第 32 卷第 6 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 32, No. 6
2011 年 12 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Dec. 2011

文章编号:1008-1542(2011)06-0524-05

一类抽象方程的解集的稳定性与本质连通区

王湘美[1],蒋　佳[2]

(1. 贵州大学理学院,贵州贵阳　550025;2. 河北科技大学经济管理学院,河北石家庄　050018)

摘　要:用集值分析的方法,讨论了抽象方程解集的稳定性,得到了通有稳定的结果,并给出了本质连通区存在的充分条件。讨论了抽象方程近似解集的稳定性,得到了通有稳定的结果,同时指出包含精确解的连通分支都是本质的,并且这样的连通分支只有有限个。最后作为应用,对非线性方程组的解集进行了讨论。

关键词:集值映射; 通有稳定性;连通分支;本质连通区;近似解

中图分类号:O225　　**文献标志码**:A

Stability of solutions to abstract equations and existence of essential components

WANG Xiang-mei[1], JIANG Jia[2]

(1. College of Sciences, Guizhou University, Guiyang Guizhou 550025, China; 2. College of Economics and Management, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: By using the method of set-mapping, the stability of the solutions to abstract equations and the existence of essential components is studied. We derived that the solutions have Generic stability. At the same time, a sufficient condition is put forward that there is at least one essential component of the solutions when this condition is satisfied. It is derived that the proximal solutions also have generic stability; moreover, the components including exact solutions are essential, and the number of the components which include the exact solutions is finite. Then the stability of the solutions to system of nonlinear equations is analyzed, and a method is proposed to solve problems of system of the nonlinear equations.

Key words: set-mapping; generic stability; component; essential component; proximal solution

1950 年,FORT 为研究连续映射不动点的稳定性,引入了本质不动点的概念[1]。因为不是所有连续映射都至少存在 1 个本质不动点,1952 年,KINOSHITA 引入了不动点集本质连通区的概念,并证明了对于任意将 Hilbert 方体映入自身的连续映射,其不动点集至少存在 1 个本质连通区[2]。在文献[3]中,俞建等给出了一个统一的本质连通区的存在性定理,并应用这个定理导出了不动点集和 Nash 平衡点的集本质连通区的存在性定理。在此基础上讨论抽象方程解集的本质连通区的存在性,给出了抽象方程本质连通区存在的充分条件。讨论了抽象方程近似解解集的稳定性,指出包含精确解的连通分支都是本质的,并且这样的连通分支只有有限个。作为应用,本文最后对非线性方程组的解集进行讨论,得到通有稳定性的结论,并指出满足凸性条件的方程总有解能被逼近(值得一提的是本文作者在参考文献[4]中曾指出,存在这样的方程,它的任意解都不能被逼近);同时近似解集的有限个连通区即可逼近方程的整体解。得益于前面的讨论,文章最后给出了一个求解非线性方程组的方法。为说明其有效性,给出了 2 个算例。

收稿日期:2011-09-15;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61065010)

作者简介:王湘美(1972-),女,湖南湘潭人,讲师,博士研究生,主要从事运筹学与控制论、非线性分析方面的研究。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

1　预备知识

设(X,d),(Y,ρ)是 2 个度量空间,2^Y 表示 Y 中所有非空子集的集合,$F:X\to 2^Y$ 是一个集值映射。

定义 1　1) 如果对 Y 中的任何开集 O,$O\supset F(x)$存在 X 中的 x 开邻域 $U(x)$,使 $\forall x'\in U(x)$,有 $O\supset F'(x)$,称 F 在 x 是上半连续的;2)如果对 Y 中的任何开集 O,$O(x)\neq\varnothing$,存在 X 中 x 的开邻域 $U(x)$,使 $\forall x'\in U(x)$,有 $O\cap F'(x)\neq\varnothing$,称 F 在 x 是下半连续的;3)如果 F 在 x 处上半连续又下半连续称 F 在 x 处连续;4)如果 $\forall x\in X$,F 在 x 处上半连续且 $F(x)$是紧集,称 F 是一个 usco 映射。

