第 33 卷第 2 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 33, No. 2
2012 年 4 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Apr. 2012

文章编号:1008-1542(2012)02-0097-06

带 2 个参数的二阶脉冲微分方程 3 点边值问题的正解

郭少聪[1],郭彦平[1],张素芬[2]

(1. 河北科技大学理学院,河北石家庄　050018;2. 石家庄信息工程职业学院,河北石家庄 050035)

摘　要:利用锥上的 Krasnoselskii 不动点定理,讨论了带有 2 个参数的二阶脉冲微分方程 3 点边值问题正解的存在性和不存在性。通过定义合适的积分算子,给出了该问题有 1 个正解或 2 个正解以及不存在正解的充分条件。

关键词:脉冲微分方程;正解;Krasnoselskii 不动点定理

中图分类号:O175.8　　　**文献标志码**:A

Positive solutions to three-pointboundary value problems for second order impulsive differential equations with two parameters

GUO Shao-cong[1], GUO Yan-ping[1], ZHANG Su-fen[2]

(1. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China; 2. Shijiazhuang Information Engineering Vocational College, Shijiazhuang Hebei 050035, China)

Abstract: In this paper, the Krasnoselskii's fixed-point index theorem is employed in a cone to study the existence and non-existence of positive solutions to the second order impulsive functional differential equations with two parameters. By defining integral operators, sufficient conditions under which the above problem has at least one or two positive solutions or has no positive solution are put forward.

Key words: impulsive differential equation; positive solution; Krasnoselskii's fixed-point theorem

1　预备知识

脉冲微分方程描述的是事物在发展过程中的某一时刻某一状态发生突变,脉冲微分方程已经成为了微分方程中一个非常重要的研究领域。比如,边值问题作为脉冲微分方程的一个重要分支,已经引起了很多学者的关注,并激发了他们极大的研究兴趣[1-6]。常微分方程边值问题的研究中有很多关于多点边值问题的研究著作,但是仅有少量论文研究带参数的二阶非线性脉冲微分方程边值问题[7]。

YAN 在文献[6]中利用锥上的锥拉伸和锥压缩不动点定理研究了带 2 个参数的周期泛函脉冲微分方程

$$\begin{cases} u'(t)=h(t,u(t))-\lambda f(t,u(t-\tau(t))),\ t\neq t_k,\ t\in R, \\ u(t_k^+)-u(t_k)=\mu I_k(t_k,u(t_k-\tau(t_k))),\ k\in Z \end{cases}$$

收稿日期:2011-09-29;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10971045);河北省自然科学基金资助项目(A2009000664,A2011208012)

作者简介:郭少聪(1965-),男,河北井陉人,讲师,主要从事应用微分方程及优化控制方面的研究。

的周期正解的存在性以及不存在性。文献[3]通过运用相同的定理得到了二阶脉冲微分方程3点边值问题正解的存在性的结论：

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(u(\alpha(t)))=0,\text{其中 } t\in J=[0,T],t\neq t_k, \\ \Delta u(t_k^+)=Q_k(u(t_k)),\text{其中 } k=1,2,\cdots,m, \\ u(0)=0,\beta u(\eta)=x(1), \end{cases}$$

其中，$f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$，$\alpha\in C(J,(0,1])$，对 $t\in J$，$t\leqslant\alpha(t)\leqslant 1$，$\beta>0$，$\eta\in(0,1)$，$a(t)\in C(J,[0,+\infty))$，且 $1-\beta\eta>0$。

基于以上研究，笔者主要研究带2个参数的二阶脉冲微分方程3点边值问题，即

$$\begin{cases} u''(t)+\lambda h(t)f(t,u(t))=0,\text{其中 } t\in J=[0,1],t\neq t_k, \\ -\Delta u'(t_k)=\mu I_k(u(t_k)),\text{其中 } k=1,2,\cdots,m, \\ u(0)=0,\beta u(\eta)=u(1) \end{cases} \tag{1}$$

