

文章编号: 1008-1542(2011)02-0107-03

# (Pareto-U)模型下二行动线性决策问题的 EVSI

杨艳秋, 宋立新

(吉林师范大学数学学院, 吉林四平 136000)

**摘要:** 讨论了均匀分布  $U(0, \infty)$  共轭于 Pareto 分布模型下的二行动线性决策问题的抽样信息期望值(EVSI)的计算公式。

**关键词:** (Pareto-U)模型; 二行动线性决策问题; 抽样信息期望值

中图分类号: O212.5 文献标志码: A

## Expected value of sampling information for linear decision problem on two actions under (Pareto-U) model

YANG Yan-qiu, SONG Li-xin

(Mathematics Institute, Jilin Normal University, Siping Jilin 136000, China)

**Abstract:** This study discusses the expected value of sampling information(EVSI) of the linear decision-making problem on two actions about the model of Pareto distribution conjugate in uniformly distribution (Pareto-U) model.

**Key words:** (Pareto-U) model; linear decision-making problem on two actions; expected value of sampling information

在二行动线性决策问题中, 抽样信息的获得总会增加决策者对状态的了解, 从而期望损失就会减少, 因此有必要研究这类问题的抽样信息期望值。文献[1] 文献[7]研究了5类模型下的二行动线性决策问题的抽样信息期望值问题, 但均匀分布  $U(0, \infty)$  共轭于 Pareto 分布模型((Pareto-U)模型, 简称(Pa-U)模型)下的二行动线性决策问题的抽样信息期望值(EVSI)问题尚无文献论及。笔者给出了(Pa-U)模型下的二行动线性决策问题的抽样信息期望值的计算公式。

为行文方便, 给出若干定义和说明。

**定义 1** (Pareto-U)模型, 设总体  $X$  服从  $(0, \infty)$  上的均匀分布  $U(0, \infty)$ , 即  $p(x) = \frac{1}{\infty - 0}, 0 < x < \infty$ 。  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为其一个样本,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为样本观测值。取  $\theta$  的共轭先验分布为 Pareto 分布  $Pa(t, \alpha)$ , 即

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{-\alpha-1}, & t > 0, \alpha > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

则边缘分布为

$$m(x) = \int_{t_0}^{\infty} p(X | t) p(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{-\alpha-1} dt = \frac{t_0^{-\alpha}}{n + \alpha}, t_0 = \max(t, x_1, \dots, x_n)。 \quad (1)$$

后验分布  $p(\theta | x) = \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n)} t_0^{-\alpha} t^{-\alpha-1}$  恰是  $Pa(t_0, n + \alpha)$ , 称上述为 Pareto 分布共轭于均匀分布的决策模型,

收稿日期: 2010-09-03; 责任编辑: 张 军

基金项目: 吉林省教育厅科技资助项目(吉教科合字[2007]152)

作者简介: 杨艳秋(1979), 女, 吉林四平人, 讲师, 硕士, 主要从事贝叶斯统计方面的研究。

通讯作者: 宋立新教授

记作(P&U)模型。

定义2 (二行动线性决策)模型,行动a只有2个: a1, a2, 状态 可以是离散量也可以是连续量, 收益函数 Q( , a) = { b1 + m1 , a = a1, 收益平衡点 0 = (b2 - b1) / (m1 - m2). b2 + m2 , a = a2,

设 m1 > m2, b1 < b2, 保证 0 > 0, 若 m1 < m2, 将 a1 与 a2 互换即可。

损失函数为 L( , a1) = { (m1 - m2)( 0 - ), 0, > 0; (3)

L( , a2) = { 0, 0, (m1 - m2)( - 0), > 0. (3)

利用收益函数分别算得 a1, a2 的先验收益期望值为

{ E1 = E(b1 + m1 ) = b1 + m1E , E2 = E(b2 + m2 ) = b2 + m2E . (4)

由此得 E1 - E2 = b1 - b2 + (m1 - m2)E , 将 0 代入, 得

E1 - E2 = (m1 - m2)(E - 0). (5)

于是, 根据先验信息期望准则, 当 m1 > m2 时有: 1) 当 E 0 时, a2 为最优行动; 2) 当 E > 0 时, a1 为最优行动。

同理根据后验期望准则, 有: 1) 当 E( | x) 0 时, a2 为最优行动; 2) 当 E( | x) > 0 时, a1 为最优行动。由此得到的决策函数为后验期望准则下的最优决策函数 (x)。

1 决策问题的 EVSI 定理

当 E( ) = -t / -1 0 时, a2 为最优行动, 先验 EVPI 为

EL( , a2) = + (m1 - m2)( - 0) -t / +1 d = (m1 - m2) t 0 / -1 + (m2 - m1) 0 / t . (6)

当 E( ) = -t / -1 > 0 时, a1 为最优行动, 先验 EVPI 为

EL( , a1) = 0 (m1 - m2)( 0 - ) t / +1 d = (m1 - m2) -0 + t - 0 + 0 / -1 t , 0 > t . (7)

