

文章编号: 1008-1542(2012)04-0296-04

不可压完全 Ericksen-Leslie 系统的局部适定性

朱晓霞

(河北科技大学理学院, 河北石家庄 050018)

摘要: 考察描述向列型液晶的完全 Ericksen-Leslie 系统的适定性, 利用 Tychonoff 不动点定理给出了初值在一定正则条件下的不可压液晶方程组局部强解的存在性和唯一性。

关键词: 液晶; Tychonoff 不动点定理; 不可压; 局部强解; 存在性和唯一性

中图分类号: O635 MSC(2010)主题分类: 46A16 文献标志码: A

Local well-posed problem of incompressible complete Ericksen-Leslie system

ZHU Xiao-xia

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: The well-posed problem of the full Ericksen-Leslie system for nematic liquid crystal is analyzed, and the existence and uniqueness of the local strong solutions to the incompressible liquid crystal equations is obtained by using fixed point theorem when the initial values fit the regular conditions.

Key words: liquid crystal; Tychonoff's fixed point theorem; incompressible; local strong solution; existence and uniqueness

液晶研究始于 1888 年, 奥地利科学家莱尼茨尔合成了一种奇怪的有机化合物, 它有 2 个熔点。把它的固态晶体加热到 145 °C 时, 便熔成液体, 只不过是浑浊的, 而一切纯净物质熔化时却是透明的。如果继续加热到 175 °C 时, 它似乎再次熔化, 变成清澈透明的液体。后来, 德国物理学家列曼把处于“中间地带”的浑浊液体叫作液晶。液晶的定义, 现在已放宽而囊括了在某一温度范围可以是液晶相, 在较低温度为正常结晶的物质, 液晶既像晶体一样具有特殊光学性质, 对电磁场敏感, 又具有液体的流动性, 其内部分子指向具有一定的规律, 极有实用价值。自从液晶理论发展起来以后, 大量关于液晶特性的理论和实验性的结果涌现出来, 但是大部分都是关于液晶材料在电磁场作用下的效应, Ericksen-Leslie 理论非常好地预言了一些性质。Ericksen-Leslie 系统耦合了 Navier-Stokes 方程和 Ginzburg-Landau 方程, 用来描述向列型液晶的速度场和分子方向场。笔者在有界光滑区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 中考虑具有变分结构的液晶系统^[1-3]。

$$u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = \mu \Delta u - \lambda \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d + (\Delta d - f(d)) \otimes d), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (2)$$

$$d_t + u \cdot \nabla d - d \cdot \nabla u = \gamma (\Delta d - f(d)). \quad (3)$$

式中 $u(t, x) \in \mathbf{R}^3$ 表示流体速度; $d(t, x) \in \mathbf{R}^3$ 表示液晶分子的方向场; 函数 $p(t, x)$ 是压强; μ, λ, γ 分别为运动黏度、动势比率和弹性松弛系数; 它们都是正常数, $\nabla d \odot \nabla d$ 是一个 3×3 矩阵, 其 (i, j) 项是 $\partial \lambda_{x_i} d \cdot \partial x_j d, 1 \leq i, j \leq 3$, 易知 $\nabla d \odot \nabla d = (\nabla d)^T \nabla d$, 其中, $(\nabla d)^T$ 表示矩阵 ∇d 的转置。 \otimes 表示通常的 Kronecker 乘

收稿日期: 2012-04-06; 责任编辑: 张 军

基金项目: 国家科技支撑计划资助项目(2012BAH20B03)

作者简介: 朱晓霞(1980-), 女, 河北邢台人, 讲师, 硕士, 主要从事模糊决策、系统规划方面的研究。

积, 即 $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j, a \in \mathbf{R}^3, b \in \mathbf{R}^3$.

$f(d) = \frac{1}{\epsilon^2}(|d|^2 - 1)d$ 是 Ginzburg-Landau 函数, $F(d) = \frac{1}{4\epsilon^2}(|d|^2 - 1)^2$ 是 $f(d)$ 的原函数, 即 $f(d) = \nabla d F(d)$.