正解是否存在，如果存在，是1个还是2个正解。其中，$J=[0,1]$，令 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=1$，$R_+=[0,+\infty)$；$J_k=(t_k,t_{k+1})$，$k=0,1,\cdots,m-1$，$J_m=(t_m,t_{m+1})$，$\Delta u'(t_k)=x'(t_k^+)-x'(t_k^-)$，$x'(t_k^-)$ 和 $x'(t_k^+)$ 分别代表 x' 在 t_k 点处的左、右极限。定义如下。Banach 空间：$PC^1(J,R)=\{u\in C(J,R),x|_{J_k}\in C^1(J_k,R),k=0,1,\cdots,m$，且存在 $u'(t_k^+)$，对 $k=0,1\cdots,m,u'(t_k)=u'(t_k^-)\}$，其范数为 $\|u\|=\sup\limits_{t\in J}|u(t)|$，$\|u\|_{PC^1}=\max_{\{\|u\|,\|u'\|\}}$。如果函数 $u\in PC^1(J,R)\cap C^2(J',R)$ 满足式(1)，则称 u 是式(1)的解。其中，$J'=J\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$。

假设如下。

H_1）$\lambda>0$，且 $\mu\geqslant 0$ 都是参数；

H_2）$f\in C(J\times R_+,R_+)$，$h\in(J,R_+)$ 且存在 $t_0\in(\eta,1)$ 使得 $h(t_0)>0$；

H_3）$I_k\in C(R_+,R_+)$ 且对 $k=0,1,\cdots,m$ 有界；

H_4）$\eta\in(0,1)$，$0<\beta<1$。

本文中用到的主要定理是锥上的 krasnoselskii 不动点定理[7]。

定理1 设 X 是 Banach 空间，K 是 X 上的一个锥，设 Ω_1,Ω_2 分别是 X 的有界开子集，$\theta\in\Omega_1\subset\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，若算子 $T:K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是全连续算子，且满足下面2个条件之一：

C_1）$\|Tu\|\leqslant\|u\|$，任意 $u\in K\cap\partial\Omega_1$，且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|$，任意 $u\in K\cap\partial\Omega_2$；

C_2）$\|Tu\|\geqslant\|u\|$，任意 $u\in K\cap\partial\Omega_1$，且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|$，任意 $u\in K\cap\partial\Omega_2$。

那么，A 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中至少存在1个不动点。

2 相关引理

在这一部分，给出一些在证明过程中必要的引理。

引理1 令 $\eta\in(0,1)$，$1\neq\beta\eta$，那么对 $y\in C[0,1]$，问题

$$\begin{cases} u''(t)+y(t)=0,t\in J=[0,T],t\neq t_k, \\ -\Delta u'(t_k)=I_k(u(t_k)),k=1,2,\cdots,m, \\ u(0)=0,\beta u(\eta)=u(1) \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解：

$$u(t)=\frac{t}{1-\beta\eta}\left\{\sum_{i=1}^{m}I_i(u(t_i))(1-t_i)+\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s-\beta\sum_{i=1}^{j}I_i(u(t_i))(\eta-t_i)-\beta\int_0^\eta(\eta-s)y(s)\mathrm{d}s\right\}-$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{k}I_i(u(t_i))(t-t_i)-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s$。其中 $t\in J_k$，$k=0,1,\cdots,m$，且 $\eta\in J_j$，$j=0,1,\cdots,m$。规定：$r>s$，$\displaystyle\sum_{i=r}^{s}\cdots=0$。

引理2[3] 如果条件 H_4) 成立，设 $I_i\geqslant 0$，$i=0,1,\cdots,m$ 且 $y\in C(J,R_+)$，那么式(2) 的唯一解在 J 上满足的条件 $u(t)\geqslant 0$。

引理3[8] 如果条件 H_4) 成立，假设 $I_i\geqslant 0$，$i=0,1,\cdots,m$ 且 $y\in C(J,R_+)$，那么式(2) 的唯一解 u 满

足：$\inf\limits_{t\in[\eta,1]} u(t) \geqslant \gamma \| u \|$，其中，$\gamma = \min\left\{\beta\eta, \dfrac{\beta(1-\eta)}{1-\beta\eta}, \eta\right\}$。

