第 33 卷第 2 期 河北科技大学学报 Vol. 33, No. 2
2012 年 4 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Apr. 2012

文章编号：1008-1542(2012)02-0093-04

带有积分边值条件的三阶边值问题正解的存在性

刘玉敬[1]，郭少聪[1]，郭彦平[2]

(1. 河北科技大学理学院，河北石家庄 050018；2. 河北科技大学电气信息学院，河北石家庄 050018)

摘 要：应用特征值准则研究了一类三阶带有积分边值条件边值问题正解的存在性，其中非线性项 $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足 Caratheodory 条件。在赋予非线性项一定条件下，得到该边值问题至少存在 3 个正解的充分条件。

关键词：特征值准则；格林函数；正解；边值问题；积分边值条件

中图分类号：O175 **文献标志码**：A

Existence of positive solutions of the third order boundary value problems with integral boundary conditions

LIU Yu-jing[1], GUO Shao-cong[1], GUO Yan-ping[2]

(1. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China; 2. College of Electrical Engineering and Information Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: By using eigenvalue criteria, the existence of positive solutions to the boundary value problems with integral boundary conditions is considered, where the nonlinear term $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ satisfies Caratheodory conditions. The existence of at least three positive solutions is proved for the boundary value problems when the nonlinear term meets some certain conditions.

Key words: eigenvalue criteria; Green's function; positive solution; boundary value problem; integral boundary condition

近几年，从研究二阶带有一般边值条件的微分方程多重正解存在性到偶数阶的边值问题正解的存在性，文献[1]－文献[3]都应用了算子特征值和不动点指数性质的方法，给出了一些新的结论。

物理和数学中常常出现一类带有积分边值条件的边值问题，但是由于 Green 函数难构造，有关该问题的研究成果较少。2011 年，ZHAO 等研究了带有积分边值条件的三阶边值问题[4]：

$$u'''(t)+f(t,u(t))=\theta,\quad t\in(0,1),$$

$$u(0)=\theta,\quad u''(0)=\theta,\quad u(1)=\int_0^1 g(t)u(t)\mathrm{d}t,$$

$$u(0)=\int_0^1 g(t)u(t)\mathrm{d}t,\quad u''(0)=\theta,\quad u(1)=\theta$$

解的存在与不存在性。笔者利用算子特征值的方法研究带有积分边值条件的三阶微分方程

$$\begin{cases} u'''(t)+h(t)f(t,u(t))=0, & t\in(0,1),\\ u(0)=0,\quad u''(0)=0,\quad u(1)=\int_0^1 h(t)g(t)u(t)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2011-09-26；责任编辑：张 军

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10971045)；河北省自然科学基金资助项目(A2009000664)

作者简介：刘玉敬(1976-)，女，河北唐山人，讲师，硕士，主要从事微分方程方面的研究。

和

$$\begin{cases} u'''(t)+h(t)f(t,u(t))=0, & t\in(0,1), \\ u(0)=\int_0^1 h(t)g(t)u(t)\mathrm{d}t, & u''(0)=0, \quad u(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

多重正解的存在性，其中 $f:[0,1]\times R^+\to R^+$ 的函数。本文的结果补充和完善了文献[4]的结论。

本文总是假设下列条件成立。

H_1） $f:[0,1]\times R^+\to R^+$ 满足 Caratheodory 条件，即：对任意 $u\in R^+$，$f(\cdot,u)$ 可测；对几乎处处的 $t\in[0,1]$，$f(t,\cdot)$ 连续。且对任意的常数 $l>0$，都存在 $\varphi_l\in L^\infty[0,1]$，使得对所有 $u\in[0,l]$ 以及几乎处处的 $t\in[0,1]$，有 $0\leqslant f(t,u)\leqslant\varphi_l(t)$；$H_2$） $g\in L[0,1]$ 为非负函数。$h\in L'[0,1]$，对几乎处处的 $t\in[0,1]$，$h(t)\geqslant 0$；H_3） $b\in[0,1)$，其中 $b=\int_0^1 sh(s)g(s)\mathrm{d}s$；$H_3{}^*$） $d\in[0,1)$，其中 $d=\int_0^1(1-s)h(s)g(s)\mathrm{d}s$。

