

文章编号:1008-1542(2012)04-0290-04

关于欧拉公式在 $(3, 1)^*$ -列表着色中应用的一个注记

李 红¹, 赵永强²

(1. 东北大学秦皇岛分校数学与统计学院, 河北秦皇岛 066004; 2. 石家庄学院数学与信息科学系, 河北石家庄 050035)

摘要: 如果对于图 G 的每个满足 $|L(v)|=k$ (其中 v 为 G 的任意顶点) 的列表分配 L , G 都存在一个 L -着色, 使得 G 的每个顶点至多有 d 个邻居与其自己着有相同的颜色, 则称图 G 是 $(k, d)^*$ -可选的。在只用欧拉公式和图的结构性质研究 2-连通平面图 $(3, 1)^*$ -列表着色的基础上, 研究欧拉公式在平面图的 $(3, 1)^*$ -列表着色中的应用, 证明欧拉公式在研究有割点的平面图的 $(3, 1)^*$ -列表着色时也是有效的。

关键词: 列表非正常着色; $(L, d)^*$ -着色; $(m, d)^*$ -可选的; 欧拉公式

中图分类号: O157.5 MSC(2010)主题分类: 05C15 文献标志码: A

Note on the use of Euler's formula in $(3, 1)^*$ -list coloring

LI Hong¹, ZHAO Yong-qiang²

(1. School of Mathematics and Statistics, Northeast University at Qinhuangdao, Qinhuangdao Hebei 066004, China; 2. Department of Mathematics and Information Science, Shijiazhuang University, Shijiazhuang Hebei 050035, China)

Abstract: A graph G is called $(k, d)^*$ -choosable if, for every list assignment L satisfying $|L(v)|=k$ for all $v \in V(G)$, there is an L -coloring of G such that each vertex of G has at most d neighbors colored with the same color as itself. Zhao and He first studied the $(3, 1)^*$ -list coloring of the 2-connected planar graphs just by using Euler's formula and the graph's structural properties. The paper continues to investigate the use of Euler's formula in $(3, 1)^*$ -list coloring the planar graphs, and shows that Euler's formula is also practicable in dealing with the planar graphs containing cut vertices.

Key words: list improper coloring; $(L, d)^*$ -coloring; $(m, d)^*$ -choosable; Euler's formula

令 $m > 1$ 为一整数, 如果图 G 的顶点在保证每个顶点至多有 d 个邻点与其自己着有相同颜色的条件下, 可用 m 个颜色来着色, 则称图 G 是 $(m, d)^*$ -可着色的。显然, $(m, 0)^*$ -着色就是通常的正常 m -着色。图 G 的列表分配是一个函数 L , 其分配给每个顶点 $v \in V(G)$ 一个颜色列表 $L(v)$ 。图 G 的 $(L, d)^*$ -着色是一个映射 φ , 其分配给每个顶点 $v \in V(G)$ 一个颜色 $\varphi(v) \in L(v)$, 且使得 v 至多有 d 个邻点也着颜色 $\varphi(v)$ 。如果对所有满足 $|L(v)|=m$ (其中 v 为图 G 的任意顶点) 的列表分配 L , G 都存在一个 $(L, d)^*$ -着色, 则称图 G 是 $(m, d)^*$ -可选的。显然, 图的 $(m, 0)^*$ -可选性就是通常的分别由 ERDÖS 等^[1] 和 VIZING^[2] 提出的 m -可选性。

收稿日期: 2011-09-19; 责任编辑: 张 军

基金项目: National Science Council under Grant(NSC95-2816-M-002-014); 河北省教育厅科研资助项目(Z2009140); 石家庄学院科研启动基金资助项目(09ZDA003)

