第 34 卷第 5 期 河北科技大学学报 Vol. 34, No. 5
2013 年 10 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Oct. 2013

文章编号:1008-1542(2013)05-0406-06 doi:10.7535/hbkd.2013yx05005

具有输入时滞与状态时滞的非线性不确定奇异系统的保性能控制

王 坤,崔 栋

(燕山大学理学院,河北秦皇岛 066004)

摘 要:讨论了一类非线性不确定奇异时滞系统的保性能控制问题。基于线性矩阵不等式及基本不等式的方法,研究了所给定的性能函数及所容许的时滞。设计了一个无记忆反馈控制器,使得闭环系统稳定并且闭环系统的性能指标不大于指标上界。利用线性矩阵不等式的约束条件,给出了闭环系统的保性能的充分条件,用数值算例说明了方法的有效性。

关键词:奇异系统;线性矩阵不等式;输入时滞;状态时滞;保性能控制

中图分类号:O231.2 **文献标志码**:A

Guaranteed cost control for nonlinear uncertain singular systems with input and state time-delay

WANG Kun, CUI Dong

(College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: This paper discusses a problem in a class of nonlinear uncertain singular time-delay systems. Based on linear matrix inequality and fundamental inequality, it studies the given performance functions as well as the acceptable time-delay. A memoryless state feedback controller is designed so that the closed-loop systems asymptotically are stable and the corresponding performance index is not larger than the index bound. By using the constraint condition of linear matrix inequality, sufficient conditions for guaranteed cost control of closed-loop systems are given. A numerical example is used to demonstrate the effectiveness of the method.

Key words: singular systems; linear matrix inequality(LMI); input delays; state delays; guaranteed cost control

近年来,不确定系统的保性能控制的问题引起了人们的关注。研究的目的是对不确定系统设计一个控制器,使得其闭环系统不仅对所容许的不确定性渐近稳定,而且相应的闭环系统的性能指标不大于指标上界。正常系统的保性能控制器的研究已有许多成果[1-6]。对于奇异系统可以更好的描述实际物理过程,所以对奇异系统的保性能控制的研究更有意义。文献[7]—文献[9]对于线性奇异系统的保性能控制问题有了一定的发展,文献[10]研究了广义系统的时滞相关非脆弱 H_∞ 保成本控制,文献[11]—文献[12]利用 Lipschitz 条件设计了鲁棒 H_∞ 保性能控制器,文献[13]研究了一类不确定非线性奇异系统的保性能控制,未对输入时滞进行研究。但目前对于均具有状态时滞与输入时滞的不确定奇异系统的非线性扰动的问题的研究还不多见,本文针对这一类非线性不确定奇异时滞系统,基于 Lyapunov 稳定性理论,线性矩阵不等式以及基本不

收稿日期:2013-05-22;修回日期:2013-07-15;责任编辑:张 军

基金项目:国家自然科学基金(60934003);河北省自然科学杰出青年基金(F2011203110)

作者简介:王 坤(1960-),男,河北秦皇岛人,教授,博士,主要从事非线性时滞系统鲁棒控制方面的研究。

E-mail:wangkun8992@yahoo.com.cn

等式方法设计了闭环系统的保性能控制器，使得闭环系统二次稳定且具有 H_∞ 抑制水平 γ，保性能的性能指标不大于指标上界。

1　问题描述与预备知识

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \Delta A)\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A}_d + \Delta A_d)\boldsymbol{x}(t-h) + (\boldsymbol{B}_1 + \Delta B_1)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-d)), \\ \boldsymbol{z}(t) = C\boldsymbol{x}(t), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), t \in [-h^*, 0], \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别为系统的状态向量和控制向量；$\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbf{R}^p$ 为外界干扰输入向量；$\boldsymbol{z}(t) \in \mathbf{R}^q$ 为受控输出向量；通常矩阵 $\boldsymbol{E} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为奇异矩阵，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_d, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}$ 为适当维数的已知常数矩阵，h 为不确定的、非时变的状态时滞，满足 $0 \leqslant h \leqslant h^*$，$h^*$ 为时滞 h 的已知上界；$\Delta A, \Delta A_d, \Delta B_1$ 为时变参数不确定性。

假设参数不确定性是可测的，并具有如下形式：

$$[\Delta A \quad \Delta A_d \quad \Delta B_1] = \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)[\boldsymbol{E}_1 \quad \boldsymbol{E}_2 \quad \boldsymbol{E}_3], \tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ 是适当维数的已知常数矩阵，$\boldsymbol{F}(t) \in \mathbf{R}^{i\times j}$ 为时变未知实矩阵，Lebesgue 可测且满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) \leqslant I$。

非线性扰动 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-h))$ 为时变、含有状态和时滞状态的耦合函数具有如下结构：

