第 33 卷第 5 期　　河北科技大学学报　　Vol. 33, No. 5
2012 年 10 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Oct. 2012

文章编号：1008-1542(2012)05-0381-03

非线性离散周期边值问题的可解性

董士杰

(军械工程学院基础部，河北石家庄　050003)

摘　要：在非线性项 $f(u)$ 在原点满足渐近线性增长、无穷远处满足超线性或次线性增长条件下，研究了二阶非线性离散周期边值问题的可解性解。应用 Robinowitz 全局分歧定理，给出了边值问题正解全局行为的完整描述，并确定了参数的最佳区间。

关键词：周期边值问题；分歧；Green 函数；解

中图分类号：O175.8　　**MSC(2010)主题分类**：34B05　　**文献标志码**：A

Solvability for nonliner discrete periodic boundary value problems

DONG Shi-jie

(Department of Basic Courses, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang Hebei 050003, China)

Abstract: Under the condition that nonlinearity $f(u)$ satisfies asymptotically linear growth at the origin and sublinear growth or suplinear growth at the infinity, the solvabitity for nonliner discrete periodic boundary value problems are discussed. By using Robinowitz global bifurcation theorem, a complete description of the global behavior of positive solution for the boundary value problem is given, and the optimal interval of a positive parameter is determined.

Key words: periodic boundary value problem; bifurcation; Green's function; solution

常微分方程边值问题起源于各种不同的应用数学和物理领域。许多作者应用不动点定理、度理论、临界点理论研究了非线性边值问题[1-8]。MA Ru-yun 等在非线性项 $f(u)$ 在原点和无穷远处满足渐近线性增长条件下，研究了二阶非线性离散周期边值问题

$$\begin{cases} -\Delta[p(t-1)\Delta u(t-1)]+q(t)u(t)=rg(t)f(u(t)), & t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}, \\ u(0)=u(T), \quad p(0)\Delta u(0)=p(T)\Delta u(T) \end{cases} \tag{1}$$

的正解的存在性[8]。其中：$\mathbf{Z}$ 是整数集，$T\in\mathbf{Z}$ 且 $T>2$，$[1,T]_{\mathbf{Z}}=\{1,2,\cdots,T\}$，$r$ 是一个正参数。笔者在非线性项 $f(u)$ 在原点满足渐近线性增长、无穷远处满足超线性或次线性增长条件下，研究了二阶非线性离散周期边值问题(1)解的全局结构。

笔者做如下假设：

H_1) $p,g:\mathbf{Z}\to(0,\infty)$，$q:\mathbf{Z}\to[0,\infty)$，均为 T-周期，且 $q(\cdot)$ 不恒等于 0；

H_2) $f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 且 $sf(s)>0$，$s\neq0$；

H_3) $f_0=\lim\limits_{|s|\to0}\dfrac{f(s)}{s}\in(0,\infty)$，$f_\infty=\lim\limits_{|s|\to\infty}\dfrac{f(s)}{s}$。

收稿日期：2012-03-16；修回日期：2012-09-01；责任编辑：张　军

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071053)；河北省自然科学基金资助项目(A2009001426)

作者简介：董士杰(1970-)，男，河北深县人，讲师，硕士，主要从事应用微分方程方面的研究。

1 预备知识

设$\{\varphi_t\}_{t=0}^{T+1}$和$\{\Psi_t\}_{t=0}^{T+1}$分别是齐次方程$-\Delta[p(t-1)\Delta u(t-1)]+q(t)u(t)=0,t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}$在初始条件$\varphi(0)=\varphi(1)=1$与$\psi(0)=0,p(0)\psi(1)=1$下的解。

令$D=\varphi(T)+p(T)\Delta\psi(T)-2$。

引理1[9] 如果条件H_1)成立,则$D>0$。

引理2[9] 设条件H_1)成立,则边值问题

$$\begin{cases}-\Delta[p(t-1)\Delta u(t-1)]+q(t)u(t)=h(t), & t\in[1,T]_{\mathbf{Z}},\\ u(0)=u(T), \quad p(0)\Delta u(0)=p(T)\Delta u(T)\end{cases} \tag{2}$$

