第34卷第1期　　河北科技大学学报　　Vol. 34, No. 1
2013年2月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Feb. 2013

文章编号:1008-1542(2013)01-0015-03　　doi:10.7535/hbkd.2013yx01003

解常微分方程的稳定的显式单步法

龙爱芳，胡军浩

（中南民族大学数学与统计学学院，湖北武汉　430074）

摘　要:应用函数 $P(x)=\dfrac{1}{A+Bx}+C$ 来近似初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的解,应用积分,得到了一个求解微分方程的一个新方法,它是求解常微分方程的一个显式方法,是一个单步法,最重要的是它对模型方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda y,\\ y(0)=y_0\end{cases}$ $(\lambda<0)$是稳定的,数值试验表明该方法简单有效。

关键词:常微分方程;稳定;数值试验

中图分类号:O241　　**文献标识码**:A

A stable explicit one-step method for solving ordinary differential equation

LONG Aifang, HU Junhao

(School of Mathematics and Statistics, South-central University for Nationalities, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: In this paper, function $P(x)=\dfrac{1}{A+Bx}+C$ is the approximation solution of the ordinary differential equation $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}$ With the integral applied, a new numerical method of ordinary differential equation is proposed. It is a stable explicit one-step method for soving ordinary differential equation. The most impotant thing is that it is stable when the method is applied to the test eqution $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda y,\\ y(0)=y_0\end{cases}$ $(\lambda<0)$. The numerical experiments show that the method is effective.

Key words: ordinary differential equation; stable; numerical experiment

常微分方程数值解是计算方法的重要内容,传统的方法有尤拉公式、后退的尤拉公式、梯形公式、龙格-库塔方法、线性多步法等,尤拉公式和龙格-库塔方法都是显式的单步法,计算较简单,但要使计算过程稳定需步长足够小;后退的尤拉公式和梯形公式都是隐式的单步法,每一步均需解非线性方程,非常麻烦,但它们对模型方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda y,\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ $(\lambda<0)$是无条件稳定的。为了能够应用显式单步法的简单性又能保证计算过程

收稿日期:2012-11-28;责任编辑:张　军
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60904005);湖北省自然科学基金资助项目(2009CDB026)
作者简介:龙爱芳(1969-),女,广西荔浦人,副教授,硕士,主要从事计算数学方面的研究。
E-mail:lll1aaa1fff1@tom.com

的稳定，通常是采用显式的单步法提供预测值，再用隐式的单步法校正，从而形成预测-校正系统。

文献[1]－文献[10]给出了求解常微分方程的各种计算方法，笔者给出了另一个求解常微分方程的显式的单步法，它是二阶的，而且是无条件稳定的。

1 无条件稳定的二阶显式的单步法

设初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{1}$$

的理论解为 $y(x)$，将方程(1)两边在区间 $[x_n,x_{n+1}]$ 上积分得：

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y)\mathrm{d}x,\tag{2}$$

令 y_n 为 $y(x_n)$ 的近似值，并且 $y_n'=f(x_n,y_n)$，$y_n''=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y)\big|_{\substack{x=x_n\\ y=y_n}}$，$x_n=x_0+nh(n=1,2,\cdots)$ 在积分区间 $[x_n,x_{n+1}]$ 上用形如 $P(x)=\dfrac{1}{A+Bx}+C$ 的函数来近似表达初值问题(1)的解 $y(x)$，使得

$$y_n=P(x_n),\quad y_n'=P'(x_n),\quad y_n''=P''(x_n)\tag{3}$$

成立，而 $y_{n+1}=P(x_{n+1})$，由式(3)得确定 A,B,C 各值的方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{A+Bx_n}+C=y_n,\\ -\dfrac{B}{(A+Bx_n)^2}=y_n', & (4)\\ \dfrac{2B^2}{(A+Bx_n)^3}=y_n''。 & (5)\end{cases}$$

