第 32 卷第 1 期 河北科技大学学报 Vol.32, No.1
2011 年 2 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Feb.2011

文章编号:1008-1542(2011)01-0015-05

带有 p-Laplacian 算子的二阶微分方程组多个正解的存在性

王 斌[1], 江卫华[2], 黄晓芹[2], 李国刚[2]

(1. 河北化工医药职业技术学院基础部, 河北石家庄 050026; 2. 河北科技大学理学院, 河北石家庄 050018)

摘 要:利用五个泛函的不动点定理,研究带有 p-Laplacian 算子的二阶微分方程组分别在 3 种边界条件下至少 3 个正解的存在性,并给出例子验证所得结论。

关键词:p-Laplacian 算子;五个泛函的不动点定理;锥;正解

中图分类号:O152.7 文献标志码:A

Existence of multiple positive solutions of second-order differential systems with p-Laplacian

WANG Bin[1], JIANG Wei-hua[2], HUANG Xiao-qin[2], LI Guo-gang[2]

(1. Department of Basic Courses, Hebei Professional and Technological College of Chemical and Pharmaceutical Engineering, Shijiazhuang Hebei 050026, China; 2. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: Using five functions fixed point theorem, we prove the existence of at least three positive solutions to second-order systems with p-Laplacian under three kinds of boundary conditions, respectively. We give an example to illustrate our result.

Key words: p-Laplacian operator; five functions fixed point theorem; cone; positive solution

对于带有 p-Laplacian 算子的微分方程的研究已有很多结论[1-4],文献[1-2]分别利用锥上的不动点定理和五个泛函的不动点定理研究了带有 p-Laplacian 算子的二阶微分方程正解的存在性。文献[3-4]分别利用锥上的不动点指数理论和锥拉伸和锥压缩不动点定理给出了带有 p-Laplacian 算子的微分方程组边值问题至少 1 个正解存在的条件,笔者利用五个泛函的不动点定理研究带有 p-Laplacian 算子的二阶微分方程组

$$\begin{cases}(\varphi_p(x'))' + a(t)f(t, x(t), y(t)) = 0, & 0 < t < 1,\\ (\varphi_p(y'))' + b(t)g(t, x(t), y(t)) = 0, & 0 < t < 1,\end{cases} \tag{1}$$

分别在

$$x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

$$x(0) - B_0(x'(0)) = y(0) - B_0(y'(0)) = 0,\ x'(1) = y'(1) = 0, \tag{3}$$

$$x'(0) = y'(0) = 0,\ x(1) + B_1(x'(1)) = y(1) + B_1(y'(1)) = 0 \tag{4}$$

的边值条件下至少有 3 个正解的存在性,其中 $\varphi_p(v) = |v|^{p-2}v$。

收稿日期:2010-06-15;修回日期:2010-10-10;责任编辑:张 军

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10875094);河北省自然科学基金资助项目(A2009000664)

作者简介:王 斌(1964-),男,河北石家庄人,副教授,主要从事微分方程方面的研究。

1　主要结果

以下用到的基本概念和定理见文献[5]。假设如下条件成立:

H1) $f, g: [0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的;

H2) $B_0(v)$ 和 $B_1(v)$ 是2个定义在 $\mathbf{R}$ 的连续奇函数, 并且存在 $m>0$, 使得对所有 $v\geqslant 0$, 有 $0\leqslant B_j(v)\leqslant mv, j=0,1$;

H3) $a(t), b(t): (0,1)\to[0,\infty)$ 是连续的, 并且在 $(0,1)$ 的任何子区间上 $a(t), b(t)$ 不恒为零, $\int_0^1 a(t)\mathrm{d}t<\infty, \int_0^1 b(t)\mathrm{d}t<\infty$。

令 $E=C[0,1]\times C[0,1]$, 范数为 $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$, 其中 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$。