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-h))\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-h)) \leqslant \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{K}]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{x}(t-h), \quad \forall t \in [0, +\infty), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ 是已知的定常结构矩阵。

定义 1　系统(1) 所对应的性能指标是：

$$\boldsymbol{J} = \int_0^\infty [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$ 为给定的对称正定加权矩阵。

定义 2　对于系统(1) 和性能指标函数，若存在状态反馈控制器：

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{K} \in \mathbf{R}^{m\times n}, \tag{5}$$

将状态反馈控制器代入系统(1)，导出的闭环系统为

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \Delta A + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K} + \Delta B_1\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A}_d + \Delta A_d)\boldsymbol{x}(t-h) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-d)), \\ \boldsymbol{z}(t) = C\boldsymbol{x}(t), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t \in [-h^*, 0]。 \end{cases} \tag{6}$$

对于系统(1) 和性能指标(4)，若存在反馈控制律 $\boldsymbol{u}(t)$ 和一个正数 $\boldsymbol{J}^*$，使得对所有允许的非线性扰动 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-h))$ 和所有允许的不确定性，相应的闭环系统(6) 是鲁棒渐近稳定的且闭环系统的性能指标(4) 满足 $\boldsymbol{J} \leqslant J^*$，这里 J^* 为系统(1) 的一个性能指标上界，则称控制器(5) 为奇异系统的保性能控制器。

引理 1[14]　对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ 及任意的实数 $\varepsilon > 0$，式(7) 成立：

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leqslant \varepsilon\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}。 \tag{7}$$

引理 2[15]　对于 $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} > 0$，有如下不等式(8) 成立：

$$-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{b}。 \tag{8}$$

引理 3[16]　给定适当维数的矩阵 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{Y}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} < 0$，对于所有满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \leqslant \boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{F}$ 都成立，当且仅当在常数 $\varepsilon > 0$，使得：

$$\boldsymbol{Y} + \varepsilon\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} < 0。 \tag{9}$$

2　鲁棒控制器的设计

定理　给定 $\gamma > 0$，若存在 $n \times n$ 的实矩阵 $\boldsymbol{X} > 0$，$\boldsymbol{R} > 0$，$\widetilde{\boldsymbol{Q}} > 0$，及 $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$，使得以下矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1+\alpha\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} & d\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{X} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}} \\ * & -\widetilde{Q}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{X} & 0 & \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & \gamma^2 I & \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -h^{-1}\boldsymbol{R}+\alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & d\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \alpha^{-1}\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \alpha^{-1}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}_1=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Y}+\widetilde{\boldsymbol{Q}}+\widetilde{\boldsymbol{R}}_1+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_2\boldsymbol{Y}$,
则系统(1) 的标称系统在反馈控制器(5) 的作用下不仅渐近稳定,而且在初始条件下具有给定 $\boldsymbol{H}_\infty$ 的扰动抑制水平 γ,并且相应的成本函数上界为

$$\boldsymbol{J}\leqslant J^*=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta。$$

证明 取如下的 Lyapunov-krasovskii 泛函:

$$\boldsymbol{V}(t,x_t)=\boldsymbol{V}_1(t,x_t)+\boldsymbol{V}_2(t,x_t)+\boldsymbol{V}_3(t,x_t),$$

$$\boldsymbol{V}_1(t,x_t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t),$$

$$\boldsymbol{V}_2(t,x_t)=\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$\boldsymbol{V}_3(t,x_t)=\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}s,$$

对 $\boldsymbol{V}(t,x_t)$ 沿闭环系统(6) 的轨线求导数:

$$\dot{\boldsymbol{V}}_1(t,x_t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{A}}_d)+(\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{A}}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\omega}(t)-$$
$$\int_{t-h}^{t}2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_d\dot{\boldsymbol{x}}(u)\mathrm{d}u+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-d)),$$

其中:

$$\int_{t-h}^{t}2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}_d\dot{\boldsymbol{x}}(u)\mathrm{d}u\leqslant h\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s;$$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}\leqslant\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)\leqslant$$
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{K}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{x}(t-h);$$

$$\boldsymbol{V}_2(t,x_t)=\boldsymbol{h}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{V}_3(t,x_t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-h)。$$

当 $\omega(t)=0$ 时,

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t,x_t)\leqslant\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega} & h\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{A}}_d & h\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ * & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2+h\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{A}}_d & h\overline{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{R}\\ * & * & h\boldsymbol{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

其中:$\boldsymbol{\Omega}=h\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+h\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{A}}_d)+(\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{A}}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{K}$;

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t,x_t)\leqslant-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)\leqslant 0,$$

