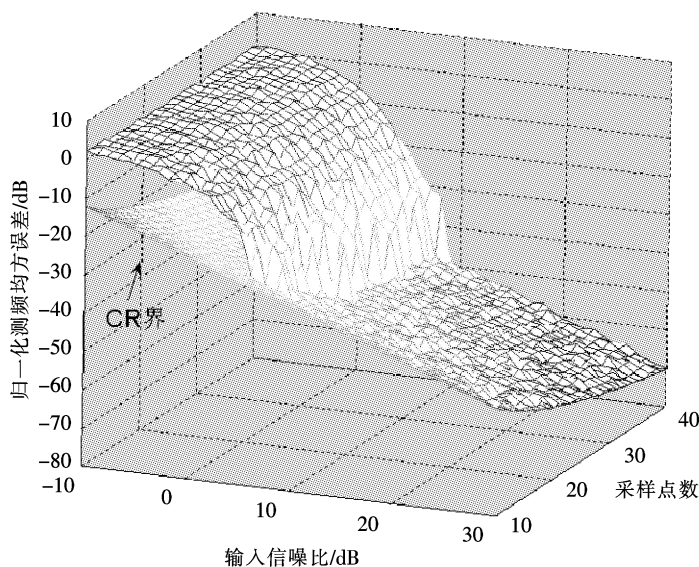


图 1 Kay 算法的测频误差 ($\omega_0 = 0.4\pi$)

Fig. 1 Frequency measurement error of Kay algorithm ($\omega_0 = 0.4\pi$)

度的参数有信噪比和参与运算的采样点数。要减小频率估计的均方误差,总的说来,应该是信噪比和采样点数都取的大些,但在实际应用中,需要考虑短数据和有限信噪比的情况。

3.1 改进 Kay 算法的一般方法

Kay 差分算子实际上是 $\Delta\phi(n) = W_{\pm\pi}[\omega_0 + u_{n+1} - u_n]$, $W_{\pm\pi}[x]$ 表示把位于 $[-\pi, \pi]$ 以外的 x 折叠成 $[-\pi, \pi]$ 中的 \hat{x} , $x = \hat{x} \pm 2\pi$ 。当 ω_0 接近于零或信噪比足够高时,基本上不需要进行相位折叠。而当信噪比较低, ω_0 接近被测频率的估计范围 $[-\pi, \pi]$ 两端时,相位差分结果超出这个范围的概率大大增加,从而就导致了运算误差。

一种改进算法是自适应门限的解卷叠算法。由于一般的相位解卷叠算法是以 π 和 $-\pi$ 为解卷叠门限的,因此在高频端由于容限越来越小,从而造成高频端测频性能的下降。而改进的相位解卷叠算法采用自适应门限,算法如下:

$$\phi(n) = \begin{cases} \phi(n) + 2\pi, & \phi(n) < T_L, \\ \phi(n) - 2\pi, & \phi(n) > T_H, \\ \phi(n), & \text{其他,} \end{cases} \quad (9)$$

式中:下门限 $T_L = \Delta\bar{P} - \pi$, 上门限 $T_H = \Delta\bar{P} + \pi$, 而 $\Delta\bar{P}$ 为采用一般解卷叠算法得到的相位差均值。改进相位解卷叠的处理方法能提高高频段的测频精度,可明显改善由于相位差分算子的相位折叠误差所引起的信噪比阈值问题。

另一种改进算法是剔除野值。使用相位差的均值作为剔除野值的依据,一般是在此均值的基础上再设定一个接受范围(例如取 $\pm\pi/2$),超出此范围的相位差被视为野值,该值被剔除并用平均相位差来代替。尤其针对二相编码信号进行的剔除野值处理是必需的。

以上 2 种改进算法增加的处理负担不大,但却具有较好的改善效果,适合在工程中应用。

3.2 提高 Kay 算法的检测阈值

Kay 算法存在信噪比检测阈值,造成存在检测信噪比阈值的原因可以归纳为 2 方面的问题^[7-8]: 1) 相位差分算子的相位折叠误差,使得信噪比阈值随被测频率的大小而变化; 2) Kay 算法本身存在信噪比阈值。当信噪比小于 6.5 dB 时,相位差不再符合高斯分布,用最小二乘法处理就不能再获得最优解,因此即使不考虑相位折叠误差,要想达到 CR 界,也存在约 6.5 dB 的信噪比阈值。