1 基本引理

定义 1[1] P 为 Banach 空间 X 中一个锥，如果 X 中每个元素 $x=x^+-x^-$，其中 $x^+,x^-\in P$，则 P 为再生锥。

引理 1 （Krein-Rutman）[5] K 为实 Banach 空间 X 的一个再生锥，令 $L:X\to X$ 为紧线性算子且 $L(K)\subset K$。设 $r(L)$ 为 L 的谱半径，如果 $r(L)>0$，那么存在 $\varphi_1\in K\setminus\{0\}$，使得 $L\varphi_1=r(L)\varphi_1$。

引理 2[6] X 是一个 Banach 空间，P 为 X 中锥，$\Omega(P)$ 为 P 中一个有界开子集，设 $A:\overline{\Omega}(P)\to P$ 是一个全连续算子。那么下列结论成立：

1）如果存在 $u_0\in P\setminus\{0\}$，对 $\forall u\in\partial\Omega(P)$ 和 $\lambda\geqslant 0$，都有 $u\neq Au+\lambda u_0$。那么不动点指数 $i(A,\Omega(P),P)=0$；

2）当 $0\in\Omega(P)$，对 $\forall u\in\partial\Omega(P)$ 和 $\lambda\geqslant 1$ 都有 $Au\neq\lambda u$。那么不动点指数 $i(A,\Omega(P),P)=1$。

引理 3[4] 假设 H_1）、H_2）、H_3）成立，边值问题（1）有唯一解：$u(t)=\int_0^1 H(t,s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s$。

式中：$H(t,s)=G(t,s)+\frac{t}{1-b}\int_0^1 G(\tau,s)h(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$；$b=\int_0^1 sh(s)g(s)\mathrm{d}s$，

$$G(t,s)=\begin{cases} \frac{1}{2}t(1-s)^2-\frac{1}{2}(t-s)^2, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \frac{1}{2}t(1-s)^2, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \end{cases}$$

并且存在 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$，对所有 $t\in[\delta,1-\delta]$ 和任意 $v,s\in[0,1]$，使得：$H(t,s)\geqslant\rho H(v,s)$，其中 $\rho=4\delta^2(1-\delta)$。易证 $H(t,s)\geqslant 0$。

令：$X=C[0,1]$，其范数 $\|u\|=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$，$X$ 为 Banach 空间。定义锥 $P\subset X$，

$$P=\{u\in X\,|\,u(t)\geqslant 0\},\quad P_r=\{u\in P\,|\,\|u\|<r,r>0\},$$

$$K=\{u\in P\,|\,u(t)\geqslant\rho\|u\|,t\in[\delta,1-\delta]\},\quad K_r=\{u\in K\,|\,\|u(t)\|\leqslant r\},$$

易证 P 是 X 中的再生锥，K 为 X 中锥；P_r，K_r 为 P 中一个有界开子集。

定义算子，$A:X\to X$，$L:X\to X$，

$$Au(t)=\int_0^1 H(t,s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad Lu(t)=\int_0^1 H(t,s)h(s)u(s)\mathrm{d}s,$$

易证，$u(t)$ 为边值问题（1）的解，当且仅当 $u(t)$ 为算子 A 的不动点。

引理 4 算子 $A:P\to P$，$L:P\to P$，且 $A:P_r\to P$ 为全连续算子。

由 Arzela-Ascoli 定理易证引理成立。

记：$r(L)$ 为算子 L 的谱半径，$h=\min_{t\in[\delta,1-\delta]}\int_\delta^{1-\delta}H(t,s)\mathrm{d}s$，显然 $h>0$。

引理 5 假设 H_1），H_2）成立，则算子 L 的谱半径 $r(L)>0$。

证明 设 $u(t)\equiv 1$，由假设

$$Lu(t)=\int_0^1 H(t,s)u(s)\mathrm{d}s\geqslant\int_\delta^{1-\delta}H(t,s)\mathrm{d}s=h>0,\quad\forall t\in[\delta,1-\delta],$$

$$L^2u(t)=\int_0^1 H(t,s)Lu(s)\mathrm{d}s\geqslant h\int_\delta^{1-\delta}H(t,s)\mathrm{d}s=h^2,\quad\forall t\in[\delta,1-\delta],$$

则 $\forall t \in [\delta, 1-\delta]$，$L^k u(t) \geqslant h^k$。取范数得 $\| L^k \| \geqslant h^k$，所以 $r(L) = \lim\limits_{k\to\infty} \| L^k \|^{\frac{1}{k}} \geqslant h > 0$。

