第 34 卷第 1 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 34, No. 1
2013 年 2 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Feb. 2013

文章编号:1008-1542(2013)01-0022-04　　doi:10.7535/hbkd.2013yx01005

从经典物理推导爱因斯坦质能方程

李继军

(长江大学物理科学与技术学院,湖北荆州　434023)

摘　要:为找到一条由经典物理学通往狭义相对论的道路,根据相对性原理,洛伦兹力公式在不同惯性系中应具有相同的数学形式,从经典物理学推导出爱因斯坦质能方程。

关键词:质能方程;洛伦兹力;狭义相对论

中图分类号:O412.1　　**文献标志码**:A

Derivation of $E=mc^2$ from classical physics

LI Jijun

(College of Physical Science and Technology, Yangtze University, Jingzhou Hubei 434023, China)

Abstract: There is a relationship between classical physics and special relativity. According to the principle of relativity, Lorentz force formula has the same form in different inertial systems. In this paper Einstein's equation is derived from classical physics without using Lorentz transformation.

Key words: Einstein's mass-energy equation; Lorentz force; special relativity

1905 年,爱因斯坦利用相对性原理和光速不变原理通过一个思想实验得到质能方程[1],它已被实验所证明。一些文章和教材在考虑到碰撞和狭义相对论假设的前提下,通常利用能量守恒定理推导质能方程[2-7]。狭义相对论在质量和能量之间建立了一座桥梁,却在相对论物理学和经典物理学之间制造了一条单向车道,相对论物理学在近似条件下可以得到经典物理学中的定理,经典物理学却没有道路通往相对论物理学。笔者采用与通用教材不同的方法,在相对性原理之下,通过经典物理学中的规律给出 2 种推导质能方程的方法。

1　推导过程

假设有 2 个惯性系 S,S'的 x 和 x'轴重合,y 和 y'轴互相平行,z 和 z'轴互相平行,且 S'系沿 x-x'轴相对于 S 系以速度 u 做匀速直线运动。

首先,寻找 2 个坐标系之间的速度变换关系。为简单起见,考虑 1 个带电粒子以速度 $\vec{v}$ 在 S 系中运动,所受到的洛伦兹力为

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}), \tag{1}$$

在笛卡尔坐标系中用分量形式表示为

$$F_x=q(E_x+v_yB_z-v_zB_y), \tag{2a}$$

$$F_y=q(E_y+v_zB_x-v_xB_z), \tag{2b}$$

收稿日期:2012-10-22;修回日期:2012-12-03;责任编辑:张　军
基金项目:湖北省教育厅科学研究资助项目(B20111304)
作者简介:李继军(1972-),男,湖北荆州人,讲师,主要从事纳米光学及大学物理的教学和研究。
E-mail:jjli@yangtzeu.edu.cn

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$F_z=q(E_z+v_xB_y-v_yB_x)。\tag{2c}$$

根据相对性原理,在 S' 系中,该粒子所受到的洛伦兹力的数学形式是不变的。

$$F'_x=q(E'_x+v'_yB'_z-v'_zB'_y),\tag{3a}$$

$$F'_y=q(E'_y+v'_zB'_x-v'_xB'_z),\tag{3b}$$

$$F'_z=q(E'_z+v'_xB'_y-v'_yB'_x)。\tag{3c}$$

为了寻找 2 个坐标系中的速度变换关系,可以将式(1)两边同时点乘速度 $\vec{v}$,得

$$\vec{F}\cdot\vec{v}=q\vec{E}\cdot\vec{v},\tag{4}$$

将式(4)乘以 $-\frac{u}{c^2}$ 并与式(2a)相加,得到:

$$F_x\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)-\frac{u}{c^2}F_yv_y-\frac{u}{c^2}F_zv_z=q\left[E_x\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)+v_y\left(B_z-\frac{u}{c^2}E_y\right)-v_z\left(B_y+\frac{u}{c^2}E_z\right)\right],$$

