第 34 卷第 1 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 34, No. 1
2013 年 2 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Feb. 2013

文章编号:1008-1542(2013)01-0001-06　　doi:10.7535/hbkd.2013yx01001

具有变号非线性项的脉冲微分方程边值问题的正解

江卫华，张　强，郭巍巍

(河北科技大学理学院，河北石家庄　050018)

摘　要:运用 Avery-Peterson 不动点定理，研究了具有变号非线性项的脉冲微分方程边值问题正解的存在性。

关键词:脉冲微分方程;边值问题;正解;变号非线性项

中图分类号:O175.8　　**MSC(2010)主题分类**:34B05　　**文献标志码**:A

Positive solutions of the boundary value problem of impulsive differential equations with sign-changing nonlinearterm

JIANG Weihua, ZHANG Qiang, GUO Weiwei

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: By using Avery-Peterson fixed-point theorem, the existence of positive solutions of the boundary value problem of impulsive differential equation with sign-changing nonlinearterm was studied.

Key words: impulsive differential equation; boundary value problem; positive solution; sign-changing nonlinearterm

脉冲微分方程在经济、生物、生态学等领域有着广泛的应用[1-3]，考虑到其影响，很多学者常将微分方程边值问题推广到脉冲微分方程上去，通过运用锥拉伸与锥压缩不动点定理、Leray-Schauder 不动点定理、不动点指数理论等方法，得到了脉冲微分方程边值问题解的存在性[4-21]。

在文献[4]中，AGARWAL 等利用非线性的 Leray-Schauder 不动点定理和 Krasnoselskii's 不动点定理得到了二阶脉冲微分方程边值问题：

$$\begin{cases} y''(t)+\phi(t)f(t,y(t))=0, & t\in(0,1)\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_m\},\\ \Delta y(t_k)=I_k(y(t_k^-)), & k=1,2,\cdots,m,\\ \Delta y'(t_k)=J_k(y(t_k^-)), & k=1,2,\cdots,m,\\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

至少存在 1 个解和 2 个解的充分条件。

在文献[5]中，AGARWAL 等又利用 Legget-Williams 不动点定理得出了脉冲微分方程边值问题

$$\begin{cases} y''(t)+\phi(t)f(t,y(t))=0, & t\in(0,1)\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_m\},\\ \Delta y(t_k)=I_k(y(t_k^-)), & k=1,2,\cdots,m,\\ \Delta y'(t_k)=J_k(y(t_k^-)), & k=1,2,\cdots,m,\\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

收稿日期:2012-10-16;修回日期:2012-11-29;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11171088);河北科技大学博士科研启动基金资助项目(QD201020);河北科技大学科研基金资助项目(KL201236)

作者简介:江卫华(1964-)，女，河北邯郸人，教授，博士，主要从事应用泛函分析、常微分方程边值问题方面的研究。

E-mail:weihuajiang@hebust.edu.cn

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

至少存在3个正解的充分条件。

在文献[6]中，李高山等运用锥拉伸与锥压缩不动点定理，得到了带有变号非线性项的二阶三点微分方程边值问题：

$$\begin{cases}u''(t)+a(t)u'(t)+\lambda f(t,u(t))=0, & 0<t<1,\\ u'(0)=0, \quad u(1)=\alpha u(\eta),\end{cases}$$

其中$\alpha,\eta\in(0,1)$，至少1个正解的充分条件。

对于具有变号非线性项一阶导带脉冲的微分方程边值问题还没有人研究，应用文献[28]中的方法，笔者考虑下面脉冲微分方程边值问题：

$$\begin{cases}u''(t)+f(t,u(t))=0, & t\in(0,1)\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_m\},\\ \Delta u(t_k)=I_k(u(t_k)), & k=1,2,\cdots,m,\\ \Delta u'(t_k)=J_k(u(t_k)), & k=1,2,\cdots,m,\\ u(0)=\alpha u(\xi), \quad u'(1)=0,\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\alpha,\xi\in(0,1)$，$\Delta u(t_k)=u(t_k^+)-u(t_k^-)$和$u(t_k^+)$，$u(t_k^-)$分别表示$u(t)$在$t=t_k$时的右极限、左极限，且$\Delta u'(t_k)=u'(t_k^+)-u'(t_k^-)$。