FITZ, LUISE 和 REGGIANNINI(L&R) 提出应用接收信号的自相关系数进行频率估计的方法。实际上 FITZ 的估计是一种相差加权平均, L&R 的估计是一种加权线性预测。但由于这两种方法在相位提取时,在高频区造成了不可恢复的相位混叠,虽然改善了方差阈值但缩小了估计范围,同时也使得实现难度增加^[9-10]。

工程实现时,可应用滤波器法降低 Kay 算法的信噪比阈值^[9-14]。方法是在用相位差分进行频率估计之前,用简单的 FIR 滤波器处理输入信号,提高信噪比,达到降低信噪比阈值的目的。例如,当使用 2 阶滤波时,由式(1),设 $a_k = (x_k + x_{k-1})/2, k = 1, 2, \dots, N-1$, 则 a_k 的信噪比比原信号提高 3 dB, 经推导可得相位差分:

$$y_k = \angle a_k - \angle a_{k-1} = \omega_0 + \frac{(v_k - v_{k-2})}{2\cos(\omega_0/2)}, \quad k = 2, 3, \dots, N-1. \quad (10)$$

根据式(10),再利用最小二乘法可得到与式(6)相类似的频率估计子。通过 K 阶滤波器,信号信噪比提升 $10\lg K$, 则检测阈值就降低 $10\lg K$, 但频率估计范围会变为原来的 $1/K$ 。滤波器法在工程实现上具有优势,其滤波环节可插在原算法测频模块的前边。虽然加权窗与原 Kay 法不同,但是可预先计算出来,并存储在 ROM 存储器中。

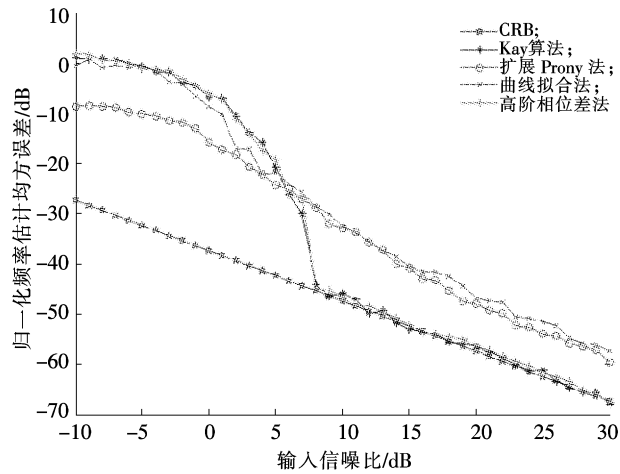


图 2 4 种实时测频算法的性能比较 ($N = 32, \omega_0 = 0.4\pi$)
Fig. 2 Performance comparison of four kinds of real-time algorithm for frequency measurement ($N = 32, \omega_0 = 0.4\pi$)

3.3 基于FPGA的实现方法

从实现角度讲,基于FPGA实现Kay相位测频法要解决的问题有^[15-17]:1)为了提高精度,参与测频的数据点数应该尽可能的多,可根据实际情况设置可变点的测频处理,点数不同,加权系数就不同;2)数据流是实时动态的,计算过程中不可能存储太多的点,输出测频结果也需要是实时的。

一种基于FPGA的Kay相位差分测频法的实现框图如图3所示。测频单元可实现8,16,32及64点测频。不同点数下的Kay加权系数,可预先存储在系数存储器中。由启停控制信号来控制一个测频周期的开始与结束,并负责将累加器及系数存储器地址计数器清零。

图3所示框图没有考虑资源复用,适合于测频点数预先不确定的场合。由于共有4路测频单元,每一路测频单元需要4个乘法器,因此为实现上述算法,需要FPGA中的乘法器数目为 $4 \times 4 = 16$ 个。需要的存储器数目为 $4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$ 个。与其他3种测频算法比较,加权相位差分算法与高阶相位差分算法复杂度相当,且非常适合于FPGA的实现,而扩展Prony法与曲线拟合法算法复杂,只适宜于软件实现。

