文章编号:1008-1542(2012)04-0283-07

含有一阶导数的非局部四阶边值问题正解的存在性

杨 飞,刘玉敬,郭彦平

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

摘 要:利用一个新的锥不动点定理和非局部边值问题的 Green 函数的性质,研究了一类含有一阶导数的非局部四阶边值问题:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+Au''(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t)),0<t<1,\\ u(0)=u(1)=\int_0^1 p(s)u(s)\mathrm{d}s,\\ u''(0)=u''(1)=\int_0^1 q(s)u''(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

正解的存在性;其中 f 是一个非负连续函数,$\lambda>0,0<A<\pi^2,p,q\in L[0,1],p(s)\geqslant 0,q(s)\geqslant 0$。最后通过一个简单的例子,验证了所得结果的正确性。

关键词:边值问题;不动点定理;正解

中图分类号:O175.8 **MSC(2010)主题分类**:34B05 **文献标志码**:A

Positive solutions to nonlocal fourth-order boundary value problems with dependence on the first order derivative

YANG Fei, LIU Yu-jing, GUO Yan-ping

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: In this paper, a new fixed point theorem and the properties of Green function are used for the nonlocal boundary value problems. The existence of at least one positive solution to the nonlocal fourth-order boundary value problem with the first order derivative

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+Au''(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t)),0<t<1,\\ u(0)=u(1)=\int_0^1 p(s)u(s)\mathrm{d}s,\\ u''(0)=u''(1)=\int_0^1 q(s)u''(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

is considered, where f is a nonnegative continuous function and $\lambda>0,0<A<\pi^2,p,q\in L[0,1],p(s)\geqslant 0,q(s)\geqslant 0$. Finally, a simple example is presented to illustrate the correctness of the obtained results.

Key words: boundary value problem; fixed point theorem; positive solution

收稿日期:2012-03-09;**责任编辑**:张 军

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10971045);河北省自然科学基金资助项目(A2009000664;A2011208012);河北省人才工程培养经费资助科研项目

作者简介:杨 飞(1983-),女,河北衡水人,硕士研究生,主要从事应用微分方程方面的研究。

四阶边值问题描述的是一个两端具有简单支撑的弹性梁，在平衡状态下的形变问题，由于它在物理上具有重要的意义，因此，它已被许多学者利用非线性的 Leray-Schaude 不动点定理、不动点指数定理、锥拉伸压缩不动点定理以及上下解方法研究[1-8]。

近来，已经有很多人关注带有 1 个或者 2 个参数的四阶微分方程。例如文献[9]中，在以下假设条件下，利用不动点指数定理研究讨论了四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+\beta u''(t)-\alpha u(t)=\lambda f(t,u(t)),\ 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性。其中，

1）$f:[0,1]\times R^+\to R^+$ 是连续的；

2）$\beta<2\pi^2,\alpha\geqslant-\beta^2/4,\alpha/\pi^4+\beta/\pi^2<1$。

MA 在文献[10]中证明了非局部四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=h(t)f(t,u(t)),\ 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=\int_0^1 p(s)u(s)\mathrm{d}s, \\ u''(0)=u''(1)=\int_0^1 q(s)u''(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

对称解的存在性。

BAI 在文献[11]中利用锥拉伸压缩不动点定理研究了非局部四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+\beta u''(t)=\lambda f(t,u(t),u''(t)),\ 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=\int_0^1 p(s)u(s)\mathrm{d}s, \\ u''(0)=u''(1)=\int_0^1 q(s)u''(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

正解的存在性。通过以上文章的启发，在这篇文章中，笔者研究以下含有一阶导数的非局部四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+Au''(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t)),\ 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=\int_0^1 p(s)u(s)\mathrm{d}s, \\ u''(0)=u''(1)=\int_0^1 q(s)u''(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性。全文假设以下条件成立：

H_1）$\lambda>0,0<A<\pi^2$；

H_2）$f:[0,1]\times[0,\infty)\times R\to[0,\infty)$ 是连续的，$p,q\in L[0,1],p(s)\geqslant0,q(s)\geqslant0,\int_0^1 p(s)\mathrm{d}s<1$，$\int_0^1 q(s)\sin\sqrt{A}s\,\mathrm{d}s+\int_0^1 q(s)\sin\sqrt{A}(1-s)\mathrm{d}s<\sin\sqrt{A}$。