作者简介: 李 红(1968-), 女, 河北昌黎人, 副教授, 主要从事数学方面的教学与研究工作。

只考虑有限单图。对于平面图 G , 笔者分别用 $V(G), E(G), F(G)$ 和 $\delta(G)$ 来表示它的顶点集、边集、面集和最小度。对于 $x \in V(G) \cup F(G)$, 令 $d(x)$ 表示 x 在 G 中的度。 k 度顶点(或面)被称为 k -顶点(或 k -面)。令 $N(u)$ 表示 u 在 G 中的邻域, 称一个平面图的 2 个面是相邻的, 如果它们至少有 1 条公共边, 称顶点 v 和面 f 是关联的, 如果 v 在 f 的边界上。对于 $x \in V(G) \cup F(G)$, 用 $F_k(x)$ 表示所有与 x 关联的 k -面, 用 $V_k(x)$ 表示所有与 x 关联或相邻的 k -顶点。对于 $f \in F(G)$, 记 $f = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, 如果 u_1, u_2, \dots, u_n 是 f 的边界顶点按顺时针方向的排列。一个 3-面 $[u_1, u_2, u_3]$ 被称为是一个 (m_1, m_2, m_3) -面, 如果 $d(u_i) = m_i, i = 1, 2, 3$ 。

列表非正常着色概念分别是由 SKREKOVSKI^[3] 和 EATON 等^[4] 提出的, 自从它的提出, 此类问题已被广泛研究, 详见文献[3]—文献[10]。文献[5]用放电的方法结合欧拉公式证明了每个不含 4-圈和 i -圈的平面图是 $(3, 1)^*$ -可选的, 其中 $i \in \{5, 6, 7\}$, 对于 2-连通图, 文献[10]只用欧拉公式和图的结构性质证明了这些结果以及其他一些结果。在此, 笔者继续研究欧拉公式在平面图的 $(3, 1)^*$ -列表着色中的应用, 证明对于 2-连通平面图 G , 如果 G 既不含 4-圈又不含 k -圈, 并且

$$\sum_{i=5}^{k-1} \max\left\{0, \left\lfloor \frac{3i}{2} \right\rfloor - k + 1\right\} |F_i| - 2|F_5| + 24 \geq 0,$$

则 G 是 $(3, 1)^*$ -可选的, 其中 $k \in \{5, 6, 7, \dots\}$; 如果 G 既不含 2 个相邻的 3-面又不含 2 个相邻的 4-面, 并且任意 3-面不与 4-面相邻, 则 G 是 $(3, 1)^*$ -可选的。与此同时, 笔者证明文献[10]中的一些结果是本文中定理的直接推论。最后证明欧拉公式在研究有割点的平面图的 $(3, 1)^*$ -列表着色时也是有效的。

1 引 理

对于给定平面图 G , 令 V_i 表示 G 的所有 i -顶点的集合, 令 F_i 表示 G 的所有 i -面的集合, 令 V_3^1 表示 G 的所有不与任何 3-面相关联的 3-顶点的集合, 令 $V_3^2 = V \setminus V_3^1$ 。

引理 1^[5] 如果 G 是一个具有最少顶点的非 $(3, 1)^*$ -可选的 2-连通平面图, 则

- 1) $\delta(G) \geq 3$;
- 2) G 不含相邻的 3-顶点;
- 3) G 不含 $(3, 4, 4)$ -面。

引理 2^[10] 如果 G 是一个具有最少顶点的, 不含 2 个相邻 3-面的, 且非 $(3, 1)^*$ -可选的平面图, 则

$$|V_3^2| \leq \frac{1}{2} \sum_{i \geq 5} i |V_i|. \tag{1}$$

引理 3^[10] 如果 G 是一个具有最少顶点的, 不含相邻 3-面的, 且非 $(3, 1)^*$ -可选的 2-连通平面图, 则对于任意 $f \in F(G)$, 有

$$|V_3(f)| + |F_3(f)| \leq d(f). \tag{2}$$

引理 4 令 G 是一个具有最少顶点的且非 $(3, 1)^*$ -可选的 2-连通平面图。如果 G 既不含 4-圈也不含 k -圈, 其中 k 为大于等于 5 的某个正整数, 则有

$$3|V_3^1| + 2|V_3^2| + 6|F_3| + \sum_{i=5}^{k-1} \max\left\{0, \left\lfloor \frac{3i}{2} \right\rfloor - k + 1\right\} |F_i| \leq 2|E(G)|. \tag{3}$$