定义空间：$PC[0,1]=\{u:[0,1]\to R,u(0)=u(0+0)$，存在$u_j\in C[t_j,t_{j+1}]$，使得在$(t_j,t_{j+1}]$有$u=u_j$，$j=0,1,\cdots m)\}$。范数为$\|u\|=\sup\{|u(t)|:t\in[0,1]\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}\}$，其中$t_0=0$，$t_m=1$。

定义1 $u\in PC[0,1]$是边值问题(1)的正解，当且仅当$u>0$且满足边值问题(1)。

在本文中，总是假设以下条件是成立的：

C_1）$f\in C([0,1]\times R_+,R)$，存在$M>0$，使得对于$(t,u)\in[0,1]\times R$，有$f(t,u)\geqslant -M$；

C_2）$I_k,J_k:R_+\to R$是连续的，$k=1,2,\cdots,m$；

C_3）存在一个函数$\Omega:\{u:u\in PC[0,1],u>0\}\to R_+$和一个正的常数$c_0\in(0,1)$使得

$$c_0\Omega(u)\leqslant\omega_0(t,u)\leqslant\Omega(u),$$

其中：

$$\begin{aligned}\omega_0(t,u)=&\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{t_k<\xi}[I_k((u-My)(t_k))+(\xi-t_k)J_k((u-My)(t_k))]+\\&\sum_{t_k<t}[I_k((u-My)(t_k))-\frac{\alpha\xi+(1-\alpha)t_k}{1-\alpha}J_k((u-My)(t_k))]-\\&\sum_{t\leqslant t_k}\frac{\alpha\xi+(1-\alpha)t}{1-\alpha}J_k((u-My)(t_k)),\quad k=1,2,\cdots,m。\end{aligned}$$

下面的定义及定理是本文的关键所在，具体见文献[28]。

定义2 当且仅当$\phi:P\to R_+$是连续的且对于所有的$x,y\in P$和$t\in[0,1]$，有

$$\phi(tx+(1-t)y)\geqslant t\phi(x)+(1-t)\phi(y),$$

称映射ϕ是实Banach空间E中锥P上的一个非负、连续、凹函数。

定义3 当且仅当$\Phi:P\to R_+$是连续的且对于所有的$x,y\in P$和$t\in[0,1]$，有

$$\Phi(tx+(1-t)y)\leqslant t\Phi(x)+(1-t)\Phi(y),$$

称映射Φ是实Banach空间E中锥P上的一个非负、连续、凸函数。

令φ和Θ是锥P上的非负、连续凸函数，Φ是锥P上的非负连续凹函数，Ψ是锥P上的非负连续函数，定义以下集合：

$$P(\varphi,d)=\{x\in P:\varphi(x)<d\},$$
$$P(\varphi,\Phi,b,d)=\{x\in P:b\leqslant\Phi(x),\varphi(x)\leqslant d\},$$
$$P(\varphi,\Theta,\Phi,b,c,d)=\{x\in P:b\leqslant\Phi(x),\Theta(x)\leqslant c,\varphi(x)\leqslant d\},$$
$$R(\varphi,\Psi,a,d)=\{x\in P:a\leqslant\Psi(x),\varphi(x)\leqslant d\},$$

其中a,b,c和d都是正数。

利用以下Avery-Peterson不动点定理来研究边值问题(1)。

定理1[21] 令P是实Banach空间E中的一个锥，φ和Θ是P上的非负连续凸函数，Φ是P上的非负连续凹函数，Ψ是P上的非负连续函数且满足$\Psi(kx)\leqslant k\Psi(x)$，其中$0\leqslant k\leqslant 1$，使得对于所有的$x\in\overline{P(\varphi,d)}$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