的解可表示为$u(t)=\sum\limits_{s=1}^{T}G(t,s)h(s),t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}$,其中:

$$G(t,s)=\frac{\psi(T)}{D}\varphi(t)\varphi(s)-\frac{p(T)\Delta\varphi(T)}{D}\psi(t)\psi(s)+$$
$$\begin{cases}\dfrac{p(T)\Delta\psi(T)-1}{D}\varphi(t)\psi(s)-\dfrac{\varphi(T)-1}{D}\varphi(s)\psi(t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T+1,\\ \dfrac{p(T)\Delta\psi(T)-1}{D}\varphi(s)\psi(t)-\dfrac{\varphi(T)-1}{D}\varphi(t)\psi(s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T+1。\end{cases}$$

引理3[9] 设条件H_1)成立,则$G(t,s)>0,t,s\in[0,T]_{\mathbf{Z}}$。

记$m=\min\limits_{t,s\in[1,T]_{\mathbf{Z}}}G(t,s),M=\max\limits_{t,s\in[1,T]_{\mathbf{Z}}}G(t,s)$。令$E=\{u:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}\mid u(t)=u(t+T),p(t)\Delta u(t)=p(t+T)\Delta u(t+T),t\in\mathbf{Z}\}$,其范数为$\|u\|=\max\limits_{t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}}|u(t)|$,显然$E$是Banach空间。定义一个锥为$K=\{u\in E\mid u(t)\geqslant 0,t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}$且$\min\limits_{t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}}u(t)\geqslant\frac{m}{M}\|u\|\}$,定义算子$A:K\to E,Au(t)=\sum\limits_{s=1}^{T}G(t,s)g(s)u(s)$,$t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}$。

引理4[8] 设条件H_1)成立,则线性算子$A(K\backslash\{0\})\subseteq\operatorname{int}K$且$A:K\to K$是全连续的。

由引理4和Krein-Rutman定理[10]得到A的第一特征值$\lambda_1=r(A)^{-1}$($r(A)$为A的谱半径)是简单的,相应的特征函数$\varphi_1\in\operatorname{int}K$,且其余特征值没有正特征函数。

2 主要结论

定理1 设条件H_1)—条件H_3)成立,λ_1是线性边值问题

$$\begin{cases}-\Delta[p(t-1)\Delta u(t-1)]+q(t)u(t)=rg(t)u, & t\in[1,T]_{\mathbf{Z}},\\ u(0)=u(T), \quad p(0)\Delta u(0)=p(T)\Delta u(T)\end{cases} \tag{3}$$

的第一特征值。

i)若$f_\infty=0$,则当$r\in(\frac{\lambda_1}{f_0},\infty)$时,边值问题(1)有2个$T$-周期解$u^+$和$u^-$,且$u^+>0,u^-<0,t\in(0,T)$;

ii)若$f_\infty=\infty$,则当$r\in(0,\frac{\lambda_1}{f_0})$时,边值问题(1)有2个$T$-周期解$u^+$和$u^-$,且$u^+>0,u^-<0,t\in(0,T)$。

证明 记$L:E\to E,Lu(t)=-\Delta[p(t-1)\Delta u(t-1)]+q(t)u(t)$。

设$\zeta\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$,使得$f(u)=f_0u+\zeta(u)$。显然,$\lim\limits_{|u|\to 0}\frac{\zeta(u)}{u}=0$。

考虑辅助问题:

$$Lu(t)-\lambda g(t)rf_0u=\lambda g(t)r\zeta(u) \tag{4}$$

从平凡解$u\equiv 0$产生的分歧。方程(4)等价于$u(t)=\lambda L^{-1}[g(\cdot)rf_0u(\cdot)](t)+\lambda L^{-1}[g(\cdot)r\zeta(u(\cdot))](t)$。注意到在$E$中$u=0$附近,有

$$\|L^{-1}[g(\cdot)r\zeta(u(\cdot))]\|=\max_{t\in[1,T]}\left|\sum_{s=1}^{T}G(t,s)g(s)\zeta(u(s))\right|=c\max_{s\in[1,T]}|g(s)|\cdot\|\zeta(u)\|,$$