引理 6[4]　假设 $H_1)$，$H_2)$，$H_3{}^*)$ 成立，边值问题(2)有唯一解：

$$u(t) = \int_0^1 K(t,s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s。$$

式中：$K(t,s) = G(t,s) + \dfrac{1-t}{1-d}\displaystyle\int_0^1 G(\tau,s)h(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$，$d = \displaystyle\int_0^1 (1-s)h(s)g(s)\mathrm{d}s$，

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t(1-s)^2 - \dfrac{1}{2}(t-s)^2, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}t(1-s)^2, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

并且存在 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$，对所有 $t \in [\delta, 1-\delta]$ 和 $v, s \in [0,1]$，使得 $K(t,s) \geqslant \rho K(v,s)$，其中 $\rho = 4\delta^2(1-\delta)$，易知 $K(t,s) \geqslant 0$。定义算子：$A^* u(t) = \displaystyle\int_0^1 K(t,s)h(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s$。

2　主要结论

记：$\mu = \dfrac{1}{r(L)}$，$\overline{f}(u) = \sup\limits_{t\in[0,1]\setminus E} f(t,u)$，$\underline{f}(u) = \inf\limits_{t\in[0,1]\setminus E} f(t,u)$，

$$f^0 = \lim_{u\to 0_+} \sup_{t\in[0,1]\setminus E} \frac{\overline{f}(u)}{u},\quad f^\infty = \lim_{u\to\infty} \sup_{t\in[0,1]\setminus E} \frac{\overline{f}(u)}{u},\ f_0 = \lim_{u\to 0_+} \inf_{t\in[0,1]\setminus E} \frac{\underline{f}(u)}{u},\quad f_\infty = \lim_{u\to\infty} \inf_{t\in[0,1]\setminus E} \frac{\underline{f}(u)}{u},$$

其中 E 为$[0,1]$的一个子集，其测度为零。

引理 7　若 $0 \leqslant f^0 < \mu$，则存在 $r_0 > 0$，当 $r \in (0, r_0]$ 时，有 $i(A, P_r, P) = 1$。

证明：由已知，令 $\varepsilon > 0$，则 $f^0 \leqslant \mu - \varepsilon$。那么 $\exists r_0 > 0$，对所有的 $u \in [0, r_0]$ 和几乎处处的 $t \in [0,1]$，$f(t,u) \leqslant (\mu-\varepsilon)u$。由引理 2 的条件 2) 我们将证明当 $u \in \partial P_r$，$\lambda \geqslant 1$ 时 $Au \neq \lambda u$。如否，则存在 $u_0 \in \partial P_r$，$\lambda_0 \geqslant 1$，使 $Au_0 = \lambda_0 u_0$ 成立。

$$u_0(t) \leqslant \lambda_0 u_0(t) = Au_0(t) \leqslant \int_0^1 H(t,s)(\mu-\varepsilon)u_0(s)\mathrm{d}s \leqslant (\mu-\varepsilon)Lu_0(t),$$

$$Lu_0(t) \leqslant (\mu-\varepsilon)L[Lu_0(t)],$$

$$u_0(t) \leqslant (\mu-\varepsilon)^2 L^2 u_0(t) \leqslant (\mu-\varepsilon)^3 L^3 u_0(t) \leqslant \cdots \leqslant (\mu-\varepsilon)^n L^n u_0(t), n \in N。$$

$$u_0(t) \leqslant (\mu-\varepsilon)^n L^n u_0(t),$$

两边取范数得：

$$\| u_0(t) \| \leqslant \| (\mu-\varepsilon) \|^n \cdot \| L^n \| \cdot \| u_0(t) \| \Rightarrow 1 \leqslant (\mu-\varepsilon)^n \| L^n \|,$$

$$1 \leqslant (\mu-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \| L^n \|^{\frac{1}{n}} = (\mu-\varepsilon)\frac{1}{\mu} < 1，\text{矛盾}。$$

原结论成立，即：$i(A, P_r, P) = 1$。

引理 8　如果 $0 \leqslant f^\infty < \mu$，则存在 $R_0 > 0$，对每一个 $r > R_0$，有 $i(A, P_r, P) = 1$。