Ericksen-Leslie 系统描述了液晶速度场和液晶分子方向场的宏观连续发展. 特别的, u 系统中存在依赖 d 的外力项; d -系统的左端表示流的运动输运项, 右端表示由弹性能量引起的内部松弛项. 很多情形下, 速度场干扰分子的指向, 反过来, 分子指向的改变将诱导速度场.

为了求得方程组(0,1)的定解, 未知函数 u, d 还应满足边界条件和初始条件

$$u(t, x) = 0, d(t, x) = d_0(x), |d_0(x)| = 1, (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega, \tag{4}$$

$$u(0, x) = u_0(x), d(t, x) = d_0(x), x \in \Omega. \tag{5}$$

在上述初值条件下, 形式上推导系统满足的能量方程: 将式(1)两边点乘 u , 再在 Ω 上积分; 式(3)两边点乘 $\Delta d - f(d)$, 再在 Ω 上积分, 最后将两式相加得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|u|^2 + \lambda |\nabla d|^2 + 2\lambda |F(d)|) dx + \int_{\Omega} (\mu |\nabla u|^2 + \lambda \gamma |\nabla d - f(d)|^2) dx = 0. \tag{6}$$

易见 d 的正则性条件比 u 的高, 这就要求对 d 进行更高的正则性估计, 以使高阶项有意义.

与文献[4]相比, 式(3)中多了输运项 $d \cdot \nabla u$, 与之对应方程(1)中多出应力项 $(\nabla d - f) \otimes d, d \cdot \nabla u$ 表示水平运输, 包含液晶分子方向场的旋转和拉伸, 它的出现破坏了 d -方程关于 d 可以应用最值原理 ($|d(t, x)| \leq 1$) 的结构.

令

$$X = \{u \in L^2(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot u = 0 \text{ 并且 } u \cdot n \mid \partial\Omega = 0\}.$$

我们知道, 对 \mathbf{R}^3 中的 C^1 有界区域, 向量 $f \in L^2(\Omega)^3$ 具有 Helmholtz 分解[5]: 存在唯一的 (f_0, g) , 使得 $f = f_0 + \nabla g, f_0 \in X, g \in L^2_{loc}(\Omega), \nabla g \in L^2(\Omega)^3$ 且 $\int_{\Omega} g dx = 0$, 从而记 $P: f \rightarrow f_0$ 是从空间 $L^2(\Omega)^3$ 到空间 X 的投射映照, 进一步定义 Stokes 算子

$$A = -P\Delta, \quad D(A) = H^2(\Omega)^3 \cap H^1_0(\Omega)^3 \cap X.$$

引进相容性向量函数空间:

$$V = \{u \in H^2(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot u = 0, u \mid_{\partial\Omega} = 0\}.$$

1 主要结论

关于不可压液晶系统式(1) — 式(3), 有如下局部适定性结果.

定理 设 $u_0 \in V, d_0 \in H^3(\Omega)^3$. 则存在 $T > 0$, 式(1) — 式(3) 存在唯一的强解 (u, d) , 且满足条件 $u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; V), d \in L^2(0, T; H^3(\Omega)^3) \cap C((0, T]; H^3(\Omega)^3)$. 另外, $((u(t, \cdot), d(t, \cdot))) \times H^3(\Omega)^3$ 连续依赖于初值.

2 定理的证明

首先构造合适的函数空间来研究不可压液晶系统式(1) — 式(3) 的适定性.

