第 34 卷第 5 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 34, No. 5
2013 年 10 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Oct. 2013

文章编号:1008-1542(2013)05-0403-03　　doi:10.7535/hbkd.2013yx05011

多线性位势型算子的一类加权不等式

郭景芳[1]，王会敏[2]，滑军丽[2]

(1.河北科技大学理学院,河北石家庄　050018;2.河北师范大学数学与信息科学学院，河北石家庄　050024)

摘　要:设 Φ 是 R^n 上满足弱增长条件的非负局部可积函数,A 是 R^n 上所有一阶偏导数都属于 $BMO(\mathrm{R}^n)$ 的函数. 本文讨论由 Φ 与 A 生成的一类多线性位势型算子 T_Φ^A 与其极大函数相联系的关于任意权的加权不等式。

关键词:多线性位势型算子;加权不等式;极大函数

中图分类号:O174.2　　**文献标志码:**A

Some weighted inequalities for multi-linear potential type operators

GUO Jingfang[1], WANG Huimin[2], HUA Junli[2]

(1. School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China; 2. School of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei 050024, China)

Abstract: In definition, let Φ be a non-negative locally integral function on R^n and satisfy weak growth condition, and A be a function on R^n with derivatives of order one in $BMO(\mathrm{R}^n)$. Considering the multi-linear potential type integral operator T_Φ^A generated by Φ and A, this paper discusses the weighted inequalities of arbitrary weight for T_Φ^A associated with its maximal function.

Key words: multi-linear potential type operator; weighted inequality; maximal function

设 Φ 是 R^n 上的非负局部可积函数,满足下面弱增长条件:存在常数 $\delta,c>0$,$0\leqslant\varepsilon<1$,使得对所有 $k\in\mathbf{Z}$ 有

$$\sup_{2^k<|x|\leqslant 2^{k+1}}\Phi(x)\leqslant\frac{c}{2^{kn}}\int_{\delta(1-\varepsilon)2^k<|y|\leqslant 2\delta(1+\varepsilon)2^k}\Phi(y)\mathrm{d}y。\tag{1}$$

对可测函数 f,定义位势型算子 T_Φ:

$$T_\Phi f(x)=\int_{\mathrm{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\mathrm{d}y。$$

对于 Φ 满足条件(1) 的位势型算子 T_Φ,Pérez 给出了强型(p,q) 双权不等式成立的充分条件[1]。

设 A 是 R^n 上所有一阶偏导数都属于 $BMO(\mathrm{R}^n)$ 的函数,Φ 满足条件(1),定义多线性位势型积分算子 T_Φ^A 为

$$T_\Phi^A f(x)=\int_{\mathrm{R}^n}\Phi(x-y)\frac{A(x)-A(y)-\nabla A(y)(x-y)}{|x-y|}f(y)\mathrm{d}y。$$

收稿日期:2013-01-18;修回日期:2013-04-07;责任编辑:张　军

基金项目:河北省自然科学基金(08M001)

作者简介:郭景芳(1971-),女,河北栾城人,讲师,硕士,主要从事调和分析方面的研究。

E-mail:fsqsjz@163.com

LI 证明了多线性位势型积分算子的强型(p,q)双权不等式[2]。本文讨论多线性位势型算子 T_{Φ}^{A} 与其极大函数相联系的关于任意权的加权不等式。

下面给出与 Young 函数有关的一些基本概念及记号，详见文献[3]。如果 $B:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为凸的递增连续函数，满足 $B(0)=0$，$B(t)\to\infty$，$t\to\infty$，则称 B 为 Young 函数。

给定一个 Young 函数 B，Q 为 $\mathbf{R}^n$ 中的方体，定义 f 在 Q 上的平均 Luxemburg 范数为

$$\|f\|_{B,Q}=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{|Q|}\int_Q B\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\mathrm{d}y\leqslant 1\right\}。$$

对于任意的 Young 函数 B，存在 B 的共轭 Young 函数 $\bar{B}$ 满足 $t\leqslant B^{-1}(t)\bar{B}^{-1}\leqslant 2t$，且有：

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant 2\|f\|_{B,Q}\|g\|_{\bar{B},Q}。\tag{2}$$