首先讨论Dirichlet边值问题, 定义锥 $K\subset E$ 为 $K=\{(x,y)\in E\mid x$ 和 y 是 $[0,1]$ 上非负对称的凹函数$\}$, 易知对 $(x,y)\in K$ 和 $t_3\in(0,\frac{1}{2})$, $\min\limits_{t\in[t_3,1-t_3]}\{x(t)+y(t)\}\geqslant 2t_3\|(x,y)\|$。取 $0<t_1<t_2<\frac{1}{2}, 0<\frac{1}{r}\leqslant t_2, 0<t_3<\frac{1}{2}, D=[t_1,t_2]\cup[1-t_2,1-t_1], I=[\frac{1}{r},1-\frac{1}{r}]$, 在 K 上定义非负连续凹泛函 α 和 ψ, 非负连续凸泛函 γ, β, θ 有: $\gamma(x,y)=\max\limits_{t\in[0,t_3]\cup[1-t_3,1]}\{z(t)\}, \psi(x,y)=\min\limits_{t\in I}\{z(t)\}=z(\frac{1}{r}), \beta(x,y)=\max\limits_{t\in I}\{z(t)\}=z(\frac{1}{2}), \alpha(x,y)=\min\limits_{t\in D}\{z(t)\}=z(t_1), \theta(x,y)=\max\limits_{t\in D}\{z(t)\}=z(t_2)$, 其中 $z(t)=x(t)+y(t)$。由定义易知, 对任意 $(x,y)\in K$, 有 $\alpha(x,y)\leqslant\beta(x,y), \gamma(x,y)\leqslant\|(x,y)\|\leqslant\frac{1}{2t_3}\gamma(x,y)$。

定理1　假设H1)与H3)成立, 此外假设 $f(t,x,y), g(t,x,y)$ 关于 $t=\frac{1}{2}$ 是对称的, 并且存在非负数 $0<h=\frac{2}{r}d<d<\frac{a}{2}<a<b=\frac{t_2}{t_1}a\leqslant c$, 使 f, g 满足如下条件:

H4) 对 $\omega_1\in(0,1)$ 及任意 $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,\frac{c}{2t_3}]\times[0,\frac{c}{2t_3}]$ 有

$$f(t,x,y)\leqslant\frac{1}{\int_0^{\frac{1}{2}}a(t)\mathrm{d}t}\varphi_p(\frac{\omega_1 c}{t_3}),\ g(t,x,y)\leqslant\frac{1}{\int_0^{\frac{1}{2}}b(t)\mathrm{d}t}\varphi_p(\frac{(1-\omega_1)c}{t_3});$$

H5) 对 $\omega_2\in(0,1)$ 及任意 $(t,x,y)\in D\times([\frac{a}{2},b]\times[0,b]\cup[0,b]\times[\frac{a}{2},b])$ 有

$$f(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2}a(t)\mathrm{d}t}\varphi_p(\frac{a}{t_1}),\text{或}\ g(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2}b(t)\mathrm{d}t}\varphi_p(\frac{a}{t_1}),\text{或}$$

$$f(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2}a(t)\mathrm{d}t}\varphi_p(\frac{\omega_2 a}{t_1}),\text{且}\ g(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2}b(t)\mathrm{d}t}\varphi_p(\frac{(1-\omega_2)a}{t_1});$$

H6) 对 $\omega_3\in(0,1)$ 及任意 $(t,x,y)\in I\times([\frac{h}{2},d]\times[0,d]\cup[0,d]\times[\frac{h}{2},d])$ 有

$$f(t,x,y)<\frac{1}{\int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{2}}a(u)\mathrm{d}u}\varphi_p(\frac{2r\omega_3}{r-2}(d-\frac{c}{rt_3})),$$

$$g(t,x,y)<\frac{1}{\int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{2}}b(u)\mathrm{d}u}\varphi_p(\frac{2r(1-\omega_3)}{r-2}(d-\frac{c}{rt_3})),$$