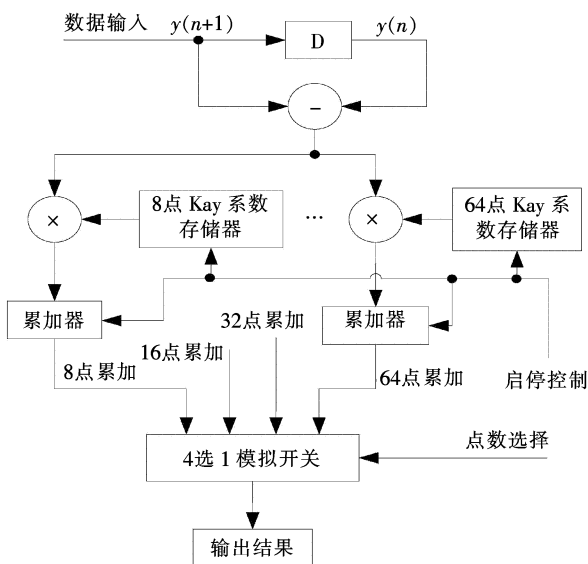


图3 Kay相位差分算法实现

Fig. 3 Implementation of Kay phase difference algorithm

4 结 语

Kay加权相位差分测频算法是一种非常适合于短数据、有实时要求的测频算法。当信号的信噪比大于检测阈值时,其均方误差逼近CR界。介绍了Kay算法原理,对算法性能进行了仿真分析,给出了工程中应重点考虑的提高两端测频精度及降低检测信噪比阈值的问题,并且给出了基于FPGA的实现框图。Kay算法可对输入的连续数据流进行实时测频,可被广泛应用于通信/雷达侦察接收机中的信号实时测频中,尤其是信道化后的信道数字测频中。在工程应用中,该算法取得了较好的使用效果。

参考文献/References:

- [1] JENSEN J R, GLENTIS G, CHRISTENSEN M G, et al. Computationally efficient IAA-based estimation of the fundamental Frequency [A]. Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2012 Proceedings of the 20th European[C]. Bucharest, [s. n.], 2012. 2:163-2:167.
- [2] 熊 鹰, 梁树雄, 尹俊勋. 高斯白噪声中单频复正弦信号频率估计[J]. 通信学报, 2002, 23(1):26-30.
XIONG Ying, LIANG Shuxiong, YIN Junxun. Frequency estimation of single complex sinusoid in white Gaussian noise signal [J]. Journal of China Institute of Communications, 2002, 23(1):26-30.
- [3] 牛鹏辉, 涂亚庆, 张海涛. 一种实正弦信号的短时频率估计新方法[J]. 电子测量与仪器学报, 2007, 21(6):41-46.
NIU Penghui, TU Yaqing, ZHANG Haitao. New method of short-time frequency estimation for real sinusoid [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrument, 2007, 21(6):41-46.
- [4] 张昌菊, 唐 斌. 一种双正弦信号的快速频率测量方法[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(10):1586-1587.
ZHANG Changju, TANG Bin. Fast frequencies measurement method for dual sinusoidal signals [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2005, 27(10):1586-1587.
- [5] 韩仲祥, 夏靖波, 王元一, 等. 高斯白噪声中单频复正弦信号频率估计新方法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2003, 4(3):69-71.
HAN Zhongxiang, XIA Jingbo, WANG Yuanyi, et al. A new method for frequency estimation of single complex sinusoid in white gaussian noise [J]. Journal of Air Force Engineering University(Natural Science Edition), 2003, 4(3):69-71.
- [6] XIAO Y C, WEI P, XIAO X C, et al. Fast and accurate single frequency estimator[J]. Electronics Letters, 2004, 40(14):910-911.
- [7] 舒 汀, 赵卫宏, 陆锦辉. 短序列条件下快速频率估计性能分析[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(10):1509-1512.
SHU Ting, ZHAO Weihong, LU Jinhui. Performance analysis for fast frequency estimation with short sequences [J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(10):1509-1512.

Mechanics & Mining Sciences, 2003, 40(10):527-536.