定义 2　1)称 $F(x)$的非空闭子集 $e(x)$是本质的,如果对 Y 中的任意开集 U,$U\supset e(x)$,存在 $\delta>0$,使当 $d(x,x')<\delta$ 时,有 $F'(x)\cap U\neq\varnothing$;2)如果 $F(x)$的本质集 $m(x)$是 $F(x)$中的所有本质集按包含关系为序的极小元,则称 $m(x)$是 $F(x)$的极小本质集。

定义 3　对任意 $y\in F(x)$,所有 $F(x)$中包含 y 的连通子集的和集称为 $F(x)$的一个连通区。

如果 $F(x)$是紧集,由文献[5]—[7]可知,$F(x)$的连通区是 $F(x)$的连通闭子集,从而是连通紧子集;对任意 $y_1,y_2\in F(x)$,分别包含 y_1 和 y_2 的连通区或者重合或者不相交,这样,$F(x)$就可以分解成两两不相交的有限个或无限个连通区的和集,即

$$F(x)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}C_\alpha(x),$$

其中 Λ 是一个指标集。

如果 $F(x)$的一个连通区 $C_\alpha(x)$是 $F(x)$的一个本质连通区,关于半连续函数的连续点,FORT 提供了如下著名定理[8],它可以作为通有性研究的基本工具和方法。

引理 1　(FORT)设 X 是一个 Baire 空间,Y 是一个度量空间,$F:X\to 2^Y$ 是一个 usco 映射,则存在 X 中一个稠密剩余集 Q,使 $\forall x\in Q$,F 在 x 处下半连续,从而是连续的。

如果存在 X 中一个稠密剩余集 Q,使 $\forall x\in Q$,依赖于 x 的性质 P 都成立,则称性质 P 在 X 上是通有的。因为 Q 是第 2 纲的,因此,可以说,在 Baire 分类的意义下,对 X 中的大多数点性质 P 都是成立的。

2　映射方程的解集本质连通区的存在性

设 E_1 为紧距离空间,ρ 表示距离。设 E_2 为实 Banach 空间,$\|\cdot\|$ 表示其范数。$T:E_1\to E_2$ 为一连续映射。$0\in E_2$ 为 E_2 的零元。称 $T(x)=0$ 为定义在 E_1 上的方程。若存在 $x^*\in E_1$ 使 $T(x^*)=0$ 成立,则称方程 $T(x)=0$ 在 E_1 中有解。不失一般性,假定 $T(x)=0$ 在 E_1 中可以有多解。下面定义使方程有解的连续映射集 S,$S=\{T\mid T:E_1\to E_2;T$ 在 E_1 中处处连续;$T(x)=0$ 在 E_1 中有解$\}$。在 S 中引入距离 d 如下:$\forall T_1\in S,T_2\in S$,$d(T_1(x),T_2(x))=\max_{x\in E_1}\|T_1(x)-T_2(x)\|$,显然距离 d 满足距离公理,因此 S 在距离 d 下为一距离空间,记为(S,d)。

定理 1　(S,d)为一完备距离空间。

证明　设序列$\{T_n(x)\subset S\}$为 Cauchy 列,即 $\forall\varepsilon>0$,存在不依赖于 x 的充分大实数 $N>0$,对任何正整数 m,当 $n>N$ 时,有 $d(T_n,T_{n+m})=\sup_{x\in E_1}\|T_n(x)-T_{n+m}(x)\|<\varepsilon$ 成立。$\forall x_0\in E_1$,$\|T_n(x_0)-T_{n+m}(x_0)\|\leqslant d(T_n,T_{n+m})<\varepsilon$,因此$\{T_n(x_0)\}\subset E_2$ 为一 Cauchy 列,又 E_2 完备,故 $T_n(x_0)\to y_0\in E_2(n\to\infty)$。这表明 $\forall x_0\in E_1$,有唯一确定的 $y_0\in E_2$ 与之对应。由 $x_0\in E_1$ 的任意性,因此定义了 1 个 $E_1\to E_2$ 的映射 $T_0(x)$,对任何 $x\in E_1$,有 $T_n(x)\to T_0(x)(n\to\infty)$。