证明：令 $\varepsilon > 0$，则 $f^\infty \leqslant \mu - \varepsilon$。则存在 $R_1 > 0$，当 $u \geqslant R_1$ 和几乎处处的 $t \in [0,1]$，有 $f(t,u) \leqslant (\mu-\varepsilon)u$。由假设 $H_1)$，存在 L^∞ 上的函数 $\varphi_r(t)$，当 $u \in [0, R_1]$ 和几乎处处 $t \in [0,1]$，使得 $f(t,u) \leqslant \varphi_r(t)$。由此可得：当 $u \in R^+$ 和几乎处处的 $t \in [0,1]$，

$$f(t,u) \leqslant (\mu-\varepsilon)u + \varphi_r(t)。$$

$\dfrac{1}{\mu}$ 为 L 的谱半径，$(I/(\mu-\varepsilon) - L)^{-1}$ 存在。令：

$$C = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 H(t,s)\varphi_r(s)\mathrm{d}s,\quad R_0 = \| (\frac{1}{\mu-\varepsilon}I - L)^{-1}(\frac{C}{\mu-\varepsilon}) \|。$$

由引理 2 的条件 2)，我们证明当 $r > R_0$ 时，当 $u \in \partial P_r$，$\lambda \geqslant 1$ 时，$Au \neq \lambda u$。否则，存在 $u_0 \in \partial P_r$，$\lambda_0 \geqslant 1$，使 $Au_0 = \lambda_0 u_0$。

$$u_0 \leqslant \lambda_0 u_0(t) = Au_0(t) \leqslant \int_0^1 H(t,s)[(\mu-\varepsilon)u_0(s) + \varphi_r(t)]\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 H(t,s)(\mu-\varepsilon)u_0(s)\mathrm{d}s + C,$$

$$u_0(t)\leqslant(\mu-\varepsilon)Lu_0(t)+C\Rightarrow(\frac{I}{\mu-\varepsilon}-L)u_0(t)\leqslant\frac{C}{\mu-\varepsilon},$$

$$u_0(t)\leqslant(\frac{I}{\mu-\varepsilon}-L)^{-1}\frac{C}{\mu-\varepsilon},\ \|u(t)\|\leqslant R_0<r,\text{矛盾。}$$

由不动点指数性质知：对任意 $r>R_0$，$i(A,P_r,P)=1$。

引理 9 如果 $\mu<f_0\leqslant\infty$，那么存在 $\rho_0>0$，对每一个 $\rho\in(0,\rho_0]$，如果当 $u\in\partial P_\rho$ 时 $u\neq Au$，则 $i(A,P_\rho,P)=0$。

证明 令 $\varepsilon>0$，满足 $f_0\geqslant\mu+\varepsilon$。则存在有 $\rho_0>0$，当 $u\in[0,\rho_0]$ 和几乎处处的 $t\in[0,1]$，

$$f(t,u)\geqslant(\mu+\varepsilon)u。\tag{3}$$

设 $\rho\in(0,\rho_0]$，由引理2的条件1）要证：当 $u\in\partial K_\rho$，$\beta>0$，$u\neq Au+\beta\varphi_1$，其中 $\varphi_1\in K$ 为 L 对应特征值 $\frac{1}{\mu}$ 的特征函数，且 $\|\varphi_1\|=1$。若否，则存在 $u\in\partial K_\rho$，$\beta>0$ 有 $u=Au+\beta\varphi_1$。由此可得，$u\geqslant\beta\varphi_1$，且

$$Lu\geqslant\beta L\varphi_1\geqslant\frac{\beta}{\mu}\varphi_1。\tag{4}$$

由式(3)得：$u=Au+\beta\varphi_1=\int_0^1H(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\beta\varphi_1\geqslant(\mu+\varepsilon)Lu+\beta\varphi_1$。将式(4)代入可得，$u\geqslant(\mu+\varepsilon)\frac{\beta}{\mu}\varphi_1+\beta\varphi_1>2\beta\varphi_1$，反复上述过程，$u\geqslant n\beta\varphi_1$，$n\in N$，矛盾。

定义算子 $\widetilde{L}:C[0,1]\to C[0,1]$，$\widetilde{L}u(t)=\int_\delta^{1-\delta}H(t,s)u(s)\mathrm{d}s$，$t\in[\delta,1-\delta]$。易证 $\widetilde{L}:P\to P$ 且为紧算子，所以其谱半径 $r(\widetilde{L})>0$。由引理1知，存在 $\widetilde{\varphi}\in P\backslash\{0\}$，有 $\widetilde{L}\widetilde{\varphi}=r(\widetilde{L})\widetilde{\varphi}$。设 $\widetilde{\mu}=\frac{1}{r(\widetilde{L})}$。

引理 10 若 $\widetilde{\mu}<f_\infty\leqslant\infty$，则存在 R_2，对任意的 $R\geqslant R_2$，当 $u\in\partial K_R$ 时，$u\neq Au$。则 $i(A,K_R,K)=0$。