令 $E = C[0,1]$ 且定义 K 是 E 上的一个锥，$K \subset E$ 且满足以下条件：$K = \{u \in E \mid u(t) \geqslant 0, t \in J$ 且 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]} u(t) \geqslant \gamma \| u \|$。对正数 r，有 $\Omega_r = \{u \in K: \| u \| < r\}$ 和 $\partial\Omega_r = \{u \in K: \| u \| = r\}$。

定义一个积分算子 $T: K \to C^+[0,1]$ 为

$$Tu(t) = \frac{t}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m} I_i(u(t_i))(1-t_i) + \lambda\int_0^1 (1-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s - \beta\mu\sum_{i=1}^{j} I_i(u(t_i))(\eta - t_i) - \beta\lambda\int_0^\eta (\eta - s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\} - \mu\sum_{i=1}^{k} I_i(u(t_i))(t-t_i) - \lambda\int_0^t (t-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s。\tag{3}$$

其中 $t \in J_k$，根据引理 1，式(1) 有 1 个解 $u = u(t)$ 当且仅当 u 是 T 的一个不动点。

引理 4　假设条件 $\mathrm{H}_1) - \mathrm{H}_4)$ 成立，那么 $T: K \to K$ 是全连续的。

证明　根据引理 2 和引理 3，得 $T(K) \subset K$，根据 Ascoli-Arzela 定理，算子 T 是全连续的。证毕。

为了下面应用方便，笔者给出几个简单记号：

$$f_0 = \lim_{x\to 0^+}\inf \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x},\quad I_0^i = \lim_{x\to 0^+}\inf \frac{I_i(x)}{x};$$

$$f_\infty = \lim_{x\to +\infty}\inf \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x},\quad I_\infty^i = \lim_{x\to +\infty}\inf \frac{I_i(x)}{x};$$

$$f^0 = \lim_{x\to 0^+}\sup \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x},\quad I_i^0 = \lim_{x\to 0^+}\sup \frac{I_i(x)}{x};$$

$$f^\infty = \lim_{x\to +\infty}\sup \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x},\quad I_i^\infty = \lim_{x\to +\infty}\sup \frac{I_i(x)}{x}。$$

其中，$i = 0,1,\cdots,m$。

3　主要结论

定理 2　假设条件 $\mathrm{H}_1) - \mathrm{H}_4)$ 成立，且 f^0, f_∞, I_i^0 和 I_∞^i 都是正数，且满足

$$\frac{1}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m} I_i^0 + \lambda f^0\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right\} < 1,\tag{4}$$

$$\frac{\beta\gamma}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m} I_\infty^i(1-t_i) + f_\infty\lambda\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s\right\} > 1。\tag{5}$$

式中：$\eta \in J_j$；$j = 0,1,\cdots,m$；$i = 0,1,\cdots,m$。那么式(1) 至少有一个正解。

证明　根据式(4) 选择 $\varepsilon > 0$，使得：

$$\frac{t}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m}(I_i^0 + \varepsilon) + \lambda(f^0 + \varepsilon)\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right\} < 1,$$

$$\frac{\beta\gamma}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m}(I_\infty^i + \varepsilon)(1-t_i) + (f_\infty - \varepsilon)\lambda\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s\right\} > 1。$$

而根据 f^0 和 I_i^0 的定义，存在 $r > 0$，使得 $I_i(u) \leqslant (I_i^0 + \varepsilon)u$ 和 $f(t,u) \leqslant (f^0 + \varepsilon)u$。其中：$0 \leqslant u \leqslant r$；$t \in J$；$i = 0,1,\cdots,m$。所以，$I_i(u) \leqslant (I_i^0 + \varepsilon)u$ 和 $f(t,u) \leqslant (f^0 + \varepsilon)u$。其中：$u \in \partial\Omega_r$；$t \in J$；$i = 0,1,\cdots,m$。