闭环系统渐近稳定。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} & h\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{A}}_d & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_2+h\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}_2 & h\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ * & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2+h\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{A}}_d & h\overline{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}_2 & h\overline{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{R}\\ * & * & h\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}_2 & h\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\\ * & * & * & h\boldsymbol{R}\end{bmatrix}<0 \text{ 等价于式(10)},$$

$\dot{\boldsymbol{V}}(t,x_t)+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\leqslant 0$。对式子两边对 t 从 0 到 ∞ 积分,注意到零初始条件下 $\boldsymbol{V}(t,x_t)_{t=0}=0$,则有$\int_0^\infty[\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)]\leqslant-\boldsymbol{V}(t,x_t)_{t=\infty}<0$。即 $\|\boldsymbol{z}(t)\|_2<\gamma\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2$,从而闭环系统在零初

始条件下具有 $\boldsymbol{H}_\infty$ 扰动抑制水平 γ。

由于式(10) 中含有不确定项,所以对式(10) 中的不确定性结构分解,于是得到下式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & 0 & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_2 & \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} & d\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}_d & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm{T}} \\ * & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2 & 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -h^{-1}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \Xi +$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\Delta\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{A}_d)+(\Delta\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{A}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & 0 & (\Delta\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} & d\boldsymbol{P}\Delta\boldsymbol{A}_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & \Delta\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\Xi + \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}\boldsymbol{D} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{F}[\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E}_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ d\boldsymbol{E}_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d\boldsymbol{E}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{D} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{R}\boldsymbol{D} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{F}[\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K} \ \boldsymbol{E}_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{E}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}[0 \ 0 \ 0 \ \boldsymbol{R}\boldsymbol{D} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

其中:

$$\boldsymbol{\Xi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & 0 & \boldsymbol{PB}_2 & \boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & d\boldsymbol{PA}_d & \boldsymbol{C}^{\mathrm T} & \boldsymbol{P}^{\mathrm T} & \boldsymbol{H}_1^{\mathrm T} & \boldsymbol{K}^{\mathrm T}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm T}\\ * & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{H}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{H}_2 & 0 & \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & \gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -h^{-1}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}+\boldsymbol{A}_d)+(\bar{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}+\boldsymbol{A}_d)^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{K}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{K}。$$

最后得到：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}+\alpha\boldsymbol{PDD}^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & 0 & \boldsymbol{PB}_2 & \boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & d\boldsymbol{PA}_d & \boldsymbol{C}^{\mathrm T} & \boldsymbol{P}^{\mathrm T} & \boldsymbol{H}_1^{\mathrm T} & \boldsymbol{K}^{\mathrm T}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm T} & (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K})^{\mathrm T} & (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{K})^{\mathrm T}\\ * & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{H}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{H}_2 & 0 & \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{E}_2^{\mathrm T}\\ * & * & \gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -h^{-1}\boldsymbol{R}+\alpha\boldsymbol{RDD}^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & d\boldsymbol{E}_2^{\mathrm T} & 0\\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \alpha^{-1}\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \alpha^{-1}\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{YX}^{-1}$，$\widetilde{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{XQX}$，$\widetilde{\boldsymbol{R}}_i=\boldsymbol{XR}_i\boldsymbol{X}$，在式子两边同乘以 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{I}\}$，得到：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_1+\alpha\boldsymbol{DD}^{\mathrm T} & 0 & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & d\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{X} & \boldsymbol{C}^{\mathrm T} & \boldsymbol{P}^{\mathrm T} & \boldsymbol{H}_1^{\mathrm T} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm T}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm T} & \boldsymbol{XE}_1^{\mathrm T}+\boldsymbol{XE}_2^{\mathrm T}+\boldsymbol{XE}_3^{\mathrm T} & \boldsymbol{XE}_1^{\mathrm T}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\\ * & -\widetilde{\boldsymbol{Q}}+\boldsymbol{XH}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{X} & 0 & \boldsymbol{A}_d^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{XE}_2^{\mathrm T}\\ * & * & \gamma^2 I & \boldsymbol{B}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -h^{-1}\boldsymbol{R}+\alpha\boldsymbol{RDD}^{\mathrm T}\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & d\boldsymbol{XE}_2^{\mathrm T} & 0\\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \alpha^{-1}\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \alpha^{-1}\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

其中：$\boldsymbol{\Lambda}_1=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)^{\mathrm T}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm T}+\boldsymbol{BY}_1+\widetilde{\boldsymbol{Q}}+\widetilde{\boldsymbol{R}}_1+\boldsymbol{Y}^{\mathrm T}\widetilde{\boldsymbol{R}}_2\boldsymbol{Y}$。

3 数值算例

利用定理求解线性矩阵不等式，可得

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.3 & 0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.2\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0\\ 0.5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_3=[1\quad 1],\boldsymbol{r}=0.01,$$