证明 令 G 是一个具有最少顶点的且非 $(3, 1)^*$ -可选的 2-连通平面图。假设 G 既不含 4-圈也不含 k -圈, 则在 G 中没有相邻的 3-面, 并且任何 i -面至多与 $\min\{k-i-1, i\}$ 个 3-面相邻, 其中 $5 \leq i \leq k-1$ 。另一方面, 根据引理 1 中的论断 2), 对任意 i -面 f , $|V_3(f)| \leq \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ 成立, 其中 $5 \leq i \leq k-1$, 所以由式(2), 得

$$\begin{aligned} \sum_{d(f)=i} |V_3(f)| + \sum_{d(f)=i} |F_3(f)| &\leq \min\left\{i, \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \min\{k-i-1, i\}\right\} |F_i| = \\ &\min\left\{i, \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + k - i - 1\right\} |F_i| = \\ &\min\left\{i, k - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - 1\right\} |F_i| \quad (i = 5, 6, \dots, k-1), \\ \sum_{d(f) \geq k+1} |V_3(f)| + \sum_{d(f) \geq k+1} |F_3(f)| &\leq \sum_{d(f) \geq k+1} d(f). \end{aligned}$$

综合以上 2 个不等式得

$$\sum_{d(f) \geq 5} |V_3(f)| + \sum_{d(f) \geq 5} |F_3(f)| \leq \sum_{d(f) \geq k+1} d(f) + \sum_{i=5}^{k-1} \min\left\{i, k - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 1\right\} |F_i|.$$

由于

$$\sum_{d(f) \geq 5} |V_3(f)| = 3 |V_3^1| + 2 |V_3^2|, \quad \sum_{d(f) \geq 5} |F_3(f)| = 3 |F_3|,$$

所以

$$3 |V_3^1| + 2 |V_3^2| + 3 |F_3| \leq \sum_{d(f) \geq k+1} d(f) + \sum_{i=5}^{k-1} \min\left\{i, k - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 1\right\} |F_i|$$

或

$$3 |V_3^1| + 2 |V_3^2| + 3 |F_3| + \sum_{d(f)=3}^{k-1} d(f) \leq \sum_{d(f) \geq 3} d(f) + \sum_{i=5}^{k-1} \min\left\{i, k - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 1\right\} |F_i|.$$

因此

$$3 |V_3^1| + 2 |V_3^2| + 6 |F_3| + \sum_{i=5}^{k-1} i |F_i| \leq 2 |E(G)| + \sum_{i=5}^{k-1} \min\left\{i, k - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 1\right\} |F_i|,$$

即

$$3 |V_3^1| + 2 |V_3^2| + 6 |F_3| + \sum_{i=5}^{k-1} \left(i - \min\left\{i, k - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 1\right\}\right) |F_i| \leq 2 |E(G)|$$

或

$$3 |V_3^1| + 2 |V_3^2| + 6 |F_3| + \sum_{i=5}^{k-1} \max\left\{0, \left\lceil \frac{3i}{2} \right\rceil - k + 1\right\} |F_i| \leq 2 |E(G)|.$$

引理 5 令 G 是一个具有最少顶点的非 $(3, 1)^*$ -可选的 2-连通平面图。如果 G 既不含相邻 3-面也不含相邻 4-面, 并且在 G 中任意 3-面与 4-面不相邻, 则对于任意面 $f \in F(G)$, 有