证明 由 $\widetilde{\mu}<f_\infty\leqslant\infty$，则存在 R_2，对任意的 $u>R_1$，和几乎处处的 $t\in[0,1]$，

$$f(t,u(t))>\widetilde{\mu}u,\tag{5}$$

当 $R\geqslant R_2$ 时，由引理2的条件1），只需证明对任意 $u(t)\in\partial K_R$，$\lambda>0$，有 $u-Au\neq\lambda\widetilde{\varphi}$，其中 $\widetilde{\varphi}$ 为 $\widetilde{L}$ 对应特征值 $r(\widetilde{L})$ 的特征函数。若否，则存在 $u(t)\in\partial K_R$，$\lambda>0$，$u=Au+\lambda\widetilde{\varphi}$。由式(5)可得：

$$u=Au+\lambda\widetilde{\varphi}\geqslant\widetilde{\mu}\widetilde{L}u+\lambda\widetilde{\varphi},\tag{6}$$

所以 $u\geqslant\lambda\widetilde{\varphi}$，$\widetilde{L}u\geqslant\lambda\widetilde{L}\widetilde{\varphi}=\frac{\lambda}{\widetilde{\mu}}\widetilde{\varphi}\Rightarrow\widetilde{\mu}\widetilde{L}u\geqslant\lambda\widetilde{\varphi}$。代入式(6)得：$u\geqslant2\lambda\widetilde{\varphi}$。重复此过程得，$u\geqslant n\lambda\widetilde{\varphi}$，$n\in N$，矛盾。

3 重要定理

记：$c=\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1H(t,s)\mathrm{d}s$，$m=\min\limits_{t\in[0,1]}\int_\delta^{1-\delta}H(t,s)\mathrm{d}s$。

定理 1 设存在 $0<\gamma<1$，算子 $A:P\to K$，其中 $K=\{u\in P\mid u(t)\geqslant\gamma\|u\|,t\in[\delta,1-\delta]\}$，设存在常数 $0<\mu_2<\mu_0$，$\rho_0>0$，$r_0>0$ 和 ρ_1，ρ_2，使得 $0<\rho_1<\gamma\rho_2$，满足条件：

$$\mu_0<f_0\leqslant\infty,\quad t\in[0,1],\quad 0<u(t)<\rho_0;\quad(7)\quad f(t,u)<\frac{\rho_1}{c},\quad t\in[0,1],\quad 0\leqslant u(t)\leqslant\rho_1;(8)$$

$$0\leqslant f^\infty\leqslant\mu_2,\quad t\in[0,1],\quad u(t)\geqslant r_0;(9)\ f(t,u)>\frac{\rho_2}{m},\quad t\in[\delta,1-\delta],\quad \gamma\rho_2\leqslant u(t)\leqslant\rho_2。(10)$$

则边值问题(1)至少存在3个非零正解，满足：$\rho\leqslant\|u_1\|<\rho_1<\|u_2\|<\rho_2<\|u_3\|<r$。

证明 由引理8和式(9)，存在 $r>\rho_2$，有 $i(A,P_r,P)=1$。

下证 $i(A,K_{\rho_1},K)=1$。由引理2的条件2），仅需证明当 $u\in\partial K_{\rho_1}$，$\lambda\geqslant1$ 时 $Au\neq\lambda u$。若否，则存在 $u\in\partial K_{\rho_1}$，$\lambda\geqslant1$，$Au=\lambda u$，由式(8)得：$u\leqslant\lambda u=Au=\int_0^1H(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s<\frac{\rho_1}{c}\int_0^1H(t,s)\mathrm{d}s\leqslant\rho_1$，矛盾。

下证 $i(A,K_{\rho_2},K)=0$。由引理2的条件1），仅证明当 $u\in\partial K_{\rho_2}$，$\lambda\geqslant0$ 时 $u-Au\neq\lambda$。若否，则存在

（下转第145页）

[5] WANG Y J, ZHANG C L, BI S W, et al. Preparation of ZnO nanoparticles using the direct precipitation method in a membrane dispersion micro-structured reactor[J]. Powder Technology, 2010, 202(1-3): 133-136.

[6] ZHANG S C, LI X G. Preparation of ZnO particles by precipitation transformation method and its inherent formation mechanisms[J]. Colloids and Surfaces A, 2003, 226(1-3): 35-44.

[7] 曹茂盛. 超微颗粒的制备科学与技术[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1998.