下面证明 $T_0(x)$是 S 中 Cauchy 列的极限点。事实上,由$\sup_{x\in E_1}\|T_n(x)-T_{n+m}(x)\|<\varepsilon$ 出发,固定 $n>N$,对任何 $x\in E_1$,令 $m\to\infty$,总有$\sup_{x\in E_1}\|T_n(x)-T_0(x)\|\leqslant\varepsilon$ 成立。这表明(S,d)中 Cauchy 列收敛,最后证明 $T_0(x)\in S$。

1) $T_0(x)$连续。

$\forall x_1,x_2\in E_1$,$\forall\varepsilon>0$,由上可知 $d(T_n,T_0)\to 0(n\to\infty)$,因此

$$\|T_0(x_1)-T_0(x_2)\|\leqslant\|T_0(x_1)-T_n(x_1)\|+\|T_n(x_1)-T_n(x_2)\|+\|T_n(x_2)-T_0(x_2)\|,$$

不等式右端当 n 充分大时

$$\|T_0(x_1)-T_n(x_1)\|\leqslant d(T_0,T_n)<\varepsilon/3,\ \|T_n(x_2)-T_0(x_2)\|\leqslant d(T_0,T_n)<\varepsilon/3,$$

当充分大 n 固定时,$T_n(x)$连续,因此存在 $\delta>0$,当 $\rho(x_1,x_2)<\delta$ 时,有

$$\|T_n(x_1)-T_n(x_2)\|<\varepsilon/3$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

成立。可得 $\| T_0(x_1)-T_0(x_2) \|<\varepsilon$ 成立。

2) $T_0(x)=0$ 在 E_1 中有解。

首先，由 $d(T_n,T_0)\to 0(n\to\infty)$ 可知，$T_n\in S$，因此至少存在 $x_n\in E_1$，使 $T_n(x_n)=0$，当 $n=1,2,\cdots$，得 E_1 中一序列 $\{x_n\}$，由 E_1 是紧的，不妨设 $x_n x^*(n\to\infty)$（否则可取一子列），$\forall\varepsilon>0$，对充分大 n，有

$$\| T_0(x^*) \|\leqslant \| T_0(x^*)-T_0(x_n) \|+\| T_0(x_n)-T_n(x_n) \|+\| T_n(x_n) \|。$$

上式右边第1项由 $T_0(x)=0$ 的连续性，第2项由序列 $\{T_n(x)\}$ 的收敛性，对充分大 n 皆可小于 $\varepsilon/2$，第3项为零，因此 $T_0(x^*)<\varepsilon$ 成立。由 ε 的任意性可得 $T_0(x^*)=0$，即 $T_0(x)$ 在 E_1 中有解，$T_0(x)\in S$。因此 (S,d) 为一完备距离空间。

$\forall T\in S$，定义集值映射 $T:S\to 2^{E_1}$ 如下：$F(T)=\{x\mid x\in E_1, T(x)=0\}$。

定理2 集值映射 $F(T)$ 是 usco 映射。

证明 先证 $F(T)$ 是上半连续。设若不然，$\forall T\in S$，存在某一开集 $G\supset F(T)$ 及序列 $\{T_n\}\in S$，当 $n\to\infty$ 时，$d(T_n,T)\to 0$。但 $F(T_n)$ 中，对无论怎样大的 $N_i>0$，总存在 $n_i>N_i$，使 $F(T_{n_i})$ 中至少有1点 $x_{n_i}\notin G$。得一序列 $\{x_{n_i}\}\subset E_1$。因 E_1 是紧的，不妨设 $x_{n_i}\to x^*\in E_1$（否则选一子列），因此 $x^*\notin G$。注意到 $T_{n_i}(x_{n_i})=0$，因此

$$\| T(x^*) \|\leqslant \| T(x^*)-T(x_{n_i}) \|+\| T(x_{n_i})-T_{n_i}(x_{n_i}) \|。$$