$$|V_3(f)| + |F_3(f)| + |F_4(f)| \leq d(f). \tag{4}$$

证明 假设 G 是一个具有最少顶点的非 $(3, 1)^*$ -可选的 2-连通平面图。注意到, 当 G 为 2-连通时, G 的每个面的边界构成一个圈, 并且每个顶点 $v \in V(G)$ 恰与 $d(v)$ 个不同的面关联。根据引理 1 的第 2 个结论以及本定理的条件, 当 $d(f) = 3, 4$ 时, 不等式 (4) 显然成立。所以假设 $d(f) \geq 5$ 。如果 $F_i(f) = \varphi$ 对于 $i \geq 5$, 则根据引理 1 的第 2 个结论以及本定理的条件可知 $|F_3(f)| + |F_4(f)| = d(f)$, $|V_3(f)| = 0$ 。根据引理 1 的第 2 个结论易知, 每当 $|F_3(f)| + |F_4(f)|$ 减少 1 时, $|V_3(f)|$ 至多增大 1。因此, 对于任意面 $f \in F(G)$, 不等式 (4) 总成立。

2 主要结果

在此部分, 笔者给出 2 个关于 $(3, 1)^*$ -可选平面图的定理, 并证明文献 [5] 和文献 [10] 中的一些结果分别是这 2 个定理的推论。

定理 1 假设 2-连通平面图 G 不含 4-圈和 k -圈, 其中 k 为 $\{5, 6, 7, \dots\}$ 中某一数。如果

$$\sum_{i=5}^{k-1} \max\left\{0, \left\lceil \frac{3i}{2} \right\rceil - k + 1\right\} |F_i| - 2 |F_5| + 24 \geq 0, \tag{5}$$

则 G 是 $(3, 1)^*$ -可选的。

证明 假设此定理结论不成立, 并令 G 为具有最少顶点的反例。根据欧拉公式

$$|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + 2$$

或

$$\sum_{i \geq 3} |V_i| + \sum_{i \geq 3} |F_i| = |E(G)| + 2,$$

由 G 既不含 4-圈也不含 k -圈, 可知

$$\frac{1}{4} |V_3| + \frac{1}{4} \sum_{i \geq 3} i |V_i| - \frac{1}{4} \sum_{i \geq 3} (i-4) |V_i| + \frac{3}{6} |F_3| + \frac{1}{6} |F_5| + \frac{1}{6} \sum_{i \geq 3} i |F_i| \geq |E(G)| + 2,$$

即

$$\frac{1}{4} |V_3| + \frac{2|E(G)|}{4} - \frac{1}{4} \sum_{i \geq 5} (i-4) |V_i| + \frac{1}{2} |F_3| + \frac{1}{6} |F_5| + \frac{2|E(G)|}{6} \geq |E(G)| + 2,$$

或

$$3 |V_3| - 3 \sum_{i \geq 5} (i-4) |V_i| + 6 |F_3| + 2 |F_5| \geq 2 |E(G)| + 24.$$

根据式(3),得

$$3 |V_3| - 3 \sum_{i \geq 5} (i-4) |V_i| + 6 |F_3| + 2 |F_5| \geq 3 |V_3^1| + 2 |V_3^2| + 6 |F_3| + \sum_{i=5}^{k-1} \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{3i}{2} \right\rceil - k + 1 \right\} |F_i| + 24,$$

即

$$|V_3^2| - 3 \sum_{i \geq 5} (i-4) |V_i| \geq \sum_{i=5}^{k-1} \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{3i}{2} \right\rceil - k + 1 \right\} |F_i| - 2 |F_5| + 24,$$

根据式(5),得

$$|V_3^2| - 3 \sum_{i \geq 5} (i-4) |V_i| \geq 0,$$

根据式(2),得

$$\frac{1}{2} \sum_{i \geq 5} i |V_i| - 3 \sum_{i \geq 5} (i-4) |V_i| \geq 0,$$

即

$$\sum_{i \geq 5} \left(12 - \frac{5}{2}i \right) |V_i| \geq 0,$$

显然这是不可能的,因为当 $i \geq 5$ 时, $12 - \frac{5}{2}i < 0$ 。

容易验证,当 $k = 5, 6, 7$ 时,不等式(5)成立,所以下面结果成立。

推论 1^[10] 如果 G 不含 4-圈和 i -圈,其中 $i \in \{5, 6, 7\}$,则 G 是 $(3, 1)^*$ -可选的。

定理 2 令 G 为 2-连通平面图。如果 G 既不含相邻 3-面也不含相邻 4-面,并且任意 3-面不与 4-面相邻,则 G 是 $(3, 1)^*$ -可选的。