根据式(3)，得

$$\begin{aligned}Tu(t) = {} & \frac{t}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m} I_i(u(t_i))(1-t_i) + \lambda\int_0^1 (1-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s - \right.\\ & \left.\beta\mu\sum_{i=1}^{j} I_i(u(t_i))(\eta - t_i) - \beta\lambda\int_0^\eta (\eta - s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\} - \\ & \mu\sum_{i=1}^{k} I_i(u(t_i))(t-t_i) - \lambda\int_0^t (t-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \leqslant \\ & \frac{t}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m} I_i(u(t_i))(1-t_i) + \lambda\int_0^1 (1-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\} \leqslant \\ & \frac{1}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m}(I_i^0 + \varepsilon)u(t_i) + \lambda(f^0 + \varepsilon)\int_0^1 (1-s)h(s)u(s)\mathrm{d}s\right\} \leqslant\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m}(I_i^0+\varepsilon)+\lambda(f^0+\varepsilon)\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right\}\|u\|\leqslant\|u\|,$$

其中，$u\in\partial\Omega_r$，$t\in J$。这就得到了，对 $u\in\partial\Omega_r$，$\|Tu\|\leqslant\|u\|$。

下面，来构造 Ω_R 集，根据 f_∞ 和 I_∞^i 的定义，存在 $\bar{R}$，使得对所有 $u\in[\bar{R},\infty)$ 和 $i=1,2,\cdots,m$，有 $f(t,u)\geqslant(f_\infty-\varepsilon)u$，$I_i\geqslant(I_\infty^i-\varepsilon)u$。设 $R=\max\{2r,\gamma^{-1}\bar{R}\}$，$\Omega_2=\{u\in K:\|u\|\leqslant R\}$。如果 $\|u\|=R$，那么 $\min\limits_{s\in[\eta,1]}u(s)\geqslant\gamma\|u\|\geqslant\bar{R}$。根据边值条件 $u(1)=\beta u(\eta)\leqslant u(\eta)$，有

$$\begin{aligned}\inf_{t\in[\eta,1]}Tu(t)=Tu(1)=&\frac{1}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m}I_i(u(t_i))(1-t_i)+\lambda\int_0^1(1-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s-\right.\\&\left.\beta\mu\sum_{i=1}^{j}I_i(u(t_i))(\eta-t_i)-\beta\lambda\int_0^\eta(\eta-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\}-\\&\mu\sum_{i=1}^{m}I_i(u(t_i))(1-t_i)-\lambda\int_0^t(t-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s=\\&\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{j}I_i(u(t_i))[\eta(1-t_i)-(\eta-t_i)]+\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m}I_i(u(t_i))(1-t_i)+\right.\\&\left.\lambda\int_0^\eta h(s)f(t,u(s))[\eta(1-s)-(\eta-s)]\mathrm{d}s+\lambda\eta\int_\eta^1(1-s)h(s)f(t,u(s))\mathrm{d}s\right\}\geqslant\\&\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m}I_i(u(t_i))(1-t_i)+\lambda\eta\int_\eta^1(1-s)h(s)f(t,u(s))\mathrm{d}s\right\}\geqslant\\&\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m}(I_\infty^i-\varepsilon)u(t_i)(1-t_i)+\lambda\eta\int_\eta^1(1-s)h(s)(f_\infty-\varepsilon)u(s)\mathrm{d}s\right\}\geqslant\\&\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m}(I_\infty^i-\varepsilon)(1-t_i)+\lambda\eta\int_\eta^1(1-s)h(s)(f_\infty-\varepsilon)\mathrm{d}s\right\}\gamma\|u\|\geqslant\|u\|。\end{aligned}$$

所以，对 $u\in\partial\Omega_R$，$\|Tu\|\geqslant\|u\|$。

由定理 1 知：T 在 $\bar{\Omega}_R\backslash\Omega_r$ 中有 1 个不动点，这就是式(1) 的一个正解。证毕。

推论 设 $\mu=0$，条件 H_1)、H_2) 和 H_4) 成立，且 f^0，f_∞ 都是正数，

$$\frac{1-\beta\eta}{\beta\gamma(f_\infty\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s)}<\lambda<\frac{1-\beta\eta}{f^0\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s},\tag{6}$$