对于非负局部可积函数 Φ，定义与之相联系的正函数 $\tilde{\Phi}$：$\tilde{\Phi}(t)=\int_{|z|\leqslant t}\Phi(z)\mathrm{d}z$，$t\geqslant 0$。对于 Young 函数 B，定义 Orlicz 极大函数为 $M_B f(x)=\sup\limits_{x\in Q}\|f\|_{B,Q}$；定义与位势型算子 T_{Φ} 相联系的极大函数为

$$M_{\Phi,B}f(x)=\sup_{x\in Q}\tilde{\Phi}[l(Q)]\|f\|_{B,Q}。$$

本文主要用到的 Young 函数是 $B(t)=t(1+\log^+ t)^{\delta}$，$\delta>0$。对于这个 Young 函数，本文表示 f 在方体 Q 上的 Luxemburg 范数为 $\|f\|_{L(\log L)^{\delta},Q}$，Orlicz 极大函数为 $M_{L(\log L)^{\delta}}f$。

1 几个引理

为得到本文的主要定理，先给出几个引理。

引理 1[2] 设 Φ 为满足条件(1)的非负局部可积函数，令 f 和 g 为具紧支集的非负有界函数，μ 是非负且紧支集上有限的测度，令 $a>2^n$ 则存在一列方体$\{Q_{k,j}\}$和一列互不相交的子集$\{E_{k,j}\}$，$E_{k,j}\subset Q_{k,j}$，使

$$|Q_{k,j}|<\frac{1}{1-2^n/a}|E_{k,j}|\tag{3}$$

对所有 k,j 成立，且

$$\int_{\mathbf{R}^n}T_{\Phi}^{A}f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x)\leqslant C\sum_{k,j}\frac{1}{|Q_{k,j}|}\int_{Q_{k,j}}g(y)u(y)\mathrm{d}y\tilde{\Phi}(al(Q_{k,j}))\|f\|_{L\log L,aQ_{k,j}}|E_{k,j}|,\tag{4}$$

其中 $a=\max\{3,\delta(1+\varepsilon)\}$，$\delta,\varepsilon$ 为条件(1)中的值。称权函数 v 满足 RH_{∞} 条件：若存在常数 $C>0$ 使得对每个方体 Q 有 $\operatorname{ess}\sup\limits_{x\in Q}v(x)\leqslant\frac{C}{|Q|}\int_Q v$。容易验证 $RH_{\infty}\subset A_{\infty}$。

引理 2 设 Φ 为满足条件(1)的非负局部可积函数，$B(t)=t(1+\log^+ t)$，T_{Φ}^{A} 为前面所定义的算子，v 是满足 RH_{∞} 条件的权，则存在正常数 C，使得对任意权 w 和所有正函数 f 有：

$$\int_{\mathbf{R}^n}T_{\Phi}^{A}f(x)w(x)v(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}M_{\Phi,B}f(x)Mw(x)v(x)\mathrm{d}x。\tag{5}$$

证明 本文利用不等式(4)及 $v\in RH_{\infty}$，其中 $g=w$，$\mathrm{d}\mu(x)=v(x)\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}T_{\Phi}^{A}f(x)w(x)v(x)\mathrm{d}x&\leqslant C\sum_{k,j}\tilde{\Phi}(al(Q_{k,j}))\|f\|_{L\log L,aQ_{k,j}}\int_{Q_{k,j}}w(y)v(y)\mathrm{d}y\leqslant\\&C\sum_{k,j}\tilde{\Phi}(al(Q_{k,j}))\|f\|_{L\log L,aQ_{k,j}}\int_{Q_{k,j}}w(y)\mathrm{d}y\operatorname{ess}\sup_{x\in Q_{k,j}}v\leqslant\\&C\sum_{k,j}\tilde{\Phi}(al(Q_{k,j}))\|f\|_{L\log L,aQ_{k,j}}\frac{1}{|Q_{k,j}|}\int_{Q_{k,j}}w(y)\mathrm{d}y\,v(Q_{k,j})。\end{aligned}$$

