

文章编号: 1008-1542(2012)04-0294-02

一类 αt 型凹凸反向混合单调算子方程组的解

赵彩虹¹, 江卫华²

(1. 石家庄信息工程职业学院, 河北石家庄 050035; 2. 河北科技大学理学院, 河北石家庄 050018)

摘要: 利用锥与半序理论和单调迭代技巧, 在不要求任何连续性和紧性条件下得出一类 αt 型凹凸反向混合单调算子方程组解的存在唯一性定理, 所得结果拓展了混合单调算子方程组的若干结论。

关键词: Banach 空间; 锥; 反向混合单调算子

中图分类号: O121

MSC(2010)主题分类: 46A45

文献标志码: A

Solution of a class of αt type bump reverse mixed monotone operator equations

ZHAO Cai-hong¹, JIANG Wei-hua²

(1. Shijiazhuang Information Engineering Vocational College, Shijiazhuang Hebei 050035, China; 2. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: By using cone and partial ordering theory and the skill of monotone iteration, the existence and uniqueness of the solution to αt type bump reverse mixed monotone operator equations is established, which do not contain any continuity and compactness conditions. The results generalize some known results of mixed monotone operators.

Key words: Banach space; cone; reverse mixed monotone operator

GUO Da-jun 等提出混合单调算子的概念并进行了初步研究^[1], 开创了一个崭新的研究方向; 文献[2]—文献[4]讨论了混合单调算子不动点定理及其应用; 文献[5]讨论了一类反向混合单调算子组的迭代唯一解。文献[6]引入了 αt 型凹凸混合单调算子及广义 αt 型凹凸混合单调算子的概念, 讨论了一类 αt 型凹凸混合单调算子方程组的公共不动点定理, 首次给出这类算子不动点存在唯一性的充分必要条件, 深化了混合单调算子的若干结论^[7-8]。

受到以上文献的启发, 笔者在一般 Banach 空间中, 讨论了一类 αt 型凹凸反向混合单调算子方程组的迭代唯一解, 拓展了混合单调算子方程组的若干结论^[5-8]。

1 预备知识

定义 1 $D \subset E$ 为非空集合, 那么 $A: D \times D \rightarrow E$ 叫作反向混合单调算子, 若

1) 当 y 不变时, $y \in D$, $A(x, y)$ 在 D 上关于 x 是单调递减的, 即 $\forall x_1 < x_2 \in [x_0, y_0]$, 有 $A(x_2, y) \leq A(x_1, y)$, $x_0 \leq y \leq y_0$;

收稿日期: 2012-03-15; 责任编辑: 张 军

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171088)

作者简介: 赵彩虹(1982-), 女, 河北元氏人, 硕士, 主要从事应用数学与计算机技术方面的研究。

通讯作者: 江卫华教授。E-mail: weihuajiang@heburst.edu.cn

2) 当 x 不变时, $x \in D, A(x, y)$ 在 D 上关于 y 是单调递增的, 即 $\forall y_1 < y_2 \in [x_0, y_0]$, 有 $A(x, y_1) \leq A(x, y_2), x_0 \leq y \leq y_0$ 。

定义 2 假设 $A: D \times D$ 为混合单调算子, $\forall 0 < t < 1, \exists 0 < \alpha = \alpha(t) < 1$, 使得: $A(\frac{1}{t}u, tv) \geq t^{\alpha(t)} A(u, v)$, 其中 $u, v \in D$, 且 $u \leq v$, 则称 A 为 αt 型凹凸反向混合单调算子。

定义 3 假设 $A: D \times D$ 为混合单调算子, $\forall 0 < t < 1, \exists 0 < \alpha = \alpha(t) < 1$, 使得: $A(\frac{1}{t}u, tv) \geq t^{\alpha(t, u, v)} A(u, v)$, 其中 $u, v \in D$, 且 $u \leq v$, 则称 A 为广义 αt 型凹凸反向混合单调算子。

2 主要结果

定理 1 设 E 是 Banach 空间, P 是 E 中的正规锥, N 为 P 的正规常数, $A, B: D \times D \rightarrow D$ 均为反向混合单调算子, 且 A, B 为 αt 型凹凸的混合单调算子, $\dot{p} \neq \emptyset, \exists x_0, y_0 \in \dot{p}$ 当满足以下条件时:

$$H_1) \quad y_0 \geq B(x_0, y_0), A(y_0, x_0) \geq x_0;$$

$$H_2) \quad A(y, x) \leq B(x, y), B(y, x) \leq A(y, x), \text{ 当 } x < y \text{ 时成立,}$$