由式(4)与式(5)化简得

$$A+Bx_n=-\frac{2By_n'}{y_n''},\tag{6}$$

把式(6)代入式(2)化简得

$$B=-\frac{y_n''^2}{4y_n'^3},\tag{7}$$

把式(7)代入式(6)化简得

$$A=\frac{y_n''}{2y_n'^2}+\frac{y_n''^2}{4y_n'^3}x_n,\tag{8}$$

由式(7)和式(8)可得

$$\frac{1}{A+Bx_{n+1}}=\frac{4y_n'^3}{2y_n'y_n''-y_n''^2h},\tag{9}$$

$$\frac{1}{A+Bx_n}=\frac{2y_n'^2}{y_n''}。\tag{10}$$

由式(2)得 $y(x_{n+1})\approx y(x_n)+\int_{x_{n+1}}^{x_n}P'(x)\mathrm{d}x$，即

$$y_{n+1}=y_n+P(x_{n+1})-P(x_n)=y_n+\frac{1}{A+Bx_{n+1}}-\frac{1}{A+Bx_n},$$

把式(9)和式(10)代入上式并化简得

$$y_{n+1}=y_n+\frac{2y_n'^2h}{2y_n'-y_n''h}。\tag{11}$$

式(11)即为笔者提出的求解初值问题的常微分方程(1)的显式单步法。

定理1 式(11)是求解初值问题的常微分方程(1)的一个二阶显式单步法。

证明 由式(11)得

$$y_{n+1}=y_n+\frac{y_n'h}{1-\frac{y_n''}{2y_n'}h}=y_n+y_n'h\left(1+\frac{y_n''}{2y_n'}h+\frac{y_n''^2}{4y_n'^2}h^2+o(h^2)\right)=y_n+y_n'h+\frac{y_n''}{2}h^2+\frac{y_n''^2}{4y_n'}h^3+o(h^3),$$

作局部化假设 $y_n=y(x_n)$，则 $y_{n+1}=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\frac{y_n''^2}{4y_n'}h^3+o(h^3)$，又由于 $y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\frac{y'''(x_n)}{3!}h^3+o(h^3)$，故得到局部截断误差为

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{h^3}{12}\left(2y'''(x_n)-\frac{3y''^2(x_n)}{y'(x_n)}\right)h^3+o(h^3),$$

故式(11)是求解初值问题的常微分方程(1)的一个二阶显式单步法。

定理 2　式(11)是求解初值问题的常微分方程(1)的一个无条件稳定方法。

证明　考虑模型方程 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda y,\\ y(0)=y_0\end{cases}$ $(\lambda<0)$，由式(11)得到

$$y_{n+1}=y_n+\frac{2\lambda^2hy_n^2}{2\lambda y_n-\lambda^2y_nh}=\left(1+\frac{2\lambda h}{2-\lambda h}\right)y_n=\frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}y_n。\tag{12}$$

假设 y_n 有扰动 δ_n，相应 y_{n+1} 产生的扰动为 δ_{n+1}，则由式(12)可知：$\delta_{n+1}=\frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}\delta_n$，由于 $\lambda<0,h>0$ 时，$\left|\frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}\right|<1$ 恒成立，故 $|\delta_{n+1}|<|\delta_n|$ 恒成立，因而式(11)是无条件稳定的。

2　数值试验

例 1　解微分方程 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-20y,\\ y(0)=1\end{cases}$ 精确解为 $y=\mathrm{e}^{-20x}$。例 1 的二阶显式单步法式(11)数值试验见表 1。

例 2　解微分方程 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x,\\ y(0)=1\end{cases}$ 精确解为 $y=3\mathrm{e}^x-x-1$。例 2 的二阶显式单步法式(11)数值试验见表 2。

表 1　例 1 的二阶显式单步法(11)数值试验

Tab. 1　The numerical experiment of explicit one-step method(11) for example 1

x	y 的精确解与数值解之差的绝对值	步长 h	步数
1.0	$1.337\,1\times10^{-10}$	0.01	100

表 2　例 2 的二阶显式单步法(11)数值试验

Tab. 2　The numerical explriment of explicit one-step method(11) for example 2

x	y 的精确解与数值解之差的绝对值	步长 h	步数
1.0	$1.244\,1\times10^{-4}$	0.01	100

从以上数值试验结果可以看出，应用式(11)的方法是非常有效的。虽然该法用到 y_n'' 即 $f(x,y)$ 需计算导数，但它是无条件稳定的。龙格-库塔方法是求解初值问题的常微分方程常用的方法，它的优点是无需计算 $f(x,y)$ 导数值，只需计算函数值即可，但它要稳定是有条件的，不满足条件就会发散。另外，该法还可以应用于方程组的情况，适用于刚性常微分方程组的求解。

参考文献/References：

[1]　LAMBERT J D. Nonlinear methods for stiff system of ordinary differential equation[A]. Conference on the Numerical Solution of Differential Equation[C]. [S. l.]: Springer-Verlag, 1974. 75-88.