那么，式(1) 至少有 1 个正解。

同理可以证明出以下定理。

定理 3 假设条件 H_1)－H_4) 成立，且 f_0，f^∞，I_0^i 和 I_i^∞ 都是正数，且满足

$$\frac{1}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m}I_i^\infty+\lambda f^\infty\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right\}<1,\tag{7}$$

$$\frac{\beta\gamma}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m}I_0^i(1-t_i)+f_0\lambda\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s\right\}>1,\tag{8}$$

那么，式(1) 至少有 1 个正解。其中 $\eta\in J_j$；$j=0,1,\cdots,m$；$i=0,1,\cdots,m$。

推论 设 $\mu=0$，条件 H_1)、H_2) 和 H_4) 成立，且 f_0，f^∞ 都是正数，

$$\frac{1-\beta\eta}{\beta\gamma(f_0\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s)}<\lambda<\frac{1-\beta\eta}{f^\infty\int_\eta^1 h(s)\mathrm{d}s},\tag{9}$$

那么，式(1) 至少有 1 个正解。

定理 4 假设条件 H_1)－H_4) 成立，再设存在一个正数 q_0，记

$$\underline{f_0}=\min_{t\in J,0<u\leqslant q_0}\frac{f(t,u)}{u},\underline{I_0^i}=\min_{0<u\leqslant q_0}\frac{I_i(u)}{u},\text{其中},i=j+1,j+2,\cdots,m,$$

使得

$$\frac{\beta\gamma}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m}\underline{I_0^i}(1-t_i)+\underline{f_0}\lambda\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s\right\}>1,\tag{10}$$

其中，$\eta\in J_j$，$j=0,1,\cdots,m$。

i）如果 $f^0 = I_i^0 = 0$ 或 $f^\infty = I_i^\infty = 0, i = 0,1,\cdots,m$，那么式(1) 至少有 1 个正解；
ii）如果 $f^0 = I_i^0 = f^\infty = I_i^\infty = 0, i = 0,1,\cdots,m$，那么式(1) 至少有 2 个正解。

证明　根据式(10)，对 $u \in \Omega_{q_0}$，有

$$\inf_{t\in[\eta,1]} Tu(t) = Tu(1) \geqslant \frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m} I_i(u(t_i))(1-t_i) + \lambda\eta\int_\eta^1 (1-s)h(s)f(t,u(s))\mathrm{d}s\right\} \geqslant$$

$$\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m} \underline{I_0^i}(1-t_i)u(t_i) + \underline{f_0}\lambda\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)u(s)\mathrm{d}s\right\} \geqslant$$

$$\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^{m} \underline{I_0^i}(1-t_i)\gamma\|u\| + \underline{f_0}\lambda\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s\right\}\gamma\|u\| > \|u\|。$$

这就有，对 $u \in \Omega_{q_0}$，有 $\|Tu\| > \|u\|$。

i）如果 $f^0 = I_i^0 = 0$ 成立，那么选择 $0 < q_1 < q_0$ 使得 $f(t,u) \leqslant \varepsilon u, I_i(u) < \varepsilon u$，满足 $\frac{\varepsilon}{1-\beta\eta}\left\{\mu m + \lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right\} < 1$，其中，$t \in J, \varepsilon > 0, i = 1,2,\cdots,m$。因此，$f(t,u) \leqslant \varepsilon u, I_i(u) \leqslant \varepsilon u$（其中 $0 < u < q_1, u \in \partial\Omega_{q_1}, t \in J, i = 1,2,\cdots,m$），有 $Tu(t) \leqslant \frac{t}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m} I_i(u(t_i))(1-t_i) + \lambda\int_0^1 (1-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\beta\eta}(\mu m + \lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s)\|u\| < \|u\|$，其中 $u \in \partial\Omega_{q_1}, t \in J$。也就是 $u \in \partial\Omega_{q_1}$，有 $\|Tu\| < \|u\|$。