1 预备知识

假设 $Y=C[0,1]$ 是一个 Banach 空间，其范数是 $\|u\|_0=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$。

设 λ_1,λ_2 是多项式 $P(\lambda)=\lambda^2+A\lambda$ 的 2 个根，即 $\lambda_1=0,\lambda_2=-A$。通过条件 H_1）很容易得到 $-\pi^2<\lambda_2<0$。设 $Q_i(t,s)(i=1,2)$ 是下面 BVP 的 Green 函数：

$$\begin{cases} -u''(t)+\lambda_1 u(t)=0,\ 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=\int_0^1 p(s)u(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \qquad \begin{cases} -u''(t)+\lambda_2 u(t)=0,\ 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=\int_0^1 q(s)u(s)\mathrm{d}s, \end{cases}$$

那么，经过仔细计算能够得到：

$$Q_1(t,s)=G_1(t,s)+\frac{1}{1-\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x}\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x,$$

$$Q_2(t,s)=G_2(t,s)+\frac{\sin\sqrt{A}t+\sin\sqrt{A}(1-t)}{\sin\sqrt{A}-\int_0^1 q(x)\sin\sqrt{A}x\,dx-\int_0^1 q(x)\sin\sqrt{A}(1-x)\,dx}\int_0^1 G_2(s,x)q(x)\,dx,$$

$$G_1(t,s)=\begin{cases}s(1-t),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t(1-s),\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}$$

$$G_2(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{A}s\sin\sqrt{A}(1-t)}{\sqrt{A}\sin\sqrt{A}},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{\sin\sqrt{A}t\sin\sqrt{A}(1-s)}{\sqrt{A}\sin\sqrt{A}},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}$$

令，$\omega_1=\dfrac{1}{1-\int_0^1 p(x)\,dx}$，$\omega_2(t)=\dfrac{\sin\sqrt{A}t+\sin\sqrt{A}(1-t)}{\sin\sqrt{A}-\int_0^1 q(x)\sin\sqrt{A}x\,dx-\int_0^1 q(x)\sin\sqrt{A}(1-x)\,dx}$。

引理 1[11]　**假设条件** H_1)**和条件** H_2)**成立，那么对于任意的** $y(t)\in C[0,1]$，**边值问题**

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)+Au''(t)=y(t),\ 0<t<1,\\ u(0)=u(1)=\int_0^1 p(s)u(s)\,ds,\\ u''(0)=u''(1)=\int_0^1 q(s)u''(s)\,ds\end{cases}\tag{2}$$

有唯一的解：

$$u(t)=\int_0^1\int_0^1 Q_1(t,s)Q_2(s,\tau)y(\tau)\,d\tau ds。$$

其中：$Q_1(t,s)=G_1(t,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\,dx$，$Q_2(s,\tau)=G_2(s,\tau)+\omega_2(s)\int_0^1 G_2(\tau,x)q(x)\,dx$。

引理 2[11]　**假设条件** H_1)**和条件** H_2)**成立，那么，当** $i=1,2$ **时，有以下结论成立**：

i) $Q_i(t,s)\geqslant 0,\ \forall t,s\in[0,1]$，$Q_i(t,s)>0,\ \forall t,s\in(0,1)$；

ii) $G_i(t,s)\geqslant a_iG_i(t,t)G_i(s,s)$，$\forall t,s\in[0,1]$；

iii) $G_i(t,s)\leqslant b_iG_i(s,s)$，$\forall t,s\in[0,1]$。

其中：$a_1=1$；$a_2=\sqrt{A}\sin\sqrt{A}$；$b_1=1$；$b_2=\dfrac{1}{\sin\sqrt{A}}$。

定义　$d_i=\min\limits_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}a_iG_i(t,t)$，　$i=1,2$。

引理 3[11]　**假设条件** H_1)**和条件** H_2)**成立，**$\omega_2(t)$，d_i **是以上给出的，则有下列条件成立**：

i) $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\omega_2(t)=\omega_2(\frac{1}{2})$；

ii) $0<d_i<1$。

引理 4　**若** $y(t)\in C[0,1]$，**且** $y(t)\geqslant 0$，**那么边值问题**(2)**的唯一解** $u(t)$ **满足**：$\min\limits_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}u(t)\geqslant d_1\|u\|_0$，**其中**，$d_1=\min\limits_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}a_1G_1(t,t)$。