不等式右边第1项由 T 的连续性，第2项由 $d(T_{n_i},T)\to 0(n_i\to\infty)$，可得 $\| T(x^*) \|=0$，即 $x^*\in F(T)\subset G$，矛盾。

再证 $F(T)$ 是紧的。为此只需证明 $F(T)$ 是闭的。因 T 连续，闭性显然。

综上，集值映射 $F(T)$ 是 usco 映射。

推论1 集值映射 $F(T)$ 在 S 上是通有连续的，即集值映射 $F(T)$ 在 S 上是通有稳定的。

下面给出方程本质连通区存在的充分条件。

定义4 设 $\mu(x),\lambda(x)$ 为定义在 E_1 上的非负实连续泛函，且 $\mu(x)+\lambda(x)\equiv 1$。

$\forall T_1,T_2\in S$，若 $\mu(x)T_1(x)+\lambda(x)T_2(x)\in S$，则称 S 为凸集（S 定义如前）。

定理3 若 S 是凸集，则 $\forall T\in S$，方程 $T(x)=0$ 的解集 $F(T)$ 至少存在一个本质连通区。

证明 证明分2步进行。第1步证明 $\forall T\in S, F(T)$ 存在极小本质集。第2步证明极小本质集是连通的。第1步的证明见文献[3]。

下面证明第2步。

$\forall T\in S, F(T)$ 为一上半连续紧值映射（定理2），因此存在极小本质集 $Z\subset F(T)$。若 Z 不是连通集，则 $Z=C_1\cup C_2$，这里 C_1,C_2 为闭集，且 $C_1\cap C_2=\varnothing$。因 Z 是极小本质集，所以 C_1,C_2 均不是本质集。在 E_1 中，由隔离性定理，存在开集 G_1,G_2，使 $G_1\supset C_1, G_2\supset C_2$，且 $G_1\cap G_2=\varnothing$。另一方面，因 C_1,C_2 不是本质集，因此一定存在开集 G'_1,G'_2 和 S 中2个序列 $\{T_n^{(1)}\},\{T_n^{(2)}\}$ 满足 $d(T_n^{(1)},T)\to 0, d(T_n^{(2)},T)\to 0$，使得 $C_1\subset G'_1$，$F(T_n^{(1)})\cap G'_1=\varnothing$；$C_2\subset G'_2, F(T_n^{(1)})\cap G'_1=\varnothing$。取 $G_1\cap G'_1=U_1, G_2\cap G'_2=U_2$，则 U_1 为开集且 $C_1\subset U_1$，U_2 为开集且 $C_2\subset U_2$，有 $U_1\cup U_2=\varnothing$。在 E_1 中定义非负实连续泛函如下：

$$\lambda(x)=\frac{\rho(x,U_1)}{\rho(x,U_1)+\rho(x,U_2)};\quad \mu(x)=\frac{\rho(x,U_2)}{\rho(x,U_1)+\rho(x,U_2)},$$

在 S 中构造序列 $\{T_n(x)\}$ 如下：

$$T_n(x)=\mu(x)T_n^{(1)}(x)+\lambda(x)T_n^{(2)}(x),\quad n=1,2,\cdots,$$

由 S 的凸性假设，$T_n(x)\subset S$。容易证明当 $n\to\infty$ 时，$d(T_{n_i},T)\to 0$。因开集 $U_1\cup U_2\supset Z$，Z 是极小本质解，因此当 $d(T_{n_i},T)\to 0$ 时，对充分大 $N>0$，当 $n>N$ 时，总有 $F(T_n)\cap(U_1\cup U_2)\neq\varnothing$。设 x^* 属于这交集内的一点，当 $x^*\in F(T_n)$ 时，意味着

$$T_n(x^*)=\mu(x^*)T_n^{(1)}(x^*)+\lambda(x^*)T_n^{(2)}(x^*)=0,$$

因此 $x^*\in U_1$ 或 $x^*\in U_2$。当 $x^*\in U_1$ 时 $\lambda(x^*)=0$，即得 $T_n^{(1)}(x^*)=0$，这表明 $x^*\in F(T_n^{(1)})$，这与 $F(T_n^{(1)})\cap U_1=\varnothing$ 矛盾；当 $x^*\in U_2$ 时，矛盾亦然。