和某些正数 M 和 d,有 $\Phi(x)\leqslant\Psi(x)$ 和 $\|x\|\leqslant M\varphi(x)$。假设 $T:\overline{P(\varphi,d)}\to\overline{P(\varphi,d)}$ 是全连续的且存在正数 a,b,c,其中 $a<b$,使得以下条件成立:

S_1)对于 $x\in P(\varphi,\Theta,\Phi,b,c,d)$,有 $\{x\in P(\varphi,\Theta,\Phi,b,c,d):\Phi(x)>b\}\neq\phi$ 和 $\Phi(Tx)>b$;

S_2)对于 $x\in P(\varphi,\Phi,b,d)$ 和 $\Theta(Tx)>c$,有 $\Phi(Tx)>b$;

S_3)对于 $x\in R(\varphi,\Psi,a,d)$ 和 $\Psi(x)=a$,有 $0\notin R(\varphi,\Psi,a,d)$ 和 $\Psi(Tx)<a$,

则 T 至少有 3 个不动点 $x_1,x_2,x_3\in\overline{P(\varphi,d)}$,使得 $\varphi(x_i)\leqslant d$,其中,$i=1,2,3$,且有 $b<\Phi(x_1)$,$a<\Psi(x_2)$,$\Phi(x_2)<b$,$\Psi(x_3)<a$。

1　预备知识

引理 1　u 是边值问题(1)的解的充要条件是 u 满足积分方程

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\omega_{01}(t,u),$$

其中:

$$G(t,s)=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}s, & s<\xi,\quad s<t,\\ \alpha s+(1-\alpha)t, & t\leqslant s\leqslant\xi,\\ \alpha\xi+(1-\alpha)s, & \xi\leqslant s\leqslant t,\\ \alpha\xi+(1-\alpha)t, & \xi<s,t<s;\end{cases}$$

$$\omega_{01}(t,u)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{t_k<\xi}[I_k(u(t_k))+(\xi-t_k)J_k(u(t_k))]+\sum_{t_k<t}\left[I_k(u(t_k))-\frac{\alpha\xi+(1-\alpha)t_k}{1-\alpha}J_k(u(t_k))\right]-\sum_{t\leqslant t_k}\frac{\alpha\xi+(1-\alpha)t}{1-\alpha}J_k(u(t_k)),$$

$k=1,2,\cdots,m$,　$(t,u)\in[0,1]\times\{u:u\in PC[0,1],\quad u>0\}$ 且有 $c_0\Omega(u)\leqslant\omega_{01}(t,u)\leqslant\Omega(u)$。

引理 2　函数 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是连续的且满足

$$\rho_0 g(s)\leqslant G(t,s)\leqslant g(s),\quad t,s\in[0,1],$$

其中:$g(s)=\frac{s}{1-\alpha}$;$p_0=\alpha\xi$。

引理 3　微分方程边值问题:

$$\begin{cases}y''(t)+1=0,\\ y(0)=\alpha y(\xi),\quad y'(1)=0\end{cases}\tag{2}$$

的唯一解是 $y(t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{\alpha\xi}{1-\alpha}(1-\frac{1}{2}\xi)$。很显然,$y$ 满足:

$$\frac{\alpha\xi}{1-\alpha}(1-\frac{1}{2}\xi)\leqslant y(t)\leqslant\frac{1-\alpha(1-\xi)^2}{2(1-\alpha)},\quad t\in[0,1]。\tag{3}$$