因此当$\|u\|\to 0$时,$\|L^{-1}[g(\cdot)r\zeta(u(\cdot))]\|=\mathrm{o}(\|u\|)$。

记$X=\mathbf{R}\times E,S^+$是E中所有正函数构成的集合,$S^-=-S^+,S=S^+\cup S^-$,则S^+,S^-是E中互不相交

的开集。令 $\Phi^{\pm}=\mathbf{R}\times S^{\pm}$，$\Phi=\mathbf{R}\times S$。因此，对于方程(4)，由 Rabinowitz 全局分歧定理可知：对任意 $\nu\in\{+,-\}$，从 $(\frac{\lambda_1}{rf_0},0)$ 能分歧出问题(4)的解无界连通分支 C^ν，且 $C^\nu\backslash\{(\frac{\lambda_1}{rf_0},0)\}\in\Phi^\nu$。

设 $\{(\mu_n,u_n)\}\subset C^\nu$ 满足 $\mu_n+\|u_n\|\to\infty$，由于对 $\lambda=0$，方程(4)仅有零解 $u\equiv 0$，故对任意 $n\in\mathbf{N}$，$\mu_n>0$。显然，方程(4)形如 $(1,u)$ 的任意一个解均产生方程(1)的一个解 u。

下面证明 C^ν 在 $\mathbf{R}\times E$ 中穿过超平面 $\{1\}\times E$。

Ⅰ) $f_\infty=0$。此时只需证 $[\frac{\lambda_1}{rf_0},\infty)\subset \mathrm{Proj}_{\mathbf{R}}C^\nu$。

反设 $\mathrm{Sup}\{\lambda\mid(\lambda,u)\in C^\nu\}=:c_0<\infty$，则存在 $\{(\mu_n,u_n)\}\subset C^\nu$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|=\infty$，$|\mu_n|\leqslant c_0$，又由 S^+ 的定义及 $\min\limits_{t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}}u_n(t)\geqslant\frac{m}{M}\|u_n\|$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(t)|=\infty$。由 $(\mu_n,u_n)\in C^\nu$，得

$$\begin{cases}Lu_n(t)=\mu_n rg(t)f(u_n(t)), & t\in[1,T]_{\mathbf{Z}},\\ u_n(0)=u_n(T), & p(0)\Delta u_n(0)=p(T)\Delta u_n(T)。\end{cases}\tag{5}$$

设 $v_n(t)=\frac{u_n(t)}{\|u_n\|}$，则 $\|v_n\|=1$。

$$\begin{cases}Lv_n(t)=\mu_n rg(t)\dfrac{f(u_n(t))}{u_n(t)}v_n(t), & t\in[1,T]_{\mathbf{Z}},\\ v_n(0)=v_n(T), & p(0)\Delta v_n(0)=p(T)\Delta v_n(T),\end{cases}\tag{6}$$

于是存在 $(\mu_*,v_*)\in[0,c_0]\times E$ 且 $\|v_*\|=1$，使得在 $\mathbf{R}\times E$ 中，存在 $\{(\mu_n,v_n)\}$ 的收敛子列，不妨仍记为 $\{(\mu_n,v_n)\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_n,v_n)=(\mu_*,v_*)$。注意到方程(6)等价于

$$v(t)=\mu_n r\sum_{s=1}^{T}G(t,s)g(s)\frac{f(u_n(s))}{u_n(s)}v(s),\quad t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(t)|=\infty$，$f_\infty=0$，应用 Lebesgue 控制收敛定理得：$v_*(t)=\mu_* r\sum\limits_{s=1}^{T}G(t,s)g(s)v(s)=0$，$t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}$，这与 $\|v_*\|=1$ 矛盾。因此 $\mathrm{Sup}\{\lambda\mid(\lambda,u)\in C^\nu\}=\infty$，即 $[\frac{\lambda_1}{rf_0},\infty)\subset\mathrm{Proj}_{\mathbf{R}}C^\nu$。