因此极小本质集是连通的。当对 $F(T)$ 进行连通区分解时，因极小本质集连通，它必被某一连通区包含，从而该连通区是本质的。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3　映射方程的近似解

首先，$\forall T\in S$，称 $T(x)=0$ 为原方程，称 $\| T(x)=0 \|$ 为原方程的范数方程，显然此 2 方程解集相同。

定义 5　任给实数 $\delta>0$，$\forall T\in S$，定义集值映射 $F_\delta(T):S\to 2^{E_1}$ 如下：

$$F_\delta=\{x \mid \| T(x) \|\leqslant\delta, x\in E_1\},$$

称 $F_\delta(T)$ 为方程 $T(x)=0$ 在精度为 δ 时的近似解集。显然 $F(T)\subset F_\delta(T)$。

关于集值映射 $F_\delta(T)$，有如下定理。

定理 4　$\forall T\in S$，$F_\delta(T)$ 是 usco 映射。

证明　先证 $F_\delta(T)$ 是紧的。因 $T:E_1\to E_2$ 为连续映射，而 E_1 关于范数连续，因此 $\| T \|$ 为 $E_1\to R_+$ 的连续泛函（R_+ 为非负实数集）。所以 E_1 中使 $\| T(x) \|\leqslant\delta$ 的集合 $F_\delta(T)$ 是闭的。又因 E_1 是紧的，因此 $F_\delta(T)$ 也是紧的。至于 $F_\delta(T)$ 的上半连续性，只要逐句重复定理 2 中对应证明即得。

定理 5　$\forall T\in S$，精度 δ 给定。$C\subset F_\delta(T)$ 为 $F_\delta(T)$ 中一个连通区。若 $C\cap F(T)\neq\varnothing$，则 C 是 $F_\delta(T)$ 的本质连通区。

证明　在 E_1 中任给开集 $G\supset C$。在 S 中，任给序列 $\{T_n(x)\}$ 使 $d(T_n,T)\to 0\ (n\to\infty)$ 对给定的 $\delta>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时 $d(T_n,T)=\sup_{x\in E_1}\| T_n(x)-T(x) \|<\delta$ 成立，因 $C\cap F(T)\neq\varnothing$，设 $x^*\in C\cap F(T)$，由 $x^*\in F(T)$，可知 $T(x^*)=0$，因此当 $n>N$ 时 $\| T_n(x^*) \|=\| T_n(x^*)-T(x^*) \|<\delta$，即 $x^*\in F_\delta(T_n)$。因此当 n 充分大时，$F_\delta(T_n)\cap G\neq\varnothing$，依定义，$C$ 是 $F_\delta(T)$ 的本质连通区。

若将 E_1 的性质加强，还会有更深入的结论。

定理 6　若 E_1 是紧局部连通距离空间，则 $\forall T\in S$，$\delta>0$ 给定，在 $F_\delta(T)$ 的连通区分解 $F_\delta(T)=\bigcup_{i\in I}C_i$（$I$ 为指标集）中，只有有限多个 C_i 与 $F(T)$ 交集非空。即包含方程 $T(x)=0$ 的解的连通区 C_i 只有有限个。

证明　有无限多个 C_i 与 $F(T)$ 交集非空，不失一般性，可设 $C_i\cap F(T)\neq\varnothing$，$i=1,2,\cdots$。选 $x_i\in C_i\cap F(T)$，得一序列 $\{X_n\}\subset E_1$。由 E_1 的紧性可知 $\{x_n\}$ 在 E_1 中收敛于 $x^*\in E_1$（否则选一子列），由 $T(x)$ 的连续性，$T(x^*)=0$，所以 $x^*\in F(T)$。$F(T)\subset F_\delta(T)$，故 x^* 必属于 $C_1,C_2,\cdots$ 诸连通区之一，不妨设 $x^*\in C_1$。由 E_1 的局部连通性及到 $T(x)$ 的连续性，存在一个包含 x^* 的连通邻域 $U(x^*)\subset E_1$ 且 $U(x^*)\subset F_\delta(T)$。而当 $\rho(x_n,x^*)\to 0$ 时，对充分大 N，当 $n>N$ 时，$x_n\in U(x^*)$。按连通区分解原则，C_1 应是包含 x^* 在内的一切属于 $F_\delta(T)$ 的连通集的并集，因此 $U(x^*)\subset C_1$。所以当 $n>N$ 时，$x_n\in C_1$，但 $x_n\in C_n$，而 $C_1\cap C_n=\varnothing$，矛盾。