引理 4　$\tilde{u}\geqslant My$ 是以下问题的一个解

$$\begin{cases}\tilde{u}''(t)+[f(t,\tilde{u}(t)-My(t))+M]=0,\quad t\in(0,1)\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_m\},\\ \Delta\tilde{u}(t_k)=I_k((\tilde{u}-My)(t_k)),\quad k=1,2,\cdots,m,\\ \Delta\tilde{u}'(t_k)=J_k((\tilde{u}-My)(t_k)),\quad k=1,2,\cdots,m,\\ \tilde{u}(0)=\alpha\tilde{u}(\xi),\quad \tilde{u}'(1)=0\end{cases}\tag{4}$$

的充要条件是 $u=\tilde{u}-My$ 边值问题(1)的一个正解。

证明　如果 u 是边值问题(1)的一个正解,由引理 3 可知 u 满足:

$$\begin{cases}(u+My)''(t)+[f(t,u)+M]=0,\quad t\in(0,1)\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_m\},\\ \Delta(u)(t_k)=I_k(u(t_k)),\quad k=1,2,\cdots,m,\\ \Delta(u)'(t_k)=J_k(u(t_k)),\quad k=1,2,\cdots,m,\\ (u+My)(0)=\alpha(u+My)(\xi),\quad (u+My)'(1)=0,\end{cases}\tag{5}$$

令 $\tilde{u}=u+My$,则 $\tilde{u}$ 满足边值问题(4),且 $\tilde{u}\geqslant My$。

反之,如果 $\tilde{u}$ 是边值问题(4)的一个解,且 $\tilde{u}\geqslant My$,令 $u=\tilde{u}-My$,由引理 4 知 u 满足边值问题(1)且

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$u \geqslant 0$。

定义函数 $\widetilde{f}(t,u)=f(t,\max\{u-My,0\})+M$，锥 K 和算子 $T:K\to K$ 如下。

$$K=\{u\in PC[0,1]:\inf_{t\in[0,1]}u(t)\geqslant\rho\|u\|\}，其中，\rho=\min\{c_0,\rho_0\}，$$

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s+\omega_0(t,u)，$$

显然当 $u\geqslant My$ 是算子 T 的一个不动点，那么 $u-My$ 是边值问题(1)的一个正解。

引理 5 算子 $T:K\to K$ 是全连续的。

证明 取 $u\in K$，显然 $Tu\in PC[0,1]$。

因为

$$|Tu(t)|=\left|\int_0^1 G(t,s)\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s+\omega_0(t,u)\right|\leqslant\left|\int_0^1 G(t,s)\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s\right|+|\omega_0(t,u)|\leqslant$$

$$\int_0^1 g(s)\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s+\Omega(u)，$$

则 $\|Tu\|\leqslant\int_0^1 g(s)\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s+\Omega(u)$，

又 $\inf\limits_{t\in[0,1]}Tu(t)=\inf\limits_{t\in[0,1]}\left[\int_0^1 G(t,s)\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s+\omega_0(t,u)\right]\geqslant\rho_0\int_0^1 g(s)\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s+c_0\Omega(u)\geqslant\rho\|T\tilde{u}\|$，

故 $T:K\to K$。

令 $B\subset K$ 是有界集，由 f,I_k,J_k 的连续性知 $T:K\to K$ 是连续的，且存在正的常数 M_1,c_{1k},c_{2k} 使得 $\widetilde{f}(t,u)\leqslant M_1$，$|I_k((u-My)(t_k))|\leqslant c_{1k}$，$|J_k((u-My)(t_k))|\leqslant c_{2k}$，$t\in[0,1]$，$u\in B$，则

$$|Tu(t)|=\left|\int_0^1 G(t,s)\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s+\omega_0(t,u)\right|\leqslant\left|M_1\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right|+|\omega_0(t,u)|\leqslant$$

$$M_1\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{t_k<\xi}[c_{1k}+(\xi-t_k)c_{2k}]+\sum_{t_k<t}\left[c_{1k}+\frac{\alpha\xi+(1-\alpha)t_k}{1-\alpha}c_{2k}\right]+$$