将此式除以 $\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)$,并将右边的后 2 项分子、分母同时乘以 γ 得到:

$$F_x-\frac{\frac{u}{c^2}F_yv_y}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}-\frac{\frac{u}{c^2}F_zv_z}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}=q\left[E_x+\frac{v_y\gamma\left(B_z-\frac{u}{c^2}E_y\right)}{\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}-\frac{v_z\gamma\left(B_y+\frac{u}{c^2}E_z\right)}{\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}\right],$$

将此式与式(3a)相比较,为了保证洛伦兹力的形式在 S' 系中也是正确的,则有

$$F'_x=F_x-\frac{u}{c^2}F_yv_y/\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)-\frac{u}{c^2}F_zv_z/\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right),\tag{5}$$

$$v'_y=v_y/\left[\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)\right],\tag{6a}$$

$$v'_z=v_z/\left[\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)\right]。\tag{6b}$$

$$E'_x=E_x,\tag{7a}$$

$$B'_y=\gamma\left(B_y+\frac{u}{c^2}E_z\right),\tag{7b}$$

$$B'_z=\gamma\left(B_z-\frac{u}{c^2}E_y\right)。\tag{7c}$$

根据相对性原理,只要将 u 换成 $-u$ 即可得到从 S' 到 S 的速度变换公式:

$$v_y=v'_y/\left[\gamma\left(1+\frac{uv'_x}{c^2}\right)\right],\tag{8a}$$

$$v_z=v'_z/\left[\gamma\left(1+\frac{uv'_x}{c^2}\right)\right]。\tag{8b}$$

为确定 γ,将式(6a)代入式(8a)得到:$v_y=\dfrac{v'_y}{\gamma^2\left(1+\frac{uv'_x}{c^2}\right)\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}$,显然,此式成立的条件是:$\gamma^2\left(1+\frac{uv'_x}{c^2}\right)\times\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)=1$。考虑一个简单情况,假设带电粒子在 S' 系中是静止的,即:$v'_x=0$,也即是说 $v_x=u$,此时:$\gamma^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=1$,从而有 $\gamma=1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$。

采用寻找 v_y 与 v'_y 关系的方法,可以确定 v'_x 与 v_x 的变换关系:

$$v'_x=(v_x-u)/(1-\frac{uv_x}{c^2})。\tag{6c}$$

利用式(6a)－式(6c),可以构建一组相对论等式:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{1-\frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\tag{9a}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\frac{v_x'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{v_x-u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9b}$$

$$\frac{v_y'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9c}$$

$$\frac{v_z'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}。 \tag{9d}$$

下面将利用经典物理学中动量的定义 $\vec{p}=m\vec{v}$，结合速度变换式(6a)－式(6c)，可以给出与质量、动量、能量相关的相对论变换。

在 S 系中，粒子 q 具有的动量在笛卡尔坐标系中的分量形式为

$$p_x=mv_x, \tag{10a}$$

$$p_y=mv_y, \tag{10b}$$

$$p_z=mv_z, \tag{10c}$$

根据相对性原理，在 S' 系中，粒子 q 具有的动量在笛卡尔坐标系中的分量形式为

$$p_x'=m'v_x', \tag{11a}$$

$$p_y'=m'v_y', \tag{11b}$$

$$p_z'=m'v_z'。 \tag{11c}$$

结合式(6c)、式(10a)－式(10c)和式(11a)－式(11c)，得到：$\frac{p_x'}{m'}=\frac{p_x-um}{m\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}$，该等式可以表示为

$$p_x'=k(p_x-um), \tag{12a}$$

$$m'=mk(1-\frac{uv_x}{c^2}), \tag{12b}$$

式中 k 是一个未知的比例常数。

同理也有关系式：

$$\frac{p_x}{m}=\frac{p_x'-um'}{m'\left(1-\frac{uv_x'}{c^2}\right)}。$$

$$p_x=k(p_x'-um'), \tag{13a}$$

$$m=m'k\left(1+\frac{uv_x'}{c^2}\right)。 \tag{13b}$$

将式(12b)与式(13b)相乘得到：$k^2\left(1+\frac{uv_x'}{c^2}\right)\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)=1$。将式(6c)代入得到：$k^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=1$，即 $k=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，显然，系数 k 就是常数 γ。