（下转第 21 页）

由于 $k_0/(\omega\mu_0)=1/(c\mu_0)=\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}=\sigma_m d$，故入射能流全损耗在膜中，膜底面能流密度为零($H_y=0$)。电阻膜下面介质中虽有电磁场，但无损耗，且平均能流密度为零。

4 结论

与真空波阻抗匹配的电阻薄膜，只要背面衬以 $\lambda/4$ 厚度的无损耗介质，底部有全反射导体膜，即可保证全吸收入射电磁波，这对红外辐射计和隐身材料均适用。

如果辐射波长变化为 λ_2，使下部介质厚度不为 $\lambda_2/4$，则表面必有反射，反射率可根据 $z=0$ 和 $z=d$ 处的边界条件算出，其中 $z=d$ 处的边界条件是：$Z\equiv\frac{\varepsilon_x}{H_y}=\mathrm{i}\frac{Z_v}{\sqrt{\varepsilon_{r(2)}}}\tan\left(\frac{2\pi d_2}{\lambda_2}\right)$。如果下部介质厚度变化，同样会使得该结构对于完全吸收平面电磁波的波长改变。如果技术上可以实现膜结构中的介质层为可调节厚度的真空层，那理论上该模型可以实现根据需求调整完全吸波所对应的电磁波波长。

这种电阻薄膜-介质层-全反射导体膜结构是一种新型的完全吸波材料结构理论模型。由于该模型对于相应波长的入射电磁波具有完全吸收特性，所以特别适用于辐射计等对单色吸收有较高要求的器件。随着吸波材料和薄膜加工技术的发展，该结构将会具有越来越大的应用前景。

参考文献/References：

[1] OHJ H, OHK S, KIM C G, et al. Design of radar absorbing structures using glass/epoxy composite containing carbon black in X-band frequency ranges[J]. Composites Part B, 2004, 35: 49-56.

[2] VINOY K J, JHA R M. Radar absorbing materials from theory to design and characterization[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[3] 雷前召，阴国富. 多层介质中平面电磁波传播特征[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2012，40(2)：77-80.
LEI Qianzhao, YIN Guofu. Plane wave propagation in multilayer media[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2012, 40(2): 77-80.

[4] 刘晓春. 电磁波吸收层的设计与吸波材料的应用[J]. 工程塑料应用，1996，24(6)：21-28.
LIU Xiaochun. Design of electromagnetic wave absorbing sheets and application of absorbing materials[J]. Engineering Plastics Application, 1996, 24(6): 21-28.

[5] 吴振华，张开春，刘盛纲. 特殊多层结构中电磁波传播特性研究[J]. 电子科技大学学报，2010，39(4)：505-508.
WU Zhenhua, ZHANG Kaichun, LIU Shenggang. Research on characteristics of electromagentic wave propagation in multi-layer structure[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2010, 39(4): 505-508.

[6] 步文博，徐　洁，丘　泰，等. 吸波材料的基础研究及微波损耗机理的探讨[J]. 材料导报，2001，15(5)：14-17
BU Wenbo, XU Jie, QIU Tai, et al. Discussion on fundamental research and microwave loss mechanism of microwave absorbing materials[J]. Materials Review, 2001, 15(5): 14-17.

(上接第 17 页)

[2] 文立平. 一族多步二阶导数方法的收缩性[J]. 计算数学，2001，23(3)：265-270.
WEN Liping. The countractivity of a class of second derivative multistep methods[J]. Methematica Numerica Sinica, 2001, 23(3): 265-270.

[3] LINIGER W, NEVALINNA O. Contractive methods for stiff differential equations Part Ⅰ[J]. BIT, 1978, 16: 457-474.

[4] LINIGER W, NEVALINNA O. Contractive methods for stiff differential equations Part Ⅱ[J]. BIT, 1979, 19: 53-72.

[5] ENRIGHT E H. Second dervative multistep methods for stiff ordinary differential equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1974, 11(2): 321-331.

[6] 杨小远. 基于抛物线逼近法方法的常微分方程数值解法研究[J]. 河南科学，2011，29(2)：127-132.
YANG Xiaoyuan. Improved Euler's method-parabolic approximation[J]. Henan Science, 2011, 29(2): 127-132.

[7] 张宇平，姜　晗，朱爱玲. 常微分方程的梯形外推法[J]. 山东师范大学学报(自然科学版)，2012，27(1)：29-31.
ZHANG Yuping, JIANG Han, ZHU Ailing. The extrapolation trapezoidal method of ordinary differential equation[J]. Journal of Shandong Normal University(Natural Science), 2012, 27(1): 29-31.

[8] AZIZ A K, MONK D. Continuous finite elements in space and time for the heat equation[J]. Math Comp, 1969, 52: 255-274.

[9] DAVID C L. Linear Algebra and Its Applications[M]. [S. l.]: Publishing House of Electronics Industry, 2004.

[10] WILLD D R. Experiments in stepsize control for adams linear multistep methods[J]. Advancs in Computatkraal Mathematics. 1998, 8: 335-344.