则算子方程组

$$\begin{cases} A(x, x) = x, \\ B(x, x) = x \end{cases} \quad (1)$$

在 $[x_0, y_0]$ 中有唯一公共不动点 u^* , 而且可以迭代求解, $\forall u_0, v_0 \in [x_0, y_0]$ 皆有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u^*$, 其中 $u_n = B(u_{n-1}, v_{n-1}), v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}), n = 1, 2, 3, \dots$ 。

证明 构造迭代序列 $\begin{cases} x_{n+1} = A(y_n, x_n), \\ y_{n+1} = B(x_n, y_n). \end{cases}$

1) 利用数学归纳法证明:

$$x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

首先, 当 $n=1$ 时, 由条件 H_1) 得: $x_0 \leq A(y_0, x_0) = x_1, y_1 = B(x_0, y_0) \leq y_0$ 。由条件 H_2) 得: $x_1 = A(y_0, x_0) \leq B(x_0, y_0) = y_1$, 故 $x_0 \leq x_1 \leq y_1 \leq y_0$, 式(2)成立。假设 $n=k$ 时式(2)成立, 即有 $x_{k-1} \leq x_k \leq y_k \leq y_{k-1}$, 当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设得:

$$\begin{aligned} x_k &= A(y_{k-1}, x_{k-1}) \leq A(y_k, x_{k-1}) \leq A(y_k, x_k) = x_{k+1}, \\ y_k &= B(x_{k-1}, y_{k-1}) \geq B(x_k, y_{k-1}) \geq B(x_k, y_k) = y_{k+1}. \end{aligned}$$

由条件 H_2) 得: $x_{k+1} = A(y_k, x_k) \leq B(x_k, y_k) = y_{k+1}$, 即 $x_k \leq x_{k+1} \leq y_{k+1} \leq y_k$, 故式(2)成立。

2) 证 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 列。

首先任给自然数 $n, \exists \mu > 0$ 使得 $\mu y_n \leq x_n \leq y_n$, 记 $t_n = \sup\{\mu \mid \mu > 0, x_n \geq \mu y_n\}$ 。显然, t_n 满足 $0 < t_n \leq 1$ 且 t_n 单调递增, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t, 0 < t \leq 1$, 可证 $t=1$, 否则由 $0 < t < 1$ 及 $x_n \geq t_n y_n, y_n \leq \frac{1}{t_n} x_n$, 且注意到 $\forall n, t_n \leq t$, 有 $x_{n+1} = A(y_n, x_n) \geq A(t_n^{-1} x_n, t_n y_n) \geq t_n^{\alpha(t_n)} A(x_n, y_n) \geq t_n^{\alpha(t_n)} B(x_n, y_n) \geq t_n^{\alpha(t_n)} y_{n+1}$, 于是, 由 t_{n+1} 的定义, $t_{n+1} \geq t_n^{\alpha(t_n)}$ 两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 有 $t \geq t^{\alpha(t)}$, 出现矛盾, 故 $t=1$ 。

其次, 任给自然数 k , 必有 $0 \leq x_{n+k} - x_n \leq y_n - x_n \leq y_n - t y_n \leq (1-t_n) y_0$, 于是由 P 的正规性, 有 $\|x_{n+p} - x_n\| \leq N(1-t_n) \|y_0\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。同理可证 $\{y_n\}$ 也是 Cauchy 列。

3) 证 A, B 存在公共不动点 $u^* \in [x_0, y_0]$ 。

由 E 完备, 则存在 $x^*, y^* \in E$, 使 $x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow y^*$ 。由 $\{x_n\}$ 单调递增, $\{y_n\}$ 单调递减, $x_n \leq y_n$ 及 P 正规有: $x_n \leq x^* \leq y^* \leq y_n$, 于是 $x^*, y^* \in [x_0, y_0]$ 且 $y^* - x^* \leq y_n - x_n \leq (1-t_n) y_0$, 因此 $\|x^* - y^*\| \rightarrow 0$, 于是 $x^* = y^*$ 统一记为 $x^* = y^* = u^*$, 由 $y_{n+1} = B(x_n, y_n) \geq B(u^*, u^*) = B(x^*, y^*) \geq A(y^*, x^*) = A(u^*, u^*) \geq A(y_n, x_n) = x_{n+1}$, 取极限 $n \rightarrow \infty$, 有 $A(u^*, u^*) = B(u^*, u^*) = u^*$ 。

4) 证明若 A, B 在 p^h 中存在公共不动点时, 则必唯一。

(下转第 299 页)

$$C \|\tilde{d}_t\|_{L^2}^2 + C(\|u_t\|_{L^2}^2 + \|Au\|_{L^2}^2 + \|\nabla d_t\|_{L^2}^2 + 1).$$

因为

$$\|u_t\|_{L^2}^2 + \|Au\|_{L^2}^2 + \|\nabla d_t\|_{L^2}^2 \in L^1(0, t),$$

再次利用 Gronwall 不等式得

$$\gamma \int_0^t \|\nabla d_s(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds + \frac{1}{2} \|d_t(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq c_4 (\text{选取合适的 } T).$$