Ⅱ) $f_\infty=\infty$。此时只需证明 C^ν 连接 $(\frac{\lambda_1}{rf_0},0)$ 和 $(0,\infty)$。

设 $\{(\mu_n,u_n)\}\subset C^\nu$ 满足 $\mu_n+\|u_n\|\to\infty(n\to\infty)$，则方程(5)成立。如果 $\{\|u_n\|\}$ 有界，即存在不依赖 n 的常数 $M_1>0$，使得对于任意 n，$\|u_n\|\leqslant M_1$，于是可设 $\mu_n\to\infty(n\to\infty)$。再结合 $\frac{f(u_n(t))}{u_n(t)}\geqslant \inf\{\frac{f(s)}{s}\mid 0<|s|<M_1\}>0$，有对任意的 $t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n r\frac{f(u_n(t))}{u_n(t)}=\infty$，再由方程(5)以及线性边值问题(3)有一列递增趋于无穷的特征值，且 φ_1 是仅有的正特征函数。于是对充分大的 n，u_n 在 $[1,T]_{\mathbf{Z}}$ 上必定要改变符号，这与 $u_n\in S^\nu$ 矛盾。因此 $\{\|u_n\|\}$ 是无界的。

现在设 $\{(\mu_n,u_n)\}\subset C^\nu$ 满足 $\|u_n\|\to\infty(n\to\infty)$，下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=0$。

证明 μ_n 有界，即存在不依赖 n 的常数 $M_2>0$，使得对于任意 n，$\|\mu_n\|\leqslant M_2$。事实上，由 $\{(\mu_n,u_n)\}\subset C^\nu$，故方程(5)成立，方程(5)的第 1 个方程两边同时乘以 $\frac{\varphi_1}{u_n}$，再从 1 到 T 求和得 $\lambda_1\sum\limits_{t=1}^{T}g(t)\varphi_1(s)=\mu_n r\sum\limits_{t=1}^{T}g(t)\cdot\frac{f(u_n(t))}{u_n(t)}\varphi_1(s)$。再由条件 H_1) 与条件 H_3) 和 $f_\infty=\infty$ 可知：存在常数 $M_3>0$ 使得 $\frac{f(u)}{u}\geqslant M_3$，于是 $\lambda_1\sum\limits_{t=1}^{T}g(t)\varphi_1(s)\geqslant\mu_n rM_3\sum\limits_{t=1}^{T}g(t)\varphi_1(s)$，再由条件 H_1) 及 φ_1 的正性，有 $\mu_n\leqslant M_2$，其中 $M_2=\frac{\lambda_1}{rM_3}$。

现在反设存在 $\{\mu_n\}$ 的一个子列，不妨仍设为 $\{\mu_n\}$ 使得对某个常数 a_1，有 $\mu_n\geqslant a_1$。由 $f_\infty=\infty$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(t)|=\infty$ 可知，对任意的 $t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n r\frac{f(u_n(t))}{u_n(t)}=\infty$。再由方程(5)以及线性边值问题(3)有一列递增趋于无穷的特征值，且 φ_1 是仅有的正特征函数。于是对充分大的 n，u_n 在 $[1,T]_{\mathbf{Z}}$ 上必定要改变符号，这与 $u_n\in S^\nu$ 矛盾。因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=0$。 (下转第 458 页)

2 000 s 开始凝固至 9 000 s 凝固完成，整个相变过程持续约 117 min。整个 PCM 区熔化之后，周围的冷空气与筒壁面继续对流换热，冷量继续向里传递，进行固体传热过程，直到整个区域温度与冷空气温度一样。

5 结 语

运用 FLUENT 前处理软件 GAMBIT 建立了圆筒内充装铝硅合金的模型并划分网格，介绍了运用 FLUENT 凝固/熔化模型求解对流热边界条件下相变问题的数学模型和参数设置情况。利用 FLUENT 的监视器功能和强大的后处理功能得到了蓄热器内不同时刻相变材料的温度场分布及液相率随时间的变化曲线及云图，并对结果进行了分析，掌握了其传热规律，为铝硅合金在太阳能高温热利用系统中的实际应用提供了依据。

参考文献：

[1] 朱教群，李圆圆，周卫兵，等．太阳能热发电储热材料研究进展[J]．太阳能(Solar Energy)，2009(6)：29-32.