根据定理 1，T 有 1 个不动点属于 $\bar{\Omega}_{q_0}\setminus\Omega_{q_1}$。因此，式(1) 有 1 个正解。

如果 $f^\infty = I_i^\infty = 0, i = 0,1,\cdots,m$，那么存在 $N > 0$，且 $u \geqslant N, t \in J, i = 1,2,\cdots,m$，使得 $f(t,u) \leqslant \varepsilon_1 u$，$I_i(u) \leqslant \varepsilon_1 u$，满足 $\frac{\varepsilon_1}{1-\beta\eta}\left\{\mu m + \lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right\} < 1$。取 $q_2 > \max\{2q_0, \gamma^{-1}N\}$ 充分大，则对于 $u \in \partial\Omega_{q_2}$，有 $f(t,u(t)) \leqslant \varepsilon_1 u(t), I_i(u(t)) \leqslant \varepsilon_1 u(t)$，其中 $t \in J, i = 1,2,\cdots,m$。可得 $Tu(t) \leqslant \frac{t}{1-\beta\eta}\{\mu\sum_{i=1}^{m} I_i(u(t_i))(1-t_i) + \lambda\int_0^1 (1-s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{1-\beta\eta}(\mu m + \lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s)\|u\| < \|u\|$，其中 $u \in \partial\Omega_{q_2}, t \in J$。

也就是 $u \in \partial\Omega_{q_2}$，有 $\|Tu\| < \|u\|$。

再由定理 1，T 有 1 个不动点属于 $\bar{\Omega}_{q_2}\setminus\Omega_{q_0}$，即式(1) 有 1 个正解。

ii）如果 $f^0 = I_i^0 = f^\infty = I_i^\infty = 0$ 成立，$i = 0,1,\cdots,m$。

根据上面的证明很容易看到 T 有不动点 $\bar{\Omega}_{q_0}\setminus\Omega_{q_1}$ 和不动点 $\bar{\Omega}_{q_2}\setminus\Omega_{q_0}$，使得 $q_1 < \|u_1\| < q_0 < \|u_2\| < q_2$。因此，式(1) 有 2 个正解。

推论　设 $\mu = 0$，条件 H_1)、H_2) 和 H_4) 成立，且有 $\lambda > \dfrac{1-\beta\eta}{\beta\gamma f\,\underline{f_0}\,\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s}$，则

i′）如果 $f^0 = 0$ 或 $f^\infty = 0$，那么式(1) 至少有 1 个正解；
ii′）如果 $f^0 = f^\infty = 0$，那么式(1) 至少有 2 个正解。

同理，可以得到以下定理。

定理 5　假设 H_1) − H_4) 成立，再设存在一个正数 p_0，记

$$\bar{f}_0 = \max_{t\in J, 0<u\leqslant p_0} \frac{f(t,u)}{u}, \bar{I}_0^i = \max_{0<u\leqslant p_0}\frac{I_i(u)}{u}, i = 1,2,\cdots,m,$$

使得

$$\frac{1}{1-\beta\eta}\left\{\mu\sum_{i=1}^{m}\bar{I}_0^i + \bar{f}_0\lambda\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right\} < 1。\tag{11}$$

$\bar{\text{i}}$）如果 $f_0 = I_0^i = \infty$ 或 $f_\infty = I_\infty^i = \infty, i = 1,2,\cdots,m$，那么式(1) 至少有 1 个正解；
$\bar{\text{ii}}$）如果 $f_0 = I_0^i = f_\infty = I_\infty^i = \infty, i = 1,2,\cdots,m$，那么式(1) 至少有 2 个正解。

推论　设 $\mu = 0$，条件 H_1)、H_2) 和 H_4) 成立，且有 $\lambda < \dfrac{1-\beta\eta}{\bar{f}_0\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s}$。

$\bar{\text{i}}'$）如果 $f_0 = \infty$ 或 $f_\infty = \infty$，那么式(1) 至少有 1 个正解；

$\overline{\mathrm{ii}}'$）如果 $f_0 = f_\infty = \infty$，那么式(1)至少有2个正解。

在以下部分，笔者给出式(1)中正解不存在的充分条件。

定理6 假设条件 $H_1)-H_4)$ 成立，且 f_0, f_∞, I_0^i 和 I_∞^i 都是不为0的数，$i=1,2,\cdots,m$，若存在 ν，对所有的 λ,μ 满足：

$$\frac{\beta\gamma}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\nu(m-j)(1-t_i)+\nu\lambda\eta\int_\eta^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s\right\}>1, \tag{12}$$