4　应　用

作为本文的应用，笔者具体研究非线性方程组解集的逼近问题。

设 R^n 为 n 维欧氏空间，$D\subset R^n$ 为一个紧连通集（例如为一个 R^n 中的矩形），R^m 为 m 维欧氏空间，定义 $F:D\to R^n$ 为

$$\boldsymbol{F}(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_m(x)\end{pmatrix},\quad x\in D\subset R^n,$$

其中 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 为定义在 D 上的 m 个连续函数，定义 $\| F \|$ 为

$$\| F \|=\max_{x\in D}\Big(\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

显然，满足上述条件的连续函数向量 $\boldsymbol{F}(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))^{\mathrm{T}}$ 的全体在上述范数意义下为一个 Banach 空间。这样本文中 $E_1=D$，E_2 为向量 $\boldsymbol{F}(x)$ 构成的 Banach 空间。$\forall T\in E_1$，$\boldsymbol{F}(x)=0$ 若在 D 中有解，则 $\boldsymbol{F}(x)=0$ 就定义了一个有解的非线性方程组。上文 S 中定义的收敛是 E_1 中在范数意义下的一致收敛。这样在 D 中有解的方程组全体就满足集 S 的全部要求，可以用本文定理给出结论。

定理 2 是说当用 $F_n(x)$ 逼近 F 时，方程组 $\boldsymbol{F}(x)=0$ 的解集对 $F_n(x)=0$ 的解集是通有稳定的。定理 3 指出，在本文凸性条件下，每个 S 中的方程组 $\boldsymbol{F}(x)=0$，总有解可以被近似方程组 $F_n(x)=0$ 的解逼近。值得一提的是笔者在文献[4]中曾指出，存在这种方程组，它的任意解皆不一定能被 $F_n(x)=0$ 的解逼近。

定理 5 及定理 6 指明方程组 $\boldsymbol{F}(x)=0$ 的整体解可被 $\| F_n(x) \|\leqslant\delta$ 的解集逼近。这虽不是新结果，但定

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

理6所指出，只要 $\| F_n(x) \| \leqslant \delta$ 的有限个连通区即可逼近方程组 $T(x)=0$ 的整解。这指示如下的求多解方法(以下是大意，详见另文)。

第1步，给定 $\delta>0$，找出一批在 D 中满足 $\| T_n(x) \| \leqslant \delta$ 的点，例如 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，本文算法采用数论网格布点，详见文献[9]与文献[10]。

第2步，用聚类方法将这 n 个点聚为 m 个类 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，具体方法见文献[11]与文献[12]。

第3步，以各类中心为初值，用迭代方法可求出一解。对每个类这样做，即可求出多解。至少这个方法对初值选取这一困惑已久的问题，给出了参考意见。为了说明这个方法的有效性，举2个实证例子。

例1(较易算例，取自参考文献[13])求解方程组：

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-1=0, \\ x_1^2-x_2=0, \end{cases}$$

容易知道该方程组共有2个实数解：

$$\begin{cases} x_1=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\approx\pm 0.786\ 151\ 377\ 757\ 45, \\ x_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\ 033\ 988\ 748\ 98, \end{cases}$$

用本文方法计算，求出2个实解：

$$\begin{cases} x_1=0.786\ 151\ 391\ 487\ 75, \\ x_2=0.618\ 033\ 993\ 623\ 87, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-0.786\ 151\ 377\ 757\ 45, \\ x_2=0.618\ 033\ 988\ 749\ 89。 \end{cases}$$