[8] 卢行芳. 超声波热效应的应用研究[J]. 浙江工贸职业技术学院学报(Journal of Zhejiang Industry & Trade Polytechnic)，2008，8(4)：47-48.

[9] 仇　燕，崔雪飞，李振侠. 超声波提取菜芙蓉花中叶黄素的研究[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology)，2008，29(1)：11-14.

[10] 闪俊杰，杜振雷，李　青，等. 超声波在化学工业中的应用[J]. 河北工业科技(Hebei Journal of Industrial Science and Technology)，2009，26(2)：127-130.

(上接第 96 页)

$u \in \partial K_{\rho_2}$，$\lambda \geqslant 0$，使得 $u = Au + \lambda \geqslant Au$。由式(10)得：

$$u \geqslant Au = \int_0^1 H(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \geqslant \int_\delta^{1-\delta} H(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s > \frac{\rho_2}{m}\int_\delta^{1-\delta} H(t,s)\mathrm{d}s \geqslant \rho_2,$$

矛盾，则 $i(A, K_{\rho_2}, K) = 0$。

设 $0 < \rho < \min\{\rho_0, \rho_1\}$，由引理 9 和式(7)，则或者 $i(A, P_\rho, P) = 0$，或者存在 $u \in \partial P_\rho$，$Au = u$。由不动点指数性质，边值问题(1)至少存在 3 个非零正解，$u_1, u_2, u_3 \in K$，满足 $\rho \leqslant \| u_1 \| < \rho_1 < \| u_2 \| < \rho_2 < \| u_3 \| < r$。

定理 2　设存在 $0 < \gamma < 1$，算子 $A: P \to K$，$\widetilde{L}: P \to K$，其中 $K = \{u \in P \mid u(t) \geqslant \gamma \| u \|, t \in [\delta, 1-\delta]\}$，设存在常数 $0 < \mu_1 < \mu_0$，$\rho_0 > 0$，$r_0 > 0$，和 ρ_1，ρ_2 使得 $0 < \frac{c\rho_2}{m} < \rho_1$，满足条件式(8)、式(10)及以下条件：

$$\tilde{\mu}_1 < f_\infty \leqslant \infty, \quad t \in [0,1], \quad 0 < u(t) < \gamma r_0; \tag{11}$$

$$0 \leqslant f^0 \leqslant \mu_1, \quad t \in [0,1], \quad 0 < u(t) \leqslant \rho_0; \tag{12}$$

则边值问题(1)至少存在 3 个非零正解，满足：$\rho < \| u_1 \| < \rho_2 < \| u_2 \| < \rho_1 < \| u_3 \| \leqslant r$。

证明　设 $0 < \rho < \min\{\rho_0, \rho_2\}$，由引理 7 和式(12)得：$i(A, P_\rho, P) = 1$。由定理 1 已证 $i(A, K_{\rho_1}, K) = 1$，$i(A, K_{\rho_2}, K) = 0$。设 $r > \max\{\rho_1, r_0\}$，由引理 10 和式(11)，则或者 $i(A, K_r, K) = 0$，或者存在 $u \in \partial K_r$，$Au = u$。由不动点指数性质，边值问题(1)至少存在 3 个非零正解 $u_1, u_2, u_3 \in K$，满足：$\rho < \| u_1 \| < \rho_2 < \| u_2 \| < \rho_1 < \| u_3 \| \leqslant r$。

注：将算子 A 换成 A^*，同样的证明方法可以得到边值问题(2)至少存在 3 个非零正解的定理。

参考文献：

[1] WEBB J R L, LAN K Q. Eigenvalue criteria for existence of multiple positive solutions of nonlinear boundary value problems of local and nonlocal type[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2006, 27: 91-115.

[2] JIANG Wei-hua. The existence of positive solutions for second-order multi-point BVPs with the first derivative[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 225: 387-392.

[3] JIANG Wei-hua. Eigenvalue criteria for existence of multiple positive solutions of high-order nonlinear BVPs[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69: 295-303.

[4] ZHAO J F, WANG P G, GE W G. Existence and nonexistence of positive for a class of third order BVP with integral boundary conditions in banach spaces[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011, 16(1): 402-413.

[5] NUSSBAUM R D. Eigenvectors of nonlinear positive operators and the linear Krein-Rutman theorem[J]. Lecture Notes in Math, 1981, 886: 309-330.

[6] GUO D, LAKSHMIKANTHAM V. Nonliear Problems in Abstract Cones[M]. San Diego: Academic Press, 1988.