$$\sum_{t\leqslant t_k}\frac{\alpha\xi+(1-\alpha)}{1-\alpha}c_{2k}，$$

故 $T(B)$ 是有界的。

令 $t_1,t_2\in[0,1]$，$t_1<t_2\in(t_k,t_{k+1}]$，$u\in B\subset K$，因为 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是一致连续，

$$|(Tu)(t_2)-(Tu)(t_1)|\leqslant\int_0^1|G(t_2,s)-G(t_1,s)|\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s+|\omega_0(t_2,u)-\omega_0(t_1,u)|\leqslant$$

$$\int_0^1|G(t_2,s)-G(t_1,s)|\widetilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s+|t_2-t_1|\sum_{k=1}^m|J_k(u(t_k))|，$$

所以 $T(B)$ 是等度连续。因此知算子 $T:K\to K$ 是全连续的。

2 主要结果

定义非负连续凹函数 $\Phi(x)=\inf\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 和凸函数 $\Psi(u)=\Theta(u)=\varphi(u)=\|u\|$，有 $\Phi(u)\leqslant\|u\|$。

定理 2 设条件 C_1)－条件 C_3)成立，如果存在正的常数 a,b,c 和 d，满足 $a\geqslant\dfrac{M[1-\alpha(1-\xi)^2]}{2\rho(1-\alpha)}$，$a<b<\dfrac{b}{\rho}=c<d$，使得 $\mu>D_1+D_2$，$0<L<\rho(D_1+D_3)$，其中 $D_1=\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s$，$D_2\geqslant 0$，$D_3\geqslant 0$ 且：

A_1)对于所有的 $(t,u)\in[0,1]\times[0,d]$，有 $f(t,u)\leqslant\dfrac{d}{\mu}-M$，对于 $u\in K$，$\|u\|\leqslant d$，有 $\omega_0(t,u)\leqslant\dfrac{D_2}{\mu}d$；

A_2)对于所有的 $(t,u)\in[0,1]\times[b,\dfrac{b}{\rho}]$，有 $f(t,u)\geqslant\dfrac{b}{L}-M$，对于 $u\in K$，$b\leqslant u(t)\leqslant\dfrac{b}{\rho}$，有 $\omega_0(t,u)\geqslant\dfrac{D_3}{L}b$；

A_3)对于所有的 $(t,u)\in[0,1]\times[0,a]$，有 $f(t,u)\leqslant\dfrac{a}{\mu}-M$，对于 $u\in K$，$\|u\|\leqslant a$，有 $\omega_0(t,u)\leqslant\dfrac{D_2}{\mu}a$，

则边值问题(1)至少存在 2 个正解。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明　如果 $u \in \overline{P(\varphi,d)}$,由条件 A$_1$),引理(2)有:

$$\varphi(Tu) = \| Tu \| \leqslant \int_0^1 g(s)\tilde{f}(s,u)\mathrm{d}s + \omega_0(t,u) \leqslant \frac{d}{\mu}\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s + \frac{D_2}{\mu}d \leqslant \frac{d}{\mu}D_1 + \frac{D_2}{\mu}d < d,$$

表明 $T:\overline{P(\varphi,d)} \to \overline{P(\varphi,d)}$。

下面证明条件 S$_1$)成立。

取 $u(t) = \frac{b(\rho+1)}{2\rho}, t \in [0,1]$,则有 $\| u \| = \frac{b(\rho+1)}{2\rho} < \frac{b}{\rho}$ 和 $\Phi(u) = \inf_{t\in[0,1]} | u(t) | = \frac{b(\rho+1)}{2\rho} > b$,所以 $\{u \in P(\varphi,\Theta,\Phi,b,c,d):\Phi(\tilde{u}) > b\} \neq \varnothing$。