证明　**由引理** 1 **和引理** 2 **的条件** iii)，**可以得到**：

$$\begin{aligned}u(t)&\leqslant\int_0^1\int_0^1[b_1G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\,dx]Q_2(s,\tau)y(\tau)\,d\tau ds=\\&\int_0^1\int_0^1[G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\,dx]Q_2(s,\tau)y(\tau)\,d\tau ds=\\&\int_0^1\int_0^1 Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)y(\tau)\,d\tau ds。\end{aligned}$$

因此，

$$\|u\|_0\leqslant\int_0^1\int_0^1 Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)y(\tau)\,d\tau ds。$$

由引理 1 **和引理** 2 **的条件** ii)，**有**：

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} u(t) \geqslant \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} \int_0^1\int_0^1 [a_1 G_1(t,t)G_1(s,s) + \omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x] Q_2(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^1\int_0^1 [d_1 G_1(s,s) + \omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x] Q_2(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \geqslant$$
$$d_1\int_0^1\int_0^1 [G_1(s,s) + \omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x] Q_2(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s =$$
$$d_1\int_0^1\int_0^1 Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \geqslant d_1\|u\|_0,$$

即

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} u(t) \geqslant d_1\|u\|_0。$$

下面介绍在本文中所要用到的一个锥上的不动点定理。

令 X 是一个 Banach 空间，且 $K\subset X$ 是一个锥。假设 $\alpha,\beta:X\to R^+$ 是 2 个连续的凸泛函，满足：

$$\alpha(\lambda u) = |\lambda|\alpha(u),\ \beta(\lambda u) = |\lambda|\beta(u), u\in X, \lambda\in R,$$

并且 $\|u\| \leqslant M\max\{\alpha(u),\beta(u)\}, u\in X; \alpha(u)\leqslant\alpha(v), u,v\in K, u\leqslant v$，其中 $M>0$ 为常数。

定理 1[12] 假设 $r_2>r_1>0, L>0$ 是常数，并且 $\Omega_i=\{u\in X:\alpha(u)<r_i, \beta(u)<L\},(i=1,2)$ 是 X 中的 2 个开集。又设 $D_i=\{u\in X:\alpha(u)=r_i\},(i=1,2), T:K\to K$ 是一个全连续算子，并且满足：

A_1）$\alpha(Tu)<r_1, u\in D_1\cap K; \alpha(Tu)>r_2, u\in D_2\cap K$；

A_2）$\beta(Tu)<L, u\in K$；

A_3）$\exists p\in(\Omega_2\cap K)\backslash\{0\}$，使得 $\alpha(p)\neq 0$，并且，$\alpha(u+\lambda p)\geqslant\alpha(u), \forall u\in K, \lambda\geqslant 0$。

那么 T 在 $(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)\cap K$ 至少存在 1 个不动点。

2 主要结果

令 $X=C^1[0,1]$ 是一个 Banach 空间，其范数 $\|u\| = \max_{t\in[0,1]}|u(t)| + \max_{t\in[0,1]}|u'(t)|$，并且

$$K=\{u\in X: u\geqslant 0, \min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} u(t)\geqslant d_1\|u\|_0\}$$

是 X 中的一个锥。定义

$$\alpha(u)=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|,\ \beta(u)=\max_{t\in[0,1]}|u'(t)|,\ \forall u\in X,$$

那么，由定义可知：

$$\|u\|\leqslant 2\max\{\alpha(u),\beta(u)\},\ \alpha(\lambda u)=|\lambda|\alpha(u),\ \beta(\lambda u)=|\lambda|\beta(u),\ \forall u\in X,\ \lambda\in R,$$
$$\alpha(u)\leqslant\alpha(v), \forall u,v\in K, u\leqslant v。$$

在下面，令：

$$\eta_0 = \int_0^1\int_0^1 Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\ \eta_1 = \int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,$$
$$\eta_2 = \int_0^1 [G_2(\tau,\tau) + \omega_2(\frac{1}{2})\int_0^1 G_2(\tau,x)q(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}\tau。$$