由$\{E_{k,j}\}$的性质，有 $v(Q_{k,j})\leqslant Cv(E_{k,j})$，又由于集族$\{E_{k,j}\}$互不相交且 $E_{k,j}\subset Q_{k,j}$ 有：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}T_{\Phi}^{A}f(x)w(x)v(x)\mathrm{d}x&\leqslant C\sum_{k,j}\tilde{\Phi}(al(Q_{k,j}))\|f\|_{L\log L,aQ_{k,j}}\frac{1}{|Q_{k,j}|}\int_{Q_{k,j}}w(y)\mathrm{d}y\,v(E_{k,j})\leqslant\\&C\sum_{k,j}\int_{E_{k,j}}M_{\Phi,B}f(x)Mw(x)v(x)\mathrm{d}x\leqslant\\&C\int_{\mathbf{R}^n}M_{\Phi,B}f(x)Mw(x)v(x)\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

引理 3[4] 令 g 为使 $M_{g\,a.e}$ 有限的任一函数，则$(M_g)^{-\alpha}\in RH_{\infty}$，$\alpha>0$。

2　主要结论

定理 1　设 Φ 满足条件(1)，$B(t)=t(1+\log^+ t)$，T_Φ^A 为前面所定义的算子，

1) 若 $0<p\leqslant 1$ 则对任意的权函数 w，存在常数 C 使得：

$$\int_{\mathbf{R}^n}|T_\Phi^A f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}(M_{\Phi,B}f(x))^p Mw(x)\mathrm{d}x \tag{6}$$

成立；

2) 若 $p>1$，则对任意的权函数 w，存在常数 C 使得：

$$\int_{\mathbf{R}^n}|T_\Phi^A f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}(M_{\Phi,B}f(x))^p M^{|p|+1}w(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

成立。

证明　首先证明 $0<p<1$ 时式(6) 成立，本文要用到 $L^p,p<1$ 的对偶空间，参见文献[5]。若 $f\geqslant 0$，

$$\|f\|_p=\inf\{\int fu^{-1}:\|u^{-1}\|_{p'}=1\},$$

故存在 $u\geqslant 0$，$\|u^{-1}\|_{p'}=1$，其中 $p'=p/(p-1)<0$，使得 $\|f\|_p=\int fu^{-1}$，这可由“逆”Hölder 不等式 $\int fg\geqslant\|f\|_p\|g\|_{p'}$ 得到。本文选择 $g\geqslant 0$，$\|g^{-1}\|_{L^{p'}(Mw)}=1$，并使得：

$$\|M_{\Phi,B}f\|_{L^p(Mw)}=\int_{\mathbf{R}^n}M_{\Phi,B}f(x)\frac{Mw(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbf{R}^n}M_{\Phi,B}f(x)\frac{Mw(x)}{M(g^\delta)^{1/\delta}(x)}\mathrm{d}x,$$

其中对任意 $\delta>0$，本文用到了 Lebsgue 微分定理。由于文献[6] 有下列结论：若 $w\in A_1$，则 $w^{-1}\in RH_\infty$；若 $w\in RH_\infty$，则 $w^\lambda\in RH_\infty$，$\lambda>0$。本文对权 $M(g^\delta)^{-1/\delta}$ 用引理 2 和引理 3，继续不等式

$$\|M_{\Phi,B}f\|_{L^p(Mw)}\geqslant\int_{\mathbf{R}^n}T_\Phi^A f(x)\frac{Mw(x)}{M(g^\delta)^{1/\delta}(x)}\mathrm{d}x\geqslant\|T_\Phi^A f\|_{L^p(w)}\|M(g^\delta)^{-1/\delta}\|_{L^{p'}(w)^*},$$

那么只需证明 $\|M(g^\delta)^{-1/\delta}\|_{L^{p'}(w)}\geqslant\|g^{-1}\|_{L^{p'}(Mw)}$，因为 $p'<0$，这等价于证明

$$\int_{\mathbf{R}^n}M(g^\delta)(x)^{-p'/\delta}w(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}g(x)^{-p'}Mw(x)\mathrm{d}x。$$