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0.3 & 2\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0.1 & 2\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0.3 & 2\end{bmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix},\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

则系统保性能状态反馈控制器为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-0.0489 & -0.0489\\ -0.0489 & 0.2347\end{bmatrix},\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}0.0003 & -0.1488\end{bmatrix},\boldsymbol{YX}^{-1}=\begin{bmatrix}0.5196 & -0.5257\end{bmatrix}。$$

4 结　语

本文讨论了一类非线性不确定奇异时滞系统的保性能控制问题。首先，给出了非线性不确定奇异时滞系统的鲁棒 $\boldsymbol{H}_\infty$ 的保性能控制定义；然后应用线性矩阵不等式方法、Lyapunov 稳定性理论以及基本不等式方法，给出了闭环系统的鲁棒 $\boldsymbol{H}_\infty$ 的保性能控制器存在的充分条件和设计方法。用数值算例说明了方法的有效性。

参考文献/References：

[1] YU Li，CHU Jian. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems[J]. Automatic，1999，35(6)：1 155-1 159.

[2] YU Li，GAO Furong. Optimal guaranteed cost control of dicrete uncertain time-delay systems with both state and input delays[J]. Journal of the Franklin Institute，2001，338(1)：101-110.

[3] WO Songlin，WU Jiancheng. Robust control and guaranteed cost control for singular systems[J]. Systems Engineering and Electronics，2007，29(6)：955-961.

[4] KOSMIDOU O I，BOUTALIS Y S. A linear matrix approach for guaranteed cost control of systems with state and input delays[J]. IEEE，Trans Syst Man Cybern，2006，36(2)：936-942.

[5] XU S，LAM J，ZOU Y. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain systems with state and input delay[J]. IEE Proceedings-Control Theory Application，2006，153：307-313.

[6] MUKAIDANI H. An LMI aooroach to guaranteed cost control for uncertain delay systems[J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems，2003，50(6)：795-800.

[7] 高在瑞，王天成. 一类不确定广义时滞系统的保性能控制[J]. 计算技术与自动化，2008，27(4)：11-14.
GAO Zairui，WANG Tiancheng. Guaranteed cost control for a class of uncertain descriptor systems[J]. Computing Technology and Automation，2008，27(4)：11-14.

[8] 马跃超，黄丽芳，张庆灵. 时变不确定时滞连续系统的鲁棒保性能控制[J]. 物理学报，2007，56(7)：3 744-3 752.
MA Yuechao，HUANG Lifang，ZHANG Qingling. Robust ruaranteed cost control for uncertain time-varying delay systems[J]. Acta physica Sinica，2007，56(7)：3 744-3 752.

[9] 杨　坤，纪志成. 一类不确定奇异多时滞系统的保性能控制[J]. 信息与控制，2012，41(6)：695-700.
YANG Kun，JI Zhicheng. Guaranteed cost control for uncertain singular systems with multiple delay[J]. Information and Control，2012，41(6)：695-700.

[10] 马跃超，李超峰. 广义系统的时滞相关非脆弱保成本控制[J]. 控制工程，2012，19(1)：176-180.
MA Yuechao，LI Chaofeng. Non-fragile delay-dependent guaranteed cost control for singular systems[J]. Control Engineering of China，2012，19(1)：176-180.

[11] 沃松林，史国栋，邹 云. 具有非线性扰动的广义系统的鲁棒控制[J]. 控制与决策，2009，24(3)：356-359.
WO Songlin，SHI Guodong，ZOU Yun. Robust control for singular systems with nonlinear perturbation[J]. Control and Decision，2009，24(3)：356-359.

[12] 朱晓丹，苏连青，赵彦春，等. 时滞相关的非线性广义系统的保性能控制[J]. 河北科技大学学报，2010，31(3)：187-191.
ZHU Xiaodan，SU Lianqing，ZHAO Yanchun，et al. Guaranteed cost control for delay-dependent nonlinear singular systems[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2010，31(3)：187-191.

[13] 阮万清. 一类不确定非线性奇异系统的保性能控制[J]. 科学技术与工程，2012，12(14)：3 373-3 376.
RUAN Wanqing. Garanteed cost control for nonlinear uncertain singular systems[J]. Science Technology and Engineering，2012，12(14)：3 373-3 376.

[14] BOYD S，GHAOUI L E，FERON E，et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory[M]. Philadelphia：SLAM，1987.

[15] XIE Lihua，SOUZA D，CARLOS E. Robust control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix[J]. Systems and Control Letters，1990，14(5)：389-396.

[16] KOSMIDOU O I. Generalized riccati equations associated with guaranteed cost control：An overview of solutions and features[J]. Applied Mathematics and Computation，2007(2)：511-520.