假设 $\exists L>b>d_1 b>c>0$，使 $f(t,u,v)$ 满足以下条件：

H_3）$f(t,u,v)<\dfrac{c}{\lambda\eta_0},\ \forall(t,u,v)\in[0,1]\times[0,c]\times[-L,L]$；

H_4）$f(t,u,v)\geqslant\dfrac{b}{\lambda d_1\eta_1},\ \forall(t,u,v)\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]\times[d_1 b,b]\times[-L,L]$；

H_5）$f(t,u,v)<\dfrac{2L}{3\lambda b_2\eta_2},\ \forall(t,u,v)\in[0,1]\times[0,b]\times[-L,L]$。

设

$$f^*(t,u,v)=\begin{cases} f(t,u,v),(t,u,v)\in[0,1]\times[0,b]\times(-\infty,\infty), \\ f(t,b,v),(t,u,v)\in[0,1]\times(b,\infty)\times(-\infty,\infty), \end{cases}$$

$$f_1(t,u,v)=\begin{cases}f^*(t,u,v),(t,u,v)\in[0,1]\times[0,\infty)\times[-L,L],\\ f^*(t,u,-L),(t,u,v)\in[0,1]\times[0,\infty)\times(-\infty,-L],\\ f^*(t,u,L),(t,u,v)\in[0,1]\times[0,\infty)\times[L,\infty)。\end{cases}$$

定义：

$$(Tu)(t)=\lambda\int_0^1\int_0^1 Q_1(t,s)Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s, \tag{3}$$

$$(Tu)'(t)=\lambda\left[\int_t^1\int_0^1 Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s-\int_0^1\int_0^1 sQ_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]。 \tag{4}$$

引理 5　**假设条件** H_1)**和条件** H_2)**成立，那么** $T:K\to K$ **是全连续的。**

证明　**对** $\forall u\in K$，**根据** Tu **的定义和引理** 2，**可知**：$Tu\geqslant 0$。

由于

$$\|Tu\|_0=\max_{t\in[0,1]}\left|\lambda\int_0^1\int_0^1 Q_1(t,s)Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1[b_1G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x]Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1[G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x]Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1 Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,$$

所以可以得到：

$$\min_{t\in[\frac14,\frac34]}(Tu)(t)=\min_{t\in[\frac14,\frac34]}\lambda\int_0^1\int_0^1 Q_1(t,s)Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1[a_1G_1(t,t)G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x]Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1[d_1G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x]Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$d_1\lambda\int_0^1\int_0^1 Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=d_1\|Tu\|_0。$$

因此，得出 $T(K)\subset K$。**设** $B\subset C^1[0,1]$**有界，很容易得到** $T(B)$**为** K **中的有界集。利用** f_1，$Q_1(t,s)$，$Q_2(t,s)$**是连续的，得出** $T(B)$**是等度连续的。利用** Arzela-Ascoli **定理，证明得出** $T:K\to K$ **是全连续的。**

定理 2　**假设条件** H_1)－**条件** H_5)**成立，那么边值问题**(1)**至少存在** 1 **个正解** $u(t)$**满足**：

$$c<\alpha(u)<b,\ \max_{t\in[0,1]}|u'(t)|<L。$$

证明　**设** $\Omega_1=\{u\in X:|u(t)|<c,|u'(t)|<L\}$，$\Omega_2=\{u\in X:|u(t)|<b,|u'(t)|<L\}$**是** X **中的** 2 **个开集，并且** $D_1=\{u\in X:\alpha(u)=c\}$，$D_2=\{u\in X:\alpha(u)=b\}$。

根据引理 5，**知** $T:K\to K$ **是全连续算子，并且** $\exists p\in(\Omega_2\cap K)\setminus\{0\}$，**使得** $\alpha(p)\neq 0$ **且** $\alpha(u+\lambda p)\geqslant\alpha(u)$，$\forall u\in K,\lambda\geqslant 0$。$\forall u\in D_1\cap K,\alpha(u)=c$。**从条件** H_3)**可以得到**：

$$\alpha(Tu)=\max_{t\in[0,1]}\left|\lambda\int_0^1\int_0^1 Q_1(t,s)Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|<$$
$$\lambda\times\frac{c}{\lambda\eta_0}\left|\int_0^1\int_0^1[b_1G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x]Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|=$$
$$\frac{c}{\eta_0}\int_0^1\int_0^1[G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x]Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=$$
$$\frac{c}{\eta_0}\int_0^1\int_0^1 Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=c。$$