根据后验期望准则, 当 E( | x) = (n+ )t / n+ - t 0 时, a2 为最优行动。

当 E( | x) = (n+ )t / n+ - t > 0 时, a1 为最优行动, 即最优决策函数

(x) = { a1, (n+ )t / n+ - t > 0, a2, (n+ )t / n+ - t 0. (8)

i) 当 E( | x) = (n+ )t / n+ - t 0 时, a2 为最优行动, 后验 EVPI 为

E^1x L( , (x)) = E^1x L( , a2) = + (m1 - m2)( - 0) (n+ )t^m / m+1 d = (m1 - m2) [(n+ )t^m / n+ - 1 - (n+ )t^m 0 / n+ ] . (9)

ii) 当 E( | x) = (n+ )t / n+ - t > 0 时, a1 为最优行动, 后验 EVPI 为

E^1x L( , (x)) = E^1x L( , a1) = 0 (m1 - m2)( 0 - ) (n+ )t^m / m+1 d = (m1 - m2) [( 0 - t^m 0 / n+ ) - ((n+ )t^m / -n- + 1 - (n+ )t / -n- + 1)] . (10)

定理1 后验EVPI为

$$E^x E^{1x} L(, (x)) = (m_1 - m_2) \left[ \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{1-n}}{n+1} - \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{-n}}{n+1} \right]. \tag{11}$$

证 明 用边缘分布  $m(x)$  对  $E^{1x} L(, (x))$  再次求期望值, 由式(1), 式(9), 式(10) 得后验 EVPI 期望值

$$E^x E^{1x} L(, (x)) = \int_0^1 m(x) E^{1x} L(, (x)) dx = (m_1 - m_2) \left[ t \frac{\frac{1-n}{n+1}}{n+1} - t \frac{\frac{1-n}{n+1}}{n+1} + \frac{t^{-n}(1-t^{n+1} \frac{1-n}{n+1})}{n+1} + \frac{t \frac{1-n}{n+1} - t^{1-n}}{n+1} \right] = (m_1 - m_2) \left[ \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{1-n}}{n+1} - \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{-n}}{n+1} \right].$$

定理 2 (Pa-U) 模型下的二行动线性决策问题的 EVSI 定理:

i) 当  $E( ) = \frac{t}{-1} < 0$  时,  $a_2$  为最优行动, EVSI 为

$$(m_1 - m_2) \left[ \frac{t \frac{1-n}{n+1}}{-1} - \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{1-n}}{n+1} + \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{-n}}{n+1} \right]; \tag{12}$$

ii) 当  $E( ) = \frac{t}{-1} > 0$  时,  $a_1$  为最优行动, EVSI 为

$$(m_1 - m_2) \left[ \frac{0 + t - 0 + \frac{1-n}{n+1} t}{-1} - \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{1-n}}{n+1} + \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{-n}}{n+1} \right]. \tag{13}$$

证 明 i) 抽样信息期望值为  $E L(, a_2) - E^x E^{1x} L(, (x))$ , 在(Pa-U) 模型下, EVSI 为

$$E L(, a_2) - E^x E^{1x} L(, (x)) = \left[ \frac{(m_1 - m_2) t \frac{1-n}{n+1}}{-1} + (m_2 - m_1) \frac{1-n}{n+1} t \right] - (m_1 - m_2) \left[ \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{1-n}}{n+1} - \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{-n}}{n+1} \right] = (m_1 - m_2) \left[ \frac{t \frac{1-n}{n+1}}{-1} - \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{1-n}}{n+1} + \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{-n}}{n+1} \right].$$

ii) EVSI 为  $E L(, a_1) - E^x E^{1x} L(, (x)) =$

$$(m_1 - m_2) \left[ (0 - \frac{1-n}{n+1}) + \frac{1-n}{n+1} (t \frac{1-n}{n+1} - t) \right] - (m_1 - m_2) \left[ \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{1-n}}{n+1} - \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{-n}}{n+1} \right] = (m_1 - m_2) \left[ \frac{0 + t - 0 + \frac{1-n}{n+1} t}{-1} - \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{1-n}}{n+1} + \frac{2 t \frac{1-n}{n+1} - t^{-n}}{n+1} \right].$$

## 2 EVSI 定理的应用

某药厂研制出一种新型保健药品欲投放市场, 固定成本 730 万元, 预计 10 年收回。可变成本每天 1 万元, 每盒出厂价 60 元。销售额  $X$  服从  $U(0, )$ 。通过对以往同类保健品的销售情况分析了解到 服从  $Pa(t, )$ 。现为获得抽样信息, 决定先将新产品投放到某特约经销商处, 试销售 10 d, 销售额见表 1。

表 1 销售额

Tab.1 Sales volume

天数/d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X/万元	190	208	186	218	220	200	210	212	226	230

$$\text{则 } = \frac{2}{10} (190 + 208 + 186 + 218 + 220 + 200 + 210 + 212 + 226 + 230) = 420,$$

$$S^2 = \frac{1}{10} (40^2 + 4^2 + 48^2 + 16^2 + 20^2 + 20^2 + 4^2 + 32^2 + 40^2) = 761.6,$$