若 $u \in P(\varphi,\Theta,\Phi,b,c,d)$,有 $b \leqslant u(t) \leqslant \frac{b}{\rho}, t \in [0,1]$,由条件 A$_2$)有:

$$\varphi(Tu) = \inf_{t\in[0,1]} | Tu(t) | \geqslant \rho\left[\int_0^1 g(s)\tilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s + \omega_0(t,u)\right] \geqslant \rho\frac{b}{L}(D_1 + D_3) > b,$$

因此条件 S$_1$)满足。

以下证明条件 S$_2$)成立。

取 $u \in P(\varphi,\Phi,b,d)$ 和 $\| Tu \| > \frac{b}{\rho} = c$。考虑 $Tu \in P$,可得:

$$\Phi(Tu) = \inf_{t\in[0,1]} | Tu(t) | \geqslant \rho \| Tu \| > \rho\frac{b}{\rho} = b,$$

表明条件 S$_2$)满足。

接下来证明条件 S$_3$)成立。

显然,$\varphi(0) = 0 < a$,因此,$0 \notin R(\varphi,\Psi,a,d)$。假设 $u \in R(\varphi,\Psi,a,d)$,$\Psi(u) = \| u \| = a$,则由条件 A$_3$)知:

$$\Psi(Tu) = \| Tu \| \leqslant \int_0^1 g(s)\tilde{f}(s,u(s))\mathrm{d}s + \omega_0(t,u) \leqslant \frac{a}{\mu}(D_1 + D_2) < a,$$

因此,条件 S$_3$)也满足。

由定理 2 知,算子 T 至少存在 3 个正解 u_1,u_2,u_3,满足:$\| u_i \| \leqslant d, i=1,2,3$,并且

$$b<\inf_{t\in[0,1]}|u_1(t)|,\quad a\leqslant \| u_2 \|,\quad \inf_{t\in[0,1]}|u_2(t)|<b,\quad \| u_3 \| <a。$$

如果 $u\in K$ 且 $\| u \| \geqslant a$,由式(3)和定理 2 知 $u(t)\geqslant\rho \| u \| \geqslant\rho a\geqslant My(t)$。显然,$u_2\geqslant a, u_1>b>a$。所以可得到 u_1-My, u_2-My 是边值问题(1)的 2 个正解。

3　举例

考虑下面边值问题:

$$\begin{cases} u''(t)+f(t,u(t))=0, & t\in[0,1]\backslash\{\frac{1}{8}\}, \\ \Delta u(\frac{1}{8})=I_1(u(\frac{1}{8})), \\ \Delta u'(\frac{1}{8})=J_1(u(\frac{1}{8})), \\ u(0)=\frac{1}{4}u(\frac{1}{4}), \quad u'(1)=0。 \end{cases} \tag{6}$$

其中:

$$f(t,u)=\begin{cases} \sqrt{u}(t-1)+3, & t\in[0,1],u\in[0,10), \\ [\frac{1}{2}\sqrt{u}(t-1)+\frac{3}{2}](12-u)+(180+\sqrt{u-12}t)(u-10), & t\in[0,1],u\in[10,12), \\ 360+\sqrt{u-12}t, & t\in[0,1],u\in[12,192), \\ 360+6\sqrt{5}t, & t\in[0,1],u\in[192,+\infty), \end{cases}$$

根据定理 2,取 $M=1,\alpha=\xi=\frac{1}{4},c_0=\frac{1}{6},\rho=\frac{1}{16},\mu=2,D_1=\frac{2}{3},D_2=\frac{1}{3},D_3=0,L=\frac{1}{30},I_1(\omega)=\frac{1}{64}\sqrt{\omega}$,

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$J_1(\omega)=-\frac{1}{64}\sqrt{\omega}$,$\Omega(u)=\frac{3}{128}\sqrt{u(\frac{1}{8})}$,

$$\omega_{01}(t,u)=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{u(\frac{1}{8})}}{128}, & t>\dfrac{1}{8},\\ \dfrac{1}{64}(\dfrac{3}{8}+t)\sqrt{u(\frac{1}{8})}, & t\leqslant\dfrac{1}{8}。\end{cases}$$