[2] 刘 靖，王 馨，曾大本，等．高温相变材料 Al-Si 合金选择及其与金属容器相容性实验研究[J]．太阳能学报(Acta Energiae Solaris Sinica)，2006，27(1)：36-40.

[3] 张仁元，孙建强，柯秀芳，等． Al-Si 合金的储热性能[J]．材料研究学报(Chinese Journal of Materials Research)，2006，20(2)：156-160.

[4] 陈观生，王波群，张仁元，等．金属相变储热材料铝硅合金储热特性研究[J]．材料研究与应用(Materials Research and Application)，2012，4(4)：255-259.

[5] 崔海亭，刘凤青，朱金达，等．高孔隙率泡沫金属对相变蓄热的强化研究[J]．河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology)，2010，31(2)：93-96.

[6] 郭茶秀，熊辉东，魏新利．蓄冷球凝固的 FLUENT 数值模拟研究[J]．低温与特气(Low Temperature and Specialty Gases)，2006，24(2)：13-16.

[7] 王瑞金，张 凯，王 刚． FLUENT 技术基础与应用实例[M]．北京：清华大学出版社，2007.

[8] 韩占忠，王 敬，兰小平． FLUENT 流体工程仿真计算实例与应用[M]．北京：北京理工大学出版社，2004.

[9] 张林琳，王德武，刘 燕，等．汽液固三相流化床蒸发器传热余数的计算[J]．河北工业大学学报(Journal of Hebei University of Technology)，2011，40(1)：41-45.

[10] 陈灿坤，柳忠元，向建勇，等．机械合金化制备碳化钛纳米粉体的合成机理研究[J]．燕山大学学报(Journal of Yanshan University)，2012，36(2)：136-140.

[11] 崔海亭，郭彦书，王振辉，等．太阳能热动力发电系统中高温热管式吸热/蓄热器技术研究[J]．河北工业科技(Hebei Journal of Industrial Science and Technology)，2005，22(5)：249-251.

[12] 曹向茹，崔海亭，蒋静智．泡沫金属相变材料凝固传热过程的数值分析[J]．河北工业科技(Hebei Journal of Industrial Science and Technology)，2011，28(1)：1-4.

(上接第 383 页)

参考文献：

[1] WANG Hai-yan. Positive periodic solutions for functional differential equations[J]. J Differential Equations, 2004, 202(26)：615-627.

[2] CHU J, TORRES P J, ZHANG M. Periodic solutions of second order non-autonomous singular dynamical systems[J]. J Differential Equations, 2007, 239(1)：196-212.

[3] YU J, GUO E. Multiplicity results for periodic solutions to delay differential equations via critical point theory[J]. J Differential Equations, 2005, 218(1)：15-35.

[4] DONG Shi-jie, GE Wei-gao. Positive solutions for quasilinear second order differential equation[J]. Applicable Analysis, 2005，84(12)：1 221-1 229.

[5] 董士杰，周长杰．带 p-Laplacian 算子时滞微分方程多点边值问题的正解[J]．河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology)，2010，31(5)：385-389.

[6] 索秀云，郭少聪，张继叶，等．四阶非局部边值问题方程组正解的存在性[J]．河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology)，2012，33(3)：197-201.

[7] 杨 飞，刘玉敬，郭彦平．含有一阶导数的非局部四阶边值问题正解的存在性[J]．河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology)，2012，33(4)：283-289.

[8] MA Ru-yun, MA Hui-li. Positive solutions of nonlinear discrete periodic boundary value problems[J]. Comput Math Appl, 2010，59(1)：136-141.

[9] ATICI F M, GUSEINOV G S. Positive periodic solutions for nonlinear difference equations with periodic coefficients[J]. J Math Anal Appl, 1999，232：166-182.

[10] RABINOWITZ P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems[J]. J Funct Anal, 1971，7：487-513.