为简单起见，设带电粒子在 S 系中静止，即 $v_x=0$，$v_x'=-u$ 将其代入式(12b)，得

$$m'=\gamma m_0。 \tag{14a}$$

这个结果说明在 S 系中的观察者测量到的静止质量为 m_0，在 S' 系中的观察者测量的质量为 m'。

假如带电粒子在 S' 系中是静止的，则 $v_x'=0$，$v_x=u$，同样可以得到

$$m=\gamma m_0, \tag{14b}$$

也就是说 S' 系中的观察者测量到的静止质量为 m_0，在 S 系中的观察者测量的质量为 m。结合式(10b)、式(11b)和式(6a)，可以得到 y 轴方向的动量变换式：

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$p_y' = m'v_y' = mv_y = p_y, \tag{13c}$$

同理可得 z 轴方向的变换式：

$$p_z' = m'v_z' = mv_z = p_z。 \tag{13d}$$

将 $k=\gamma=1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ 代入式(12a)与式(12b)可以得到变换式：

$$m' = \gamma m\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right), \tag{15a}$$

$$p_x' = \gamma(p_x - um), \tag{15b}$$

$$p_y' = p_y, \tag{15c}$$

$$p_z' = p_z。 \tag{15d}$$

为获得动量和能量的相对论关系，从 $\gamma^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=1$ 出发，将此式两边同时乘以 $m_0^2c^4$ 得到

$$c^4\gamma^2 m_0^2 - c^2\gamma^2 m_0^2 u^2 = m_0^2 c^4, \tag{16}$$

当粒子在 S' 中静止时，$u=v$，$\gamma^2 m_0^2 u^2 = m^2 v^2$ 代表 S 系中粒子动量 p 的平方。

式(16)左边第 1 项的平方根即是能量：

$$E=\gamma m_0 c^2 = mc^2,$$

此式即相对论能量，这说明改变质量就会改变能量，反之亦然。至此，式(16)可以写为

$$E^2 = c^2p^2 = m_0^2c^4, \tag{17}$$

此式即是相对论中动量和能量的关系。

将式(15a)和式(15b)两边同时乘以 c^2 即可得到包含动量和能量的转换关系。

$$E' = \gamma(E-up_x), \tag{18a}$$

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{u}{c^2}E\right)。 \tag{18b}$$

动能 T 是相对论总能量和静止能量之差：

$$T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(1/\sqrt{1-v^2/c^2}-1)。$$

2　结　论

没有使用洛伦兹变换推导质能方程，而是通过相对性原理，利用经典物理学中的洛伦兹力公式在不同惯性系中数学形式的不变性推导出爱因斯坦质能方程。因此，不通过思想实验和狭义相对论假设也可以获得爱因斯坦方程。

参考文献：

[1] EINSTEIN A. Does the inertia of a body depend on its energy content?[J]. Ann Phys, 1905,18:639-641.

[2] ROHRILICH F. An elementary derivation of $E=mc^2$[J]. Am J Phys, 1990,58:348-349.

[3] SEBASTIANO S, MASSIMO P. Deriving relativistic momentum and energy[J]. Eur J Phys,2005,26:33-45.

[4] BRIAN C, JEFF F. Why does $E=mc^2$?[M]. New York: Da Capo Press, 2010.

[5] 刘　辽，费保俊，张允中. 狭义相对论[M]. 第 2 版. 北京：科学出版社，2008.
LIU Liao, FEI Baojun, ZHANG Yunzhong. Speical Relativity[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2008.

[6] 赵凯华，罗蔚茵. 新概念物理教程：力学[M]. 第 2 版. 北京：高等教育出版社，2004.
ZHAO Kaihua, LUO Weiyin. New Concept Physics: Mechanics[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2004.

[7] 田树勤. 狭义相对论变换式修正结果的验证[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版)，2012,30(2):212-216.
TIAN Shuqin. Verification of special relativity transformation corrections result[J]. Journal of Shenyang Normal University(Natural Science Edition), 2012,30(2):212-216.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net