例2(较难算例，取自参考文献[14])求解非线性方程组：

$$\begin{cases} 15x_1^4x_2x_3^2+6x_1^4x_2^3+21x_1^4x_2^2x_3-144x_1^2x_2-8x_1^2x_2^2x_4-28x_1^2x_2x_3x_4-648x_1^2x_3+ \\ \quad 36x_1^2x_3^2x_4+9x_1^4x_3^3-120=0 \\ 30x_1^4x_2^3x_3-32x_2x_3x_4^2-720x_1^2x_2x_3-24x_1^2x_2^3x_4-432x_1^2x_2^2+576x_1^2x_2x_4-5\ 768x_3x_4+ \\ \quad 16x_3^2x_4^2+16x_2^2x_4^2-9x_1^4x_2^4+39x_1^4x_2^2x_3^2+18x_1^4x_2^3x_3-432x_1^2x_3^2+24x_1^2x_3^3x_4- \\ \quad 16x_1^2x_2^2x_3x_4-240x_2+5\ 148=0 \\ 216x_1^2x_2x_3-162x_1^2x_3^2-81x_1^2x_2^2+1\ 008x_2x_4-1\ 008x_3x_4-15x_1^2x_2^3x_4+15x_1^2x_2^2x_3x_4- \\ \quad 80x_2x_3x_4^2+40x_3^2x_4^2+40x_2^2x_4^2+5\ 184=0 \\ 4x_1^2x_2x_3-3x_1^2x_3^2-4x_1^2x_2^2+22x_2x_4-22x_3x_4+261=0 \end{cases}$$

用本文方法计算，求出3个实解：

$$\begin{cases} x_1=0.252\ 519\ 519\ 170\ 14, \\ x_2=11.593\ 612\ 706\ 031\ 16, \\ x_3=12.931\ 397\ 584\ 785\ 41, \\ x_4=7.915\ 625\ 252\ 128\ 98, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=0.008\ 347\ 122\ 37, \\ x_2=1\ 289.080\ 164\ 351\ 98, \\ x_3=444.090\ 767\ 057\ 38, \\ x_4=0.004\ 507\ 694\ 68, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=9.113\ 120\ 753\ 785\ 33, \\ x_2=0.377\ 082\ 441\ 374\ 98, \\ x_3=0.010\ 932\ 193\ 072\ 13, \\ x_4=-26.703\ 435\ 205\ 705\ 17。 \end{cases}$$

本算例取自蔡大用、白峰杉《现代数学计算》一书，称为 Casson-Nogues 系统。这只是一个多项式方程。该书中指出该系统有16个解，而同伦算法要算1 334条同伦曲线。该书中也未给出任一解。因为方程组中 x_1 的幂均为偶数，所以对应 $x_1>0$ 的解应有8个，作者求出了3个解，这得益于定理6的启示。

参考文献：

[1] FORT M K. Essential and nonessential fixed points[J]. Amer J Math, 1950, 72: 315-322.

[2] KINOSHITA S. On essential components of the set of fixed points[J]. Osaks J Math, 1952, 4: 19-22.

[3] 俞 建，陈国强，向淑文，等. 本质连通区的存在性和稳定性[J]. 应用数学学报(Acta Mathe Maticae Applicatae Sinica), 2004, 27(2): 201-209.

[4] 曹素元，王湘美. 非线性方程组整体解集的通有稳定性及其本质解和弱本质解[J]. 贵州工业大学学报(自然科学版)(Journal of Guizhou University of Technology (Natural Science Edition)), 2003, 32(6): 8-10.