证明 根据引理 5,可用类似于文献[10]中证明定理 7 的第 2 部分的证明方法来证明这个定理。

注意到如果平面图 G 不含 5-圈,则在 G 中没有相邻 3-面,如果 G 不含 6-圈,则 G 中没有相邻 4-面。因此,有如下结果。

推论 2 令 G 为 2-连通平面图。

- 1) 如果 G 不含 5-圈,不含相邻的 3-面,不含相邻的 4-面,则 G 是 $(3, 1)^*$ -可选的^[10]。
- 2) 如果 G 不含 5-圈和 6-圈,不含相邻的 3-面,则 G 是 $(3, 1)^*$ -可选的。

3 结论

现在假设平面图 G 含有割点并且不含 4-圈和 k -圈,其中 $k \in \{5, 6, 7\}$ 。令 $B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_t$ 为 G 的含有唯一割点的块,其中 $t \geq 2$ 。不失一般性,假设这些块的次序是沿着平面图 G 的外面的顺时针方向。在平面图 G 的边界上,从每个 B_i 中任选一个不是 G 的割点的顶点,用充分长的路连接 v_i 和 v_{i+1} ,其中 $i = 1, 2, \dots, t-1$ 。这样一定可以得到一个 2-连通平面图 G' ,使得 G' 不含 4-圈和 k -圈,其中 $k \in \{5, 6, 7\}$ 。

易知,如果 G' 是 $(3, 1)^*$ -可选的,则 G 也是 $(3, 1)^*$ -可选的。所以,由推论 1(文献[10]中的定理 6)可得文献[5]中的定理 3,也就是说,只用欧拉定理就可以证明文献[5]中的定理 3。类似可知,本文中的定理 2 和推论 2 对于含有割点的平面图也成立。

参考文献:

- [1] ERDÖS P, RUBIN A L, TAYLOR H. Choosability in graphs[J]. Congr Numer, 1979, 26: 125-157.
- [2] VIZING V G. Vertex coloring with given colors (in Russian) [J]. Diskret Analiz, 1976, 29: 3-10.

(下转第 304 页)

极材料,同一种离子液体的氧化还原极限电位是不同的,电势窗口也差异较大,这主要是由于不同电极材料上超电势不同所致。所以,电势窗口只对于特定电极材料而言才具有实际意义,而其他电极材料的测试结果只起到参考作用,给出不同离子液体电势窗口的变化趋势。当超过分解电压后,伏安曲线变成一条直线,从图4可以看出 $[\text{BMIM}]\text{BF}_4$ 所代表的直线无论是在氧化分解电势部分还是还原分解电势部分,都较 $[\text{BMIM}]\text{PF}_6$ 曲线陡峭,说明 $[\text{BMIM}]\text{BF}_4$ 溶液电阻要小于 $[\text{BMIM}]\text{PF}_6$,这与所测得2种离子液体的电导率相吻合。

3 结论

利用微波法合成离子液体中间体具有速度快、产率高、易于纯化等优点,将水浴加热法所需的12 h缩短为3 h,大大提高了中间体的合成效率,产率可达90%以上。以此中间体为原料合成的离子液体,其物化性能的各项数据如红外图谱、电导率、电化学窗口等均与文献报道相符,说明利用微波法合成的中间体与传统方法所得产品的物化性能无明显差异。比较而言,微波法在合成中间体时可显著缩短反应时间,提高合成效率,而水浴加热法更有利于第2步合成反应中的阴离子置换。故采用微波法与水浴加热法相结合的方式合成咪唑离子液体会收到良好的效果。

参考文献:

- [1] 赵地顺, 鲍晓磊, 闪俊杰, 等. 微波合成配位离子液体[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2010, 31(2): 128-132.
- [2] 王凤彦, 邵光杰. 离子液体应用研究进展[J]. 化学试剂(Chemical Reagents), 2009, 31(1): 25-30.
- [3] WILKES J S, ZAWOROTKO M J. Air and water stable 1-ethyl-3-methylimidazolium based ionic liquids[J]. J Chem Soc, 1992, 17: 965-967.
- [4] 王娜, 赵地顺, 陈凤平. 绿色环保型离子液体的性质及其应用研究进展[J]. 河北工业科技(Hebei Journal of Industrial Science and Technology), 2007, 24(3): 178-181.
- [5] 王毅, 高德淑, 李朝辉, 等. 离子液体在多孔碳电极上的电化学性能[J]. 化学研究(Chemical Research), 2005, 16(2): 38-41.
- [6] NISHIDA T, TASHIRO Y, YAMAMOTO M. Physical and electrochemical properties of 1-alkyl-3-methylimidazolium tetrafluoroborate for electrolyte[J]. J Fluorine Chem, 2003, 120(2): 135-141.
- [7] HUDDLESTON J G, VISSER A E, REICHERT W M, et al. Characterization and comparison of hydrophilic and hydrophobic room temperature ionic liquids incorporating the imidazolium cation[J]. Green Chem, 2001, 3(4): 156-164.
- [8] TOKUDA H, HAYAMIZU K, ISHII K, et al. Physicochemical properties and structures of room temperature ionic liquids (I): Variation of anionic species[J]. J Phys Chem B, 2004, 108(42): 16 593-16 600.
- [9] 许金强, 杨军, 努丽燕娜, 等. 二次锂电池用离子液体电解质研究[J]. 化学学报(Journal of Chinese Chemical Society), 2005, 63(18): 1 733-1 738.

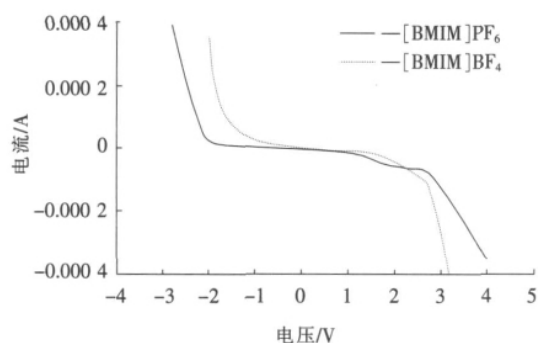


图4 $[\text{BMIM}]\text{BF}_4$ 和 $[\text{BMIM}]\text{PF}_6$ 离子液体线性伏安扫描曲线

Fig. 4 LSV curves of $[\text{BMIM}]\text{BF}_4$ and $[\text{BMIM}]\text{PF}_6$

(上接第293页)

- [3] ŠKREKOVSKI R. List improper colorings of planar graphs[J]. Comb Prob Comp, 1999, 8: 293-299.
- [4] EATON N, HULL T. Defective list colorings of planar graphs[J]. Bull of the ICA, 1999, 25: 79-87.
- [5] LIH K. A note on list improper coloring planar graphs[J]. Appl Math Letters, 2001, 14: 269-273.
- [6] ŠKREKOVSKI R. A grötzsch-type theorem for list colorings with propriety one[J]. Comb Prob Comp, 1999, 8: 493-507.
- [7] ŠKREKOVSKI R. List improper colorings of planar graphs with prescribed girth[J]. Discrete Math, 2000, 214: 221-233.
- [8] THOMASSEN C. 3-list coloring planar graphs of girth 5[J]. J Combin Theory Ser B, 1995, 64: 101-107.
- [9] VOIGT M. A not 3-choosable planar graph without 3-cycles[J]. Discrete Math, 1995, 146: 325-328.
- [10] ZHAO Y, HE W. The use of Euler's formula in $(3,1)^*$ -list coloring[J]. Discuss Math Graph Theory, 2006, 26: 91-101.