但若选择 $0<\delta<p/(p-1)$，则 $-p'/\delta>1$，由 Fefferman 和 Stein 的经典加权不等式[7-10]：

$$\int_{\mathbf{R}^n}(Mf)^p(x)w(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}f(x)^p Mw(x)\mathrm{d}x,\quad p>1$$

立即可得式(6)。

当 $p=1$ 时由引理 2($v\equiv 1$) 即可得式(6) 成立。

下面证明 $p>1$ 的情形。

首先证明下面的不等式成立，

$$\int_{\mathbf{R}^n}|T_\Phi^A f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}(M_{\Phi,B}f(x))^p M_{L(\log L)^{p-1+\delta}}(w)(x)\mathrm{d}x,\delta>0。\tag{8}$$

由 $p=1$ 得：

$$\int_{\mathbf{R}^n}|T_\Phi^A f(x)|(g(x)w(x)^{1/p})\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}M_{\Phi,B}f(x)M(gw^{1/p})(x)\mathrm{d}x。$$

由一般 Hölder 不等式，对于适当的 Young 函数 Ψ 待定，继续不等式

$$\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}M_{\Phi,B}f(x)M_\psi g(x)M_{\bar\psi}(w^{1/p})(x)\mathrm{d}x\leqslant C(\int_{\mathbf{R}^n}M_{\Phi,B}f(x)^p(M_{\bar\psi}(w^{1/p})(x))^p\mathrm{d}x)^{1/p}(\int_{\mathbf{R}^n}M_\psi g(x)^{p'}\mathrm{d}x)^{1/p'},$$

实际上，令 $\Psi(t)=t^{p'}(1+\log^+ t)^{-1-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，当 t 充分大时有 $\bar\Psi(t)\approx t^p(1+\log^+ t)^{(p-1)(1+\varepsilon)}$ 且 $\Psi\in B_{p'}$，则由文献[1] 中的定理 4.1 知 M_ψ 在 $L^{p'}$ 上有界，所以有：

$$\int_{\mathbf{R}^n}|T_\Phi^A f(x)|(g(x)w(x)^{1/p})\mathrm{d}x\leqslant C(\int_{\mathbf{R}^n}M_{\Phi,B}f(x)^p M_{L(\log L)^{(p-1)(1+\varepsilon)}}w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}(\int_{\mathbf{R}^n}M_\psi g(x)^{p'}\mathrm{d}x)^{1/p'},$$

令 $\delta=(p-1)\varepsilon$，则证得式(8) 成立。若令 $\varepsilon=\dfrac{|p|}{p-1}-1$，则有：

$$M_{\bar\psi}(w^{1/p})(x)^p\approx M_{L(\log L)^{[p]}}w(x)\leqslant CM^{|p|+1}w(x),$$

所以有式(7)成立。此时定理 1 证完。

(下转第 416 页)

参考文献/References：

[1] 叶 飞，苏 刚. 拓扑绝缘体及其研究发展[J]. 物理，2010，39(8)：54-59.
YE Fei，SU Gang. Topological insulators[J]. Physics，2010，39(8)：54-59.

[2] PHAM C，NGUYEN H，NGUYEN V L. Massless dirac fermions in a grapheme superlattice：A *t*-matrix approach[J]. J Phys Condens Matter，2010，22：5 501-5 507.

[3] PRATIM R，TARUN K，KAUSHIK B. Localization of dirac-like excitations in grapheme in the presence of smooth inhomogeneous magnetic fields[J]. J Phys Condens Matter，2012，24(5)：5 301-5 312.

[4] GAO Jinhua，CHEN Weiqiang，FENG Xiaoyong，et al. Tunneling through ferromagnetic barriers on the surface of a topological insulator [J]. Mesoscale and Nanoscale Physics，2009，9：378-388.

[5] ZHANG Ya，ZHAI Feng. Tunneling magnetoresistance on the surface of a topological insulator with periodic magnetic modulations[J]. Appl Phys Lett，2010，96(5)：36-38.

[6] YOKOYAMA T，TANAKA Y，NAGAOSA N. Anomalous magnetoresistance of a two-dimensional ferromagnet/ferromagnet junction on the surface of a topological insulator[J]. Phys Rev B，2010，81(12)：1 401-1 404.