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{t}{-1} = 420, \\ \frac{t^2}{(-1)^2(-2)} = 761.6, \end{cases} \text{ 得到 } \begin{cases} t = 394, \\ = 16.2, \end{cases} \text{ 即 } ( ) = Pa(16.2, 394), E( ) = 420.$$

(下转第 172 页)

## 参考文献:

- [1] TRIPATHI S K, ASHOK K, HASHMI S A. Electrochemical redox supercapacitors using PVDF-HFP based gel electrolytes and polypyrrole as conducting polymer electrode[J]. Solid State Ionics, 2006, 177: 2 979-2 985.
- [2] LI Qiang, LI Kai-xi, SUN Guo-hua, et al. A new kind of redox electrolyte electrochemical capacitor system[J]. Acta Phys Chim Sin, 2006, 22(12): 1 445-1 450.
- [3] 邓梅根, 冯义红, 方勤, 等. 超级电容器用  $MnO_2$  纳米棒的水热法合成和表征[J]. 功能材料与器件学报(Journal of Functional Materials and Devices), 2009, 15(5): 503-506.
- [4] YU Peng, ZHANG Xiong, WANG Dong-liang, et al. Shape-controlled synthesis of 3D hierarchical  $MnO_2$  nanostructures for electrochemical supercapacitors[J]. Crystal Growth & Design, 2009, 9(1): 528-533.
- [5] BEAU DROU ET E, GALL A L, SALL L A, et al. Nanostructured manganese dioxides: Synthesis and properties as supercapacitor electrode materials[J]. Electrochimica Acta, 2009, 54: 1 240-1 248.
- [6] 徐小存, 刘开宇, 殷志刚, 等.  $MnO_2$ /聚苯胺复合材料的电化学电容[J]. 电化学(Electrochemistry), 2010, 16(1): 96-101.
- [7] 曾双双, 郑明森, 董全峰. 直接还原高锰酸钾制备  $CNT/MnO_2$  复合材料[J]. 电池(Cell), 2010, 40(3): 121-123.
- [8] WU Hu+ming, VENKATESWARA C H, RAMBABU B. Electrochemical performance of  $LiNi_{0.5}Mn_{1.5}O_4$  prepared by improved solid state method as cathode in hybrid supercapacitor[J]. Materials Chemistry and Physics, 2009, 116: 532-535.
- [9] 张治安, 杨邦朝, 邓梅根, 等. 无定型氧化锰超级电容器电极材料[J]. 功能材料与器件学报(Journal of Functional Materials and Devices), 2005, 11(1): 58-62.
- [10] SUBRAMANIAN V, HONGWEI Z, WEI Bing-qing. Synthesis and electrochemical characterizations of amorphous manganese oxide and single walled carbon nanotube composites as supercapacitor electrode materials[J]. Electrochemistry Communications, 2006, 8(5): 827-832.
- [11] 查全性. 电极过程动力学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [12] 曹楚南, 张鉴清. 电化学阻抗谱导论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [13] 冬连红, 蔡晓华, 程富民, 等. 二氧化锰/多壁碳纳米管复合材料对氧还原(ORR)催化作用的初步研究[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2009, 30(1): 30-34.
- [14] 李玉佩, 李景印, 段立谦. 高性能超级电容器电极材料的研究进展[J]. 河北工业科技(Hebei Journal of Industry Science and Technology), 2009, 26(1): 56-59.

(上接第 109 页)

$$\text{工厂每天收益为 } Q(H, a) = \begin{cases} 0.003H - 0.2, & a = a_1, \text{ 投放市场,} \\ 0, & a = a_2, \text{ 不投放市场.} \end{cases}$$

因为  $H_b = 400 < E(H) = 420$ , 所以  $a = a_1$  为最优行动, 即投放市场。根据定理 2 的式(13), EVSI 为 1 582, 即抽样带来的增益为 1 582 元(所得数据由计算机程序算得)。

## 参考文献:

- [1] 侯文超. 经营管理决策分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [2] 张雪野. 经营决策方法[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1996.
- [3] 杨艳秋, 宋立新. (Ga-Ga)模型下的二行动线性决策问题的 EVSI[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版)(Journal of Hefei University of Technology (Natural Science Edition)), 2009, 32(4): 601-603.
- [4] 杨丰凯, 王德辉, 宋立新. (Be-B)模型下二行动线性决策问题的抽样信息期望值[J]. 吉林大学学报(理学版)(Journal of Jilin University (Science Edition)), 2005, 43(5): 603-606.
- [5] 王燕飞, 宋立新. (Be-b)模型下二行动线性决策问题的抽样信息期望值[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版)(Journal of Jilin Normal University (Natural Science Edition)), 2005, 26(4): 19-20.
- [6] 王燕飞, 宋立新. (IG<sub>a</sub>-Exp)模型下二行动线性决策问题的抽样信息期望值[J]. 运筹与管理(Operations Research and Management Science), 2006, 15(5): 44-47.
- [7] 许丽梅, 曾林蕊. (#P)模型下二行动线性决策问题的抽样信息期望值[J]. 应用概率统计(Chinese Journal Applied Probability and Statistics), 2003, 19(2): 193-197.