- [7] 王 成. 金属杆锚固系统中导波传播特性的试验研究[J]. 无损检测, 2006, 28(4):172-176.
WANG Cheng. Experimental study on the propagation characteristics of guided wave through anchored system of metal bar[J]. Nondestructive Testing, 2006, 28(4):172-176.
- [8] 孙广开, 焦 阳. 超声导波管道缺陷检测数值模拟[J]. 河北工业科技, 2010, 27(1):18-21.
SUN Guangkai, JIAO Yang. Numerical simulation of detection in pipes using ultrasonic guided waves[J]. Hebei Journal of Industrial Science and Technology, 2010, 27(1):18-21.
- [9] 梁玉国. 无机锚固材料植筋群锚效应试验研究[J]. 河北工业科技, 2013, 30(1):31-34.
LIANG Yuguo. Experimental research of anchor group effect in post-embedding technology by inorganic anchoring material[J]. Hebei Journal of Industrial Science and Technology, 2013, 30(1):31-34.
- [10] 陈兴长. 自由锚杆中超声导波的衰减特征[J]. 西南科技大学学报, 2009, 24(4):56-61.
CHEN Xingchang. Attenuation characteristics of ultrasonic guided wave in free rock bolts[J]. Journal of Southwest University of Science and Technology, 2009, 24(4):56-61
- [11] 岳向红. 基于三维波导理论的基桩和锚杆无损检测技术研究[D]. 武汉:中国科学院武汉岩土力学研究所, 2008.
YUE Xianghong. Research of Pile and Bolt's Non-destructive Test Technology Based on 3D Guided-wave Theory[D]. Wuhan: Institute of Rock & Soil Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, 2008.
- [12] 罗斯 J L. 固体中的超声波[M]. 何存富, 吴 斌, 译. 北京:科学出版社, 2004.
ROSE J L. Ultrasonic Waves in Solid Media[M]. Translated by HE Cunfu, WU Bin. Beijing: Science Press, 2004.
- [13] 刘增华, 赵继辰, 吴 斌, 等. 高阶纵向超声导波在钢绞线缺陷检测中的应用[J]. 工程力学, 2011, 28(4):214-220.
LIU Zenghua, ZHAO Jichen, WU Bin, et al. Application study on defect detection in steel strands by using high-order ultrasonic longitudinal guided waves[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(4):214-220.
- [14] 张昌锁, 李 义, STEVE Z. 锚杆锚固结构中导波传播的数值模拟[J]. 太原理工大学学报, 2009, 40(3):274-278.
ZHANG Changsuo, LI Yi, STEVE Z. Numerical simulation of guided wave propagation in grouted rockbolt[J]. Journal of Taiyuan University of Science and Technology, 2009, 40(3):274-278.
- [15] ZHANG C S, ZOU D H, ADENGA V M. Numerical simulation of wave propagation in grouted rock bolts and the effects of mesh density and wave frequency [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2006(43):634-639.

~~~~~

**(上接第 450 页)**

- [8] 杨宝强, 刘苍毅, 朱林户. 基于相位差分的 Kay 法 SNR 阈值分析及改进[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2005, 6(4):34-36.  
YANG Baoqiang, LIU Cangyi, ZHU Linhu. The threshold analysis of Kay's method and improvement [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2005, 6(4):34-36.
- [9] SO H C. Subspace approach for fast and accurate single-tone frequency estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(2):827-831.
- [10] CAI Hong. Fast frequency measurement algorithm based on zero crossing method[J]. IEEE Computer Engineering and Technology, 2010, 4: 606-608.
- [11] SALCIC Z. An improved taylor method for frequency measurement in power systems[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2009, 58 (9) :3 288-3 294.
- [12] KIM D, NARASIMHA M J, COX D C. An improved single frequency estimation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1996, 3(7): 212-214.
- [13] MCCORMICK W S, LANSFORD J L. Time domain algorithm for the estimation of two sinusoidal frequencies[J]. IEE Proceedings Vision Image and Signal Process, 1994, 141(1):33-38.
- [14] KUSLJEVIC M D. A simple recursive algorithm for simultaneous magnitude and frequency estimation[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2008, 57(6):1 207-1 214.
- [15] 王晓君, 陈 禾, 罗跃东. 一种 EW 接收机信号处理系统的设计与实现方法[J]. 河北科技大学学报, 2007, 28(2): 142-149.  
WANG Xiaojun, CHEN He, LUO Yuedong. Design and implementation of signal processing system for electronic warfare receiver [J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2007, 28 (2) : 142-149.
- [16] 张 鹏, 张昌菊, 唐 斌. 快速双正弦信号频率估计的 FPGA 实现[J]. 电子对抗技术, 2005, 20(6):15-17.  
ZHANG Peng, ZHANG Changju, TANG Bin. Fast frequency estimation of dual tones implemented by FPGA [J]. Electronic Warfare Technology, 2005, 20(6):15-17.
- [17] 张 鹏, 王更辰, 何 伟. 一种快速测频算法及其 FPGA 实现[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2005, 6(4):74-76.  
ZHANG Peng, WANG Gengchen, HE Wei. An algorithm of fast frequency estimation and the FPGA's realization[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2005, 6(4):74-76