[7] WANG Suxin，LI Zhiwen，LIU Jianjun，et al. Transport properties through double-magnetic-barrier structures in grapheme[J]. Chin Phys B，2011，20(7)：7 305-7 309.

[8] ZHAO Peiliang，CHEN Xi. Electronic band gap and transport in Fibonacci quasi-periodic grapheme superlattice[J]. Appl Phys Lett，2011，99：1-4.

[9] 张红梅，刘 德. 传递矩阵方法与矩形势垒的量子隧穿[J]. 河北科技大学学报，2006，27(3)：196-199.
ZHANG Hongmei，LIU De. Transfer matrix method in the study of quantum transmission for rectangular barrier[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2006，27(3)：196-199.

[10] 刘 德，张红梅，王博瑜. 双势垒异质结构中自旋相关的散粒噪声[J]. 河北科技大学学报，2010，31(6)：512-516.
LIU De，ZHANG Hongmei，WANG Boyu. Spin-dependent shot noise in double barrier heterostructures[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2010，31(6)：512-516.

[11] CONCHA A Z. Effect of velocity barrier on the ballistic transport of dirac fermions[J]. Phys Rev B，2010，82(3)：3 413-3 417.

[12] WANG Ligang，ZHU Shiyao. Electronic band gaps and transport properties in grapheme superlattices with one-dimensional periodic potentials of square barriers[J]. Phys Rev B，2010，81(20)：5 444-5 448.

[13] SUN Lifeng，FANG Chao，SONG Yu，et al. Transport properties through grapheme-based fractal and periodic magnetic barriers[J]. J Phys Condens Matter，2010，22：5 303-5 307.

[14] HOSEIN C，FATEMEH A. Spin polarization and magnetoresistance through a ferromagnetic barrier in bilayer grapheme[J]. J Phys Condens Matter，2012，24(4)：5 303-5 306.

[15] YOUNG H，YOONBAI K，CORNELIU S，et al. Landau level spectrum for bilayer grapheme in a tilted magnetic field[J]. J Phys Condens Matter，2012，24(4)：5 501-5 507.

[16] MICHAEL B，PEETERS F M，VASILOPOULOS P，et al. Dirac and Klein-Gordon particles in one-dimensional periodic potentials[J]. Phys Rev B，2008，77：5 446-5 450.

[17] LUCA D，ALESSANDRO D. Multiple magnetic barriers in grapheme[J]. Phys Rev B，2009，79(16)：5 420-5 428.

[18] ABEDPOUR N，AYOUB E，REZA A，et al. Conductance of a disordered grapheme superlattice[J]. Phys Rev B，2009，79(16)：5 412-5 419.

(上接第 405 页)

参考文献/References：

[1] PÉREZ C. Two weighted inequalities for potential and fractional type maximal operrtors[J]. Indiana Univ Math J，1994，43：663-683.

[2] LI Wenming. Two-weight norm inequalitioes for multilinear potential type integral operators[J]. Math Nachr，2008，281：839-846.

[3] BENNETT C，SHARPPLET R. Interpolation of Operators[M]. Boston：Academic Press，1988.

[4] CRUZ-URIBE D，NEUGEBAUER C J. The styucture of the reverse classess[J]. Trans Amer Math Soc，1995，347：2 941-2 960.

[5] CARRO M J，PÉREZ C，SORIA F，et al. Maximal funtions and the control of weighted inequalities for the fractional integral operators [J]. Indiana Univ Math J，2005，54：627-644.

[6] PÉREZ C，WHEEDEN R. Potential operators，maximal functions，and generalizations of A_∞[J]. Potential Anal，2003，19：1-33.

[7] FEFFERMAN C，STEIN E M. Some maximal inequalities[J]. Amer J Math，1971，93：107-115.

[8] MOEN K. Weighted inequalities for multilinear fractional integral operators[J]. Collect Math，2009，60(2)：213-216.

[9] LI Wenming. Two-weight norm inequalitioes for commutators of potential type integral[J]. Math J Anal，2006，322：1 215-1 223.

[10] YAN Xuefang，XUE Limei，LI Wenming. Weighted endpoint estimates for commutators of multilinear fractional integral operators[J]. Czech Math J，2012，62：347-359.