定义 给定时间 T , 定义如下 Hilbert 空间: $X_T = \{(u, d) \in L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; H^3(\Omega)^3) \mid (u_t, d_t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3) \times L^2(0, T; H^1(\Omega)^3)\}$,

引入自然内积:

$$((u_1, d_1), (u_2, d_2)) = \int_0^T \{(u_1, u_2)_{H^2} + (d_1, d_2)_{H^3} + (u_{1t}, u_{2t})_{L^2} + (d_{1t}, d_{2t})_{H^1}\},$$

$$(u_1, d_1), (u_2, d_2) \in X_T.$$

设 C_T 是 X_T 中满足以下 2 个条件的向量函数对 (u, d) 构成的集合:

1) $(u(0, \cdot), d(0, \cdot)) = (u_0, d_0)$;

2) 对任意 $t \in [0, T]$, 满足

$$\mu \int_0^t \|Au(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds + \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq c_1, \quad \int_0^t \|u_s(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds \leq c_2 t^{\frac{1}{4}}, \quad \|\nabla d(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq c_3,$$

$$\gamma \int_0^t \|\nabla \mathbf{d}_s(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds + \frac{1}{2} \|d_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq c_4, \quad \int_0^t \|\nabla \Delta d(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds \leq c_5, \quad \|\Delta d(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq c_6,$$

这里 $c_i > 0 (i = 1, 2, \dots, 6)$, 仅依赖 $\|u_0\|_{H^1}$ 和 $\|d_0\|_{H^2}$ 及液晶方程的系数。易知 C_T 是空间 X_T 的一个有界非空闭凸集^[6]。利用线性抛物方程正则性理论^[7], 给定 $(u, d) \in C_T$, 定义映射 $F: C_T \rightarrow X_T$, 使得 (\tilde{u}, \tilde{d}) 是线性方程组

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + \mu A \tilde{u} = -Pu \cdot \nabla \mathbf{u} - \lambda P \nabla \cdot (\nabla \mathbf{d} \odot \nabla \mathbf{d} + (\Delta d - f(d)) \otimes d), \\ \nabla \cdot \tilde{u} = 0, \\ \tilde{d}_t - \gamma \Delta \tilde{d} = -u \cdot \nabla \mathbf{d} + d \cdot \nabla \mathbf{u} - f(d), \\ \tilde{u}(t, x) = 0, \tilde{d}(t, x) = d_0(x), |d_0(x)| = 1, (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ \tilde{u}(0, x) = u_0(x), \tilde{d}(t, x) = d_0(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (7)$$

的唯一解。

引理 1 F 是从 C_T 到 X_T 的弱连续映射。

证明 根据连续定义来证明。设序列 $(u_k, d_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_T$ 弱收敛于 (u, d) 。由紧性理论知, 对 $F(u_k, d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ 的任意子列 $F(u_{k_j}, d_{k_j})_{k_j \in \mathbb{N}}$ 可以抽出子列 $F(u_{k'_j}, d_{k'_j})_{k'_j \in \mathbb{N}}$ 在 X_T 中弱收敛于式(7)的对应于 C_T 中 (u, d) 的解。从而, $F(u_k, d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ 在 X_T 中弱收敛于 $F(u, d)$ 。

引理 2 存在 $T > 0$ (依赖于 $\|u_0\|_{H^2}$ 和 $\|d_0\|_{H^3}$), 使得 F 是 C_T 到其自身的一个映射。

证明 只需要验证 (\tilde{u}, \tilde{d}) 满足条件 2 中的 6 个不等式。这里只验证第 4 个不等式, 其他不等式的验证参见文献[3]与文献[6]。

将 $\tilde{d}_t - \gamma \Delta \tilde{d} = -u \cdot \nabla \mathbf{d} + d \cdot \nabla \mathbf{u} - f(d)$ 关于时间 t 求导, 方程两边乘以 \tilde{d}_t 然后再在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\tilde{d}_t|^2 dx + \gamma \int_{\Omega} |\nabla \tilde{d}_t|^2 dx \leq \\ & C (\|u_t\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^6} \|\tilde{d}_t\|_{L^3} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{d}_t\|_{L^2} \|\tilde{d}_t\|_{L^3} + \|d_t\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^6} \|\tilde{d}_t\|_{L^3} + \\ & \|d\|_{L^\infty} \|u_t\|_{L^2} \|\nabla \tilde{d}_t\|_{L^2} + \|d\|_{L^\infty}^2 \|d_t\|_{L^2} \|\tilde{d}_t\|_{L^2}) = \sum_{i=1}^5 I_i, \end{aligned}$$