$\forall u\in D_2\cap K,\alpha(u)=b$。**从引理** 4，**有** $u(t)\geqslant d_1\alpha(u)=d_1b,t\in[\frac14,\frac34]$。**因此，从条件** H_4)**中可得到**：

$$\alpha(Tu)=\max_{t\in[0,1]}\left|\lambda\int_0^1\int_0^1 Q_1(t,s)Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|>$$
$$\lambda\times\frac{b}{\lambda d_1\eta_1}\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1\int_{\frac14}^{\frac34}[a_1G_1(t,t)G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x]Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|=$$

$$\frac{b}{d_1\eta_1}\left|\int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}[d_1G_1(s,s)+\omega_1\int_0^1 G_1(s,x)p(x)\mathrm{d}x]Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|>$$

$$\frac{b}{d_1\eta_1}\times d_1\int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=\frac{b}{\eta_1}\int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=b。$$

$\forall u\in K$，从条件 H_5)中可得到：

$$\beta(Tu)=\max_{t\in[0,1]}\left|\lambda\int_t^1\int_0^1 Q_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s-\lambda\int_0^1\int_0^1 sQ_2(s,\tau)f_1(\tau,u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|<$$

$$\lambda\times\frac{2L}{3\lambda b_2\eta_2}\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1\int_0^1(1+s)Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|<$$

$$\frac{2L}{3b_2\eta_2}\left|\int_0^1\int_0^1(1+s)[b_2G_2(\tau,\tau)+\max_{s\in[0,1]}\omega_2(s)\int_0^1 G_2(\tau,x)q(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|=$$

$$\frac{2L}{3b_2\eta_2}\left|\int_0^1\int_0^1(1+\frac{1}{2})[b_2G_2(\tau,\tau)+\omega_2(\frac{1}{2})\int_0^1 G_2(\tau,x)q(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right|<$$

$$\frac{2L}{3b_2\eta_2}\times\frac{3}{2}b_2\left|\int_0^1[G_2(\tau,\tau)+\omega_2(\frac{1}{2})\int_0^1 G_2(\tau,x)q(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}\tau\right|=L。$$

定理 1 意味着 $u\in(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)\cap K$，使得 $u=Tu$。因此，$u(t)$是边值问题(1)的 1 个正解，并且满足：

$$c<\alpha(u)<b,\ \max_{t\in[0,1]}|u'(t)|<L。$$

因此，定理 2 成立。证毕。

例 1 考虑以下边值问题：

$$\begin{cases}u^4(t)+\frac{\pi^2}{16}u''(t)=\pi^2 f(t,u(t),u'(t)),\ 0<t<1,\\ u(0)=u(1)=\int_0^1 su(s)\mathrm{d}s,\\ u''(0)=u''(1)=0,\end{cases}$$

其中：

$$f(t,u,v)=\begin{cases}\frac{5}{2}u+\frac{3+\sin v}{2},\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant u\leqslant 2,\ -1\,900\leqslant v\leqslant 1\,900,\\ [191(u-2)+5]+\frac{3+\sin v}{2},\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ 2\leqslant u\leqslant 3,\ -1\,900\leqslant v\leqslant 1\,900,\\ \frac{49}{2}(u+5)+\frac{3+\sin v}{2},\ \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4},\ 3\leqslant u\leqslant 16,\ -1\,900\leqslant v\leqslant 1\,900。\end{cases}$$

解 在这个边值问题中，可以知道：

$$A=\frac{\pi^2}{16},\ \lambda=\pi^2,\ p(t)=t,\ q(t)=0。$$

那么，可以得到：

$$a_1=1,\ a_2=\frac{\sqrt{2}\pi}{8},\ b_1=1,\ b_2=\sqrt{2},\ \omega_1=2,\ d_1=\frac{3}{16},$$

$$\eta_0=\int_0^1\int_0^1 Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=\frac{6\,144\sqrt{2}-6\,144-768\pi-4\pi^3}{\pi^5},$$

$$\eta_1=\int_0^1\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}Q_1(s,s)Q_2(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}(3\,072\sqrt{2}-3\,072-384\pi)-4\pi^3}{\pi^5},$$

$$\eta_2=\int_0^1[G_2(\tau,\tau)+\omega_2(\frac{1}{2})\int_0^1 G_2(\tau,x)q(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}\tau=\frac{8-2\pi}{\pi^2}。$$