其中 $\eta \in J_j, j=0,1\cdots,m$，那么，式(1)没有正解。

证明 取 $\nu_0 < \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{f_0, I_0^i, f_\infty, I_\infty^i\}$，则有 $\nu_0>0$。这样存在正数 $r_1, r_2, r_1<r_2$。使得对 $u\in[0,r_1], t\in J, I_i(u)\geqslant \nu_0 u, f(t,u)\geqslant \nu_0 u$，对 $u\in[r_2,+\infty), t\in J, I_i(u)\geqslant \nu_0 u, f(t,u)\geqslant \nu_0 u, i=1,2,\cdots,m$。令 $\nu = \min\left\{\nu_0, \min\limits_{t\in J, r_1<u\leqslant r_2}\frac{f(t,u)}{u}, \min\limits_{r_1<u\leqslant r_2}\frac{I_i(u)}{u}\right\}$，其中 $i=1,2,\cdots,m$。

所以，对 $u\in[0,+\infty), t\in J, i=1,2,\cdots,m$，有 $I_i(u)\geqslant \nu u, f(t,u)\geqslant \nu u$。

反之，假设 $\bar{u}(t)$ 是式(1)的1个正解。

由引理1，得到

$$\begin{aligned}
&\inf_{t\in[\eta,1]}\bar{u}(t) = \inf_{t\in[\eta,1]}T\bar{u}(t) = T\bar{u}(1) \geqslant \\
&\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^m I_i(\bar{u}(t_i))(1-t_i)+\lambda\eta\int_\eta^1(1-s)h(s)f(t,\bar{u}(s))\mathrm{d}s\right\}\geqslant \\
&\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^m \nu\bar{u}(t_i)(1-t_i)+\lambda\eta\nu\int_\eta^1(1-s)h(s)\bar{u}(s)\mathrm{d}s\right\}\geqslant \\
&\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta\sum_{i=j+1}^m (\nu\gamma\|\bar{u}\|(1-t_i)+\lambda\eta\nu\int_\eta^1(1-s)h(s)\gamma\|\bar{u}\|\mathrm{d}s\right\}\geqslant \\
&\frac{\beta}{1-\beta\eta}\left\{\mu\eta(m-j)\nu(1-t_i)+\lambda\eta\nu\int_\eta^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s\right\}\|\bar{u}\| > \|\bar{u}\|。
\end{aligned}$$

这就有 $\|\bar{u}\|\geqslant \inf\limits_{t\in[\eta,1]}T\bar{u}(t)>\|\bar{u}\|$，这与事实矛盾，证毕。

同理，可以得到以下结论。

定理7 假设条件 $H_1)-H_4)$ 成立，且 f^0, f^∞, I_i^0 和 I_i^∞ 都是不为0的数，$i=1,2,\cdots,m$，若存在 $\delta>0$，使得对所有的 λ,μ 满足：

$$\frac{1}{1-\beta\eta}\left\{\delta\eta m+\lambda\delta\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right\}<1, \tag{13}$$

式(1)不存在正解。

参考文献：

[1] BAINOV D D, SIMEONOV P S. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications[M]. Harlow: Longman Science and Technical, 1993.

[2] LI J, HUA J. Multiple positive solutions for a second-order three-point boundary value problem[J]. Appl Math Comput, 2006, 182: 258-268.

[3] JANKOWSKI T. Positive solutions of three-point boundary value problems for second order impulsive differential equations with advanced arguments[J]. Appl Math Comput, 2008, 197: 179-189.

[4] GUO D, LIU X. Multiple positive solutions of boundary value problems for impulsive differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 1995, 25: 327-217.

[5] LIU X, QIU J, GUO Y. Three positive solutions for second-order m-point boundary value problems[J]. Appl Math Comput, 2004, 156: 733-742.

[6] YAN J. Existence of positive periodic solutions of impulsive functional differential equations with two parameters[J]. J Math Anal Appl, 2007, 327: 854-868.

[7] GUO D, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones[M]. San Diego: Academic Press, 1998.

[8] MA R. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 1999, 34(4): 1-8.