这里用到了 $f'(d) = O(|d|^2)$ 以及 $\tilde{d}_t|_{\partial\Omega} = 0, \int_{\Omega} \tilde{d}_t \cdot \Delta \tilde{d} dx = - \int_{\Omega} |\nabla \tilde{d}_t|^2 dx$ 。

下面逐项估计 $I_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 。

$$\begin{aligned} I_1 & \leq C \|u_t\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{d}\|_{H^1} \|\tilde{d}_t\|_{L^{\frac{3}{2}}} \|\nabla \tilde{d}_t\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq \\ & C \|u_t\|_{L^2}^2 + C \|\tilde{d}_t\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{5} \|\nabla \tilde{d}_t\|_{L^2}^2, \\ I_2 & \leq C \|\nabla \mathbf{d}_t\|_{L^2} \|\tilde{d}_t\|_{L^{\frac{3}{2}}} \|\nabla \tilde{d}_t\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq \\ & C \|\nabla \mathbf{d}_t\|_{L^2}^2 + C \|\tilde{d}_t\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{5} \|\nabla \tilde{d}_t\|_{L^2}^2, \\ I_3 & \leq C \|d_t\|_{L^2} \|Au\|_{L^2} \|\tilde{d}_t\|_{L^{\frac{3}{2}}} \|\nabla \tilde{d}_t\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq \\ & C \|Au\|_{L^2}^2 + C \|\tilde{d}_t\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{5} \|\nabla \tilde{d}_t\|_{L^2}^2, \\ I_4 & \leq C \|d\|_{H^2}^2 \|u_t\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{5} \|\nabla \tilde{d}_t\|_{L^2}^2, \\ I_5 & \leq C \|d\|_{H^2}^2 + \|\tilde{d}_t\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

因为

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |d|^2 dx \leq \int_{\Omega} |d|^2 dx + \int_{\Omega} |d_t|^2 dx \leq \int_{\Omega} |d|^2 dx + c_4,$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|d(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq e^t (\|d_0\|_{L^2}^2 + c_4 t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

如果 $T \leq 1$, 可以放宽上式右边项, 不依赖 T 。又因为 $\|\nabla \mathbf{d}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq c_3, \|\Delta d(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq c_6$, 从而 $\|d\|_{H^2} \leq C$ (与 T 有关)。

将以上估计带入式(8)中得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\tilde{d}_t|^2 dx + \gamma \int_{\Omega} |\nabla \tilde{d}_t|^2 dx \leq$$

$$C \|\tilde{d}_t\|_{L^2}^2 + C(\|u_t\|_{L^2}^2 + \|Au\|_{L^2}^2 + \|\nabla d_t\|_{L^2}^2 + 1).$$

因为

$$\|u_t\|_{L^2}^2 + \|Au\|_{L^2}^2 + \|\nabla d_t\|_{L^2}^2 \in L^1(0, t),$$

再次利用 Gronwall 不等式得

$$\gamma \int_0^t \|\nabla d_s(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds + \frac{1}{2} \|d_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq c_4 (\text{选取合适的 } T).$$

证明 由引理 1 和引理 2, 利用 Tychonoff 不动点定理^[8]知映射 F 在 C_T 中至少存在 1 个不动点。解的正则性由抛物型方程正则性理论立得。结合由 u -方程推导的微分不等式和 d -方程推导的微分不等式再应用 Gronwall 不定式即得解的唯一性^[4], 由 C_T 中元素的正则性及上界估计和 T (均依赖于初值在 $V \times H^3(\Omega)^3$ 中的模), 结合紧性理论和抛物型方程的收敛结果可知解对初值具有连续依赖性。证毕。

参考文献:

- [1] de GENNES R G. The Physics of Liquid Crystals[M]. New York: Oxford University Press, 1974.
- [2] ERICKSEN J. Conservation laws for liquid crystals[J]. Trans Soc Rhed, 1961(5): 22-34.
- [3] SUN H, LIU C. On energetic variational approaches in modeling the nematic liquid crystal flows[J]. Discrete and Continuous Dynamical System, 2009, 23: 455-475.
- [4] LIN F H, LIU C. Nonparabolic dissipative systems modeling the flow of liquid crystals[J]. Comm Pure Appl Math, 1995, 33: 501-537.
- [5] SIMADE C, SOHR H. A New Approach to the Helmholtz Decomposition and the Neumann problem in L^q spaces for bounded and exterior domains[A]. Mathematical Problems Relating to the Navier-Stokes Equation[C]. [S. l.]: World Sci, 1992. 379-406.
- [6] COUTAND D, SHKOLLER S. Well-posedness of the full Ericksen-Leslie model of nematic liquid crystals[J]. Comptes Rendus de l'Academie des Science Series I-Mathematics, 2001, 333: 919-924.
- [7] TEMAM R. Infinite-dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [8] DEIMLING K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag Press, 1985.

(上接第 295 页)

若 $u^*, v^* \in [x_0, y_0], A(u^*, u^*) = u^*, A(v^*, v^*) = v^*, B(u^*, u^*) = u^*, B(v^*, v^*) = v^*$, 令

$a_0 = \sup \left\{ a > 0 \mid av^* \leq u^* \leq \frac{1}{a}v^* \right\}$, 显然 $0 < a_0 \leq 1$, 下证 $a_0 = 1$ 。事实上, 若 $0 < a_0 < 1$, 一方面, $u^* =$

$A(u^*, u^*) \geq A\left(\frac{1}{a_0}v^*, a_0v^*\right) \geq a_0^{a_0} A(v^*, v^*) = a_0^{a_0} v^*$; 另一方面, $v^* = B(v^*, v^*) \geq B\left(\frac{1}{a_0}u^*, a_0u^*\right) \geq a_0^{a_0} A(u^*, u^*) = a_0^{a_0} u^*$, 但 $0 < a_0 < 1$, 所以与 a_0 的定义矛盾, 于是 $u^* = v^*$ 。最后当 $\forall u_0, v_0 \in [x_0, y_0]$, 令 $u_n = B(u_{n-1}, v_{n-1}), v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}), n = 1, 2, 3, \dots$, 易知 $x_n \leq u_n \leq y_n, x_n \leq v_n \leq y_n$, 由 P 的正规性有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u^*$ 。证毕。

注: 若定理 1 中 A, B 为广义 α - t 型凹凸反向混合单调算子, 结论仍然成立。证法参照定理 1 的证明。

参考文献:

- [1] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM D V. Coupled fixed points of nonlinear operators with application[J]. Nonlinear Anal, 1987, 11: 623-632.
- [2] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用[J]. 数学学报 (Acta Mathematica Sinica), 1998, 41(6): 1 121-1 126.
- [3] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 第 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2000.
- [4] 康平. 关于两个非线性单调二元算子的公共不动点定理及其应用[J]. 曲阜师范大学学报 (Journal of Qufu Normal University), 2006, 32(2): 19-24.
- [5] 徐华伟. 一类反向混合单调算子方程组解的存在唯一性[J]. 华东交通大学学报 (Journal of East China Jiaotong University), 2003, 20(5): 118-120.
- [6] 张玲玲. 混合单调算子及其应用的若干讨论[D]. 郑州: 郑州大学, 2003.
- [7] 张石生, 王凡, 袁家玮. Banach 空间中具混合单调算子方程组解的存在性及其应用[J]. 四川大学学报 (Journal of Sichuan University), 1996, 33(2): 215-218.
- [8] 吴焱生, 李国祯. 混合单调算子的不动点存在唯一性定理及其应用[J]. 数学学报 (Acta Mathematica Sinica), 2003, 46(1): 161-166.