易知$\frac{1}{6}\Omega(u)\leqslant\omega_0(t,u)\leqslant\Omega(u)$,令$a=10$,$b=12$,$d=750$。通过简单计算,可知定理2中的条件满足。因此边值问题(6)至少有2个正解。

参考文献/References:

[1] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. Theory of Impulsive Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[2] SAMOILENKO A M, PERESTYUK N A. Impulsive Differential Equations[M]. River Edge: World Scientific, 1995.

[3] BAINOV D D, SIMEONOV P S. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications[M]. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1993.

[4] AGARWAL R P, REGAN D O. Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations[J]. Appl Math Comput, 2000,114: 51-59.

[5] AGARWAL R P, REGAN D O. A Multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem[J]. Appl Math Comput, 2005,161:433-439.

[6] LI Gaoshang, LIU Xiping, JIA Mei. Positive solutions to a type of nonlinear three-point boundary value problem with sign changing nonlinearities[J]. Comput Math Appl, 2009,57:348-355.

[7] GUO Dajun, LIU Xinzhi. Multiple positive solutions of boundary value problems for impulsive differential equations[J]. Nonlinear Anal, 1995,25: 327-337.

[8] FRIGON M, REGAN D O. Boundary value problems for second order impulsive differential equations using set-valued maps[J]. Appl Anal, 1995,58:325-333.

[9] ELIE P W, HENDERSON J. Positive solutions of boundary value problems for ordinary differential equations with impulsive[J]. Dynamics Contin Discrete Impulsive Syst, 1998,82(4): 285-294.

[10] NIETO J J. Periodic boundary value problems for first-order impulsive ordinary differential equations[J]. Nonlinear Anal, 2002,51: 1 223-1 232.

[11] ZHAO Aimin, BAI Zhenguo. Existence of solutions to first-order impulsive periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Anal, 2009,71:1 970-1 977.

[12] LIANG Ruixi, SHEN Jianhua. Periodic boundary value problem for second-order impulsive functional differential equations[J]. Appl Math Comput, 2007, 193: 560-571.

[13] LI Jianli, SHEN Jianhua. Periodic boundary value problems for impulsive integro-differential equations of mixed type[J]. Appl Math Comput, 2006, 183: 890-902.

[14] HE Zhimin, YU Jianshe. Periodic boundary value problem for first-order impulsive functional differential equations[J]. J Comput Appl Math, 2002, 138(2):205-217.

[15] JANKOWSKI T. Positive solutions to second order four-point boundary value problems for impulsive differential equations[J]. Appl Math Comput, 2008, 202:550-561.

[16] JANKOWSKI T. Positive solutions of three-point boundary value problems for second order impulsive differential equations with advanced arguments[J]. Appl Math Comput, 2008, 197: 179-189.

[17] ZHANG Xuemei, YANG Xiaozhong, GE Weigao. Positive solutions of th-order impulsive boundary value problems with integral boundary conditions in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 2009, 71:5 930-5 945.

[18] HAO Xinan, LIU Lishan, WU Yonghong. Positive solutions for second order impulsive differential equations with integral boundary conditions[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2011, 16(1): 101-111.

[19] GUO Dajun. Multiple positive solutions of a boundary value problem for nth-order impulsive integro-differential equations in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 2005, 63: 618-641.

[20] HU Lili, LIU Lishan, WU Yonghong. Positive solutions of nonlinear singular two-point boundary value problems for second-order impulsive differential equations[J]. Appl Math Comput, 2008, 196: 550-562.

[21] JANKOWSKI T. Positive solutions for second order impulsive differential equations involving stieltjes integral conditions[J]. Nonlinear Anal,2011,74:3 775-3 785.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net