[5] ENGELKING E. General Topology[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

(下转第535页)

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\| wf \|_{[0,\delta]} \leqslant C\omega_{\varphi^\lambda}(f, \frac{\varphi^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}})_w。$$

在$[0,\delta]$插入抛物线$h(x)$,使得

$$h(0) = 0, h^{(i)}(\delta) = g^{(i)}(\delta), i = 0, 1。$$

则$h(x)$的表达式为

$$h(x) = (\delta^{-1}g'(\delta) - \delta^{-2}g(\delta))x^2 + (2\delta^{-1}g(\delta) - g'(\delta))x。$$

取δ充分小,使得$h(x)$在$[0,\delta]$上单调,令

$$g_1(x) = \begin{cases} h(x), x \in [0,\delta]; \\ g(x), x \in [\delta, +\infty)。 \end{cases}$$

则$g_1(x) \in C_0$,显然有g_1满足式(16)。由公式$g(t) = g(x) + \int_x^t g'(u)\mathrm{d}u$,以及引理 2 和引理 3 可得到

$$w(x) \mid L_{n,a}(f,x) - f(x) \mid \leqslant$$
$$w(x) \mid L_{n,a}(f - g_1, x) \mid + w(x) \mid f(x) - g_1(x) \mid + w(x) \mid L_{n,a}(g_1, x) - g_1(x) \mid \leqslant$$
$$C(\| f - g_1 \|_w + \frac{\varphi^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}} \| \varphi^\lambda g' \|_w) \leqslant C\omega_{\varphi^\lambda}\left(f, \frac{\varphi^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}}\right)_w \leqslant C\left(\frac{\varphi^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}}\right)^\beta。$$

参考文献:

[1] CHANG Geng-zhe. Generalized Bernstein-Bézier polynomial[J]. J Comput Math, 1983,(1)4: 322-327.

[2] GUO Shun-sheng, QI Qiu-lan, LIU Guo-fen. The central approximation theorem for Baskakov-Bézier operators[J]. J Approx Theory, 2007, 147(1): 112-124.

[3] 郭顺生, 刘国芬. 关于 Szász-Durrmeyer-Bézier 算子的点态逼近[J]. 工程数学学报(Chinese Journal of Engineering Mathematics), 2008, 25(1):81-89.

[4] ZENG Xiao-ming. On the rate of the convergence of the generalized Szász type operators for functions of bounded variation[J]. J Math Anal Appl, 1998, 226(2):309-325.

[5] ZENG Xiao-ming, CHEN Wen-zhong. On the rate of convergence of the generalized Durrmeyer type operators for functions of bounded variation[J]. J Approx Theory, 2000,102(1):1-12.

[6] ZENG Xiao-ming, PIRIOU A. On the rate of convergence of two Bernstein-Bézier type operators for bounded variation functions[J]. J Approx Theory, 1998, 95(3): 369-387.

[7] DITZIAN Z, TOTIK V. Moduli of Smoothness[M]. New York :Springer-Verlag, 1987.

[8] ZHOU Ding-xuan. Weighted approximation by Szász-Mirakjan operations[J]. J Approx Theory,1994, 76(3):393-402.

[9] 宣培才,周定轩. Baskakov 算子加权逼近的收敛阶[J]. 应用数学学报(Acta Mathematicae Applicatae Sinica),1995, 18(1):129-139.

(上接第 528 页)

[6] 杨　辉,俞　建.向量拟平衡问题的本质解及解集的本质连通区[J].系统科学与数学(Journal of Syntems Science and Complexity), 2004,10(24):74-84.

[7] YU Jian, YANG Hui. The essential component of the set of equilibrium points for set-valued map[J]. J Math Anal Appl, 2004, 300: 334-342.

[8] FORT M K. Points of continuity of semicontinuous functions[J]. Publ Math Debrecen, 1951,2: 100-102.

[9] CAO Su-yuan. A algorithm of number-theoretic net for constrained optimization[J]. Proceeding of APORS'91,1991,2:400-409.

[10] 华罗庚,王　元.数论在近似中的应用[M].北京:科学出版社,1978.

[11] 张尧庭,方开泰.多元统计分析引论[M].北京:科学出版社,1982.

[12] 郭福星.多元统计分析[M]. 福建:福建科学技术出版社,1990.

[13] MOORE R E. A test for existence of solutions to nonlinear system[J]. J Anal,1977,14:611-615.

[14] 蔡大用,白峰杉.现代数学计算[M]. 北京:科学出版社,2000.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net