证明 由引理 1 和引理 2, 利用 Tychonoff 不动点定理^[8]知映射 F 在 C_T 中至少存在 1 个不动点。解的正则性由抛物型方程正则性理论立得。结合由 u -方程推导的微分不等式和 d -方程推导的微分不等式再应用 Gronwall 不定式即得解的唯一性^[4], 由 C_T 中元素的正则性及上界估计和 T (均依赖于初值在 $V \times H^3(\Omega)^3$ 中的模), 结合紧性理论和抛物型方程的收敛结果可知解对初值具有连续依赖性。证毕。

参考文献:

- [1] de GENNES R G. The Physics of Liquid Crystals[M]. New York: Oxford University Press, 1974.
- [2] ERICKSEN J. Conservation laws for liquid crystals[J]. Trans Soc Rhed, 1961(5): 22-34.
- [3] SUN H, LIU C. On energetic variational approaches in modeling the nematic liquid crystal flows[J]. Discrete and Continuous Dynamical System, 2009, 23: 455-475.
- [4] LIN F H, LIU C. Nonparabolic dissipative systems modeling the flow of liquid crystals[J]. Comm Pure Appl Math, 1995, 33: 501-537.
- [5] SIMADE C, SOHR H. A New Approach to the Helmholtz Decomposition and the Neumann problem in L^q spaces for bounded and exterior domains[A]. Mathematical Problems Relating to the Navier-Stokes Equation[C]. [S. l.]: World Sci, 1992. 379-406.
- [6] COUTAND D, SHKOLLER S. Well-posedness of the full Ericksen-Leslie model of nematic liquid crystals[J]. Comptes Rendus de l'Academie des Science Series I-Mathematics, 2001, 333: 919-924.
- [7] TEMAM R. Infinite-dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [8] DEIMLING K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag Press, 1985.

(上接第 295 页)

若 $u^*, v^* \in [x_0, y_0], A(u^*, u^*) = u^*, A(v^*, v^*) = v^*, B(u^*, u^*) = u^*, B(v^*, v^*) = v^*$, 令

$a_0 = \sup \left\{ a > 0 \mid av^* \leq u^* \leq \frac{1}{a}v^* \right\}$, 显然 $0 < a_0 \leq 1$, 下证 $a_0 = 1$ 。事实上, 若 $0 < a_0 < 1$, 一方面, $u^* =$

$A(u^*, u^*) \geq A\left(\frac{1}{a_0}v^*, a_0v^*\right) \geq a_0^{a_0} A(v^*, v^*) = a_0^{a_0} v^*$; 另一方面, $v^* = B(v^*, v^*) \geq B\left(\frac{1}{a_0}u^*, a_0u^*\right) \geq a_0^{a_0} A(u^*, u^*) = a_0^{a_0} u^*$, 但 $0 < a_0 < 1$, 所以与 a_0 的定义矛盾, 于是 $u^* = v^*$ 。最后当 $\forall u_0, v_0 \in [x_0, y_0]$, 令 $u_n = B(u_{n-1}, v_{n-1}), v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}), n = 1, 2, 3, \dots$, 易知 $x_n \leq u_n \leq y_n, x_n \leq v_n \leq y_n$, 由 P 的正规性有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u^*$ 。证毕。

注: 若定理 1 中 A, B 为广义 α - t 型凹凸反向混合单调算子, 结论仍然成立。证法参照定理 1 的证明。

参考文献:

- [1] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM D V. Coupled fixed points of nonlinear operators with application[J]. Nonlinear Anal, 1987, 11: 623-632.
- [2] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用[J]. 数学学报 (Acta Mathematica Sinica), 1998, 41(6): 1 121-1 126.
- [3] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 第 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2000.
- [4] 康 平. 关于两个非线性单调二元算子的公共不动点定理及其应用[J]. 曲阜师范大学学报 (Journal of Qufu Normal University), 2006, 32(2): 19-24.
- [5] 徐华伟. 一类反向混合单调算子方程组解的存在唯一性[J]. 华东交通大学学报 (Journal of East China Jiaotong University), 2003, 20(5): 118-120.
- [6] 张玲玲. 混合单调算子及其应用的若干讨论[D]. 郑州: 郑州大学, 2003.
- [7] 张石生, 王 凡, 袁家玮. Banach 空间中具混合单调算子方程组解的存在性及其应用[J]. 四川大学学报 (Journal of Sichuan University), 1996, 33(2): 215-218.
- [8] 吴焱生, 李国祯. 混合单调算子的不动点存在唯一性定理及其应用[J]. 数学学报 (Acta Mathematica Sinica), 2003, 46(1): 161-166.