取 $c=2,b=16,L=1\,900$，则 $d_1b=3$，那么可以得到：

$$f(t,u,v)\leqslant 7<\frac{c}{\lambda\eta_0}\approx 7.5,\text{其中}(t,u,v)\in[0,1]\times[0,2]\times[-1\,900,1\,900];$$

$$f(t,u,v)\geqslant 197>\frac{b}{\lambda d_1\eta_1}\approx 196.8,\text{其中}(t,u,v)\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]\times[3,16]\times[-1\,900,1\,900];$$

$$f(t,u,v)\leqslant 516.5<\frac{2L}{3\lambda b_2\eta_2}\approx 532,\text{其中}(t,u,v)\in[0,1]\times[0,16]\times[-1\,900,1\,900]。$$

从以上的计算结果中可以看出，此边值问题满足定理 2 的条件。因此，根据定理 2 知道此问题至少存在 1 个正解 $u(t)$ 满足：

$$2 < \max_{t\in[0,1]} u(t) < 16,\ \max_{t\in[0,1]} |u'(t)| < 1\,900。$$

参考文献：

[1] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones[M]. New York: Academic Press, 1988.

[2] BAI Zhan-bing. The method of lower and upper solution for a bending of an elastic beam equation[J]. J Math Anal Appl, 2000, 248(1): 195-202.

[3] BAI Zhan-bing. The method of lower and upper solutions for some fourth-order boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2007, 67(6): 1 704-1 709.

[4] CHAI Guo-qing. Existence of positive solutions for fourth-order boundary value problem with variable parameters[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2007, 66(4): 870-880.

[5] MA Ru-yun, WANG Hai-yan. On the existence of positive solutions of fourth-order ordinary differential equations[J]. Appl Anal, 1995, 59: 225-231.

[6] YAO Qing-liu. Local existence of multiple positive solutions to a singular cantilever beam equation[J]. J Math Anal Appl, 2010, 363: 138-154.

[7] MA Ru-yun. Existence of positive solutions of a fourth-order boundary value problem[J]. Appl Math Comput, 2005, 168: 1 219-1 231.

[8] ZHAO Jun-fang, GE Wei-gao. Positive solutions for a higher-order four-point boundary value problem with a p-Laplacian[J]. Comput Math Appl, 2009, 58: 1 103-1 112.

[9] LI Yong-xiang. Positive solutions of fourth-order boundary value problems with two parameters[J]. J Math Anal Appl, 2003, 281: 477-484.

[10] MA Hui-li. Symmetric positive solutions for nonlocal boundary value problems of fourth-order[J]. Nonlinear Anal, 2008, 68: 645-651.

[11] BAI Zhan-bing. Positive solutions of some nonlocal fourth-order boundary value problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 215: 4 191-4 197.

[12] GUO Yan-ping, GE Wei-gao. Positive solutions for three-point boundary value problems with dependence on the first order derivatives [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 290: 291-301.

[13] 索秀云，郭少聪，张素芬，等. 二阶脉冲微分方程 m 点边值问题的正解[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2011, 32(6): 519-523.

[14] 刘玉敬，郭少聪，郭彦平. 带有积分边值条件的三阶边值问题正解的存在性[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2012, 33(2): 93-96.

[15] 郭少聪，郭彦平，张素芬. 带 2 个参数的二阶脉冲微分方程 3 点边值问题的正解[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2012, 33(2): 97-102.

向本期载文的审稿专家致谢

本期《河北科技大学学报》共发表论文 21 篇。这些论文的发表是与有关专家的认真审读、细查资料、推敲分析、中肯评价分不开的。对此，本编辑部特向这些专家表示敬意，对他们的辛勤劳动表示感谢。

本期载文的审稿专家名单如下(按姓名的汉语拼音顺序排列)：

顾长青　郭　奋　郭立炜　郭彦平　韩　育　刘春根
刘欣悦　马洪涛　孟范平　王国栋　王信群　魏世泽
魏祥林　闻映红　肖　南　薛建阳　杨松林　姚卫星
翟学良　张焕祯　张嘉钰　郑　涛

(本刊编辑部)