则边值问题(1),(2)至少有3组对称正解 $(x_i,y_i), i=1,2,3$ 满足:

$$\max_{t\in[0,t_3]\cup[1-t_3,1]}\{x_i(t)+y_i(t)\}\leqslant c,\ \max_{t\in I}\{x_1(t)+y_1(t)\}<d,\ \min_{t\in D}\{x_2(t)+y_2(t)\}>a,$$

$$\max_{t\in I}\{x_3(t)+y_3(t)\}>d,\ \min_{t\in D}\{x_3(t)+y_3(t)\}<a。$$

证　明　定义算子 A, A_1, A_2 如下:

$A(x,y)=(A_1(x,y),A_2(x,y))=$

$$\begin{cases}\left(\int_0^t \phi_p\left(\int_s^{\frac{1}{2}} a(u)f(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s,\ \int_0^t \phi_p\left(\int_s^{\frac{1}{2}} b(u)g(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right), & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ \left(\int_t^1 \phi_p\left(\int_{\frac{1}{2}}^{s} a(u)f(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s,\ \int_t^1 \phi_p\left(\int_{\frac{1}{2}}^{s} b(u)g(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 ϕ_p 是 φ_p 的反函数。易知 A 为全连续算子，且 (x,y) 为问题(1) 和(2) 的解的充分必要条件是 (x,y) 是 A 的不动点。

如果 $(x,y)\in K$，易得 $(\varphi_p((A_1(x,y))'(t)))' = -a(t)f(t,x(t),y(t))\leqslant 0$，$(\varphi_p((A_2(x,y))'(t)))' = -b(t)g(t,x(t),y(t))\leqslant 0$，且 $A_1(x,y)(t)$ 和 $A_2(x,y)(t)$ 关于 $t=\frac{1}{2}$ 对称，故 A 为 K 上的自映射。

如果 $(x,y)\in\overline{P(\gamma,c)}$，那么 $\gamma(x,y)\leqslant c\Rightarrow \|(x,y)\|\leqslant\frac{1}{2t_3}\gamma(x,y)\leqslant\frac{c}{2t_3}$，由 H4) 可得 $\gamma(A(x,y))\leqslant c$，所以 $A:\overline{P(\gamma,c)}\to\overline{P(\gamma,c)}$。

下面证明文献[5] 中引理 4 的条件(A1) – (A4) 成立。易知 $\{(x,y)\in P(\gamma,\theta,\alpha,a,b,c)\mid \alpha(x,y)>a\}$ 和 $\{(x,y)\in Q(\gamma,\beta,\psi,h,d,c)\mid \beta(x,y)<d\}$ 非空。

证(A1) 的第 2 部分成立。

对 $(x,y)\in P(\gamma,\theta,\alpha,a,b,c)$，由 $\theta(x,y)\leqslant b$，$\alpha(x,y)\geqslant a$ 可得当 $t\in D$ 时有：$(x,y)\in[\frac{a}{2},b]\times[0,b]\cup[0,b]\times[\frac{a}{2},b]$。由 H5) 有：

$$\alpha(A(x,y)) = \int_0^{t_1}\phi_p\left(\int_s^{\frac{1}{2}}a(u)f(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s+\int_0^{t_1}\phi_p\left(\int_s^{\frac{1}{2}}b(u)g(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s > a。$$

下面证(A2) 的第 2 部分，对任意 $(x,y)\in Q(\gamma,\beta,\psi,h,d,c)$，由 $\psi(x,y)\geqslant h$，$\beta(x,y)\leqslant d$ 可得当 $t\in I$ 时有：$(x,y)\in[\frac{h}{2},d]\times[0,d]\cup[0,d]\times[\frac{h}{2},d]$；当 $t\in[0,1]$ 时有：$(x,y)\in[0,\frac{c}{2t_3}]\times[0,\frac{c}{2t_3}]$。由 H4) 与 H6) 可得 $\beta(A(x,y))<\frac{c}{rt_3}+d-\frac{c}{rt_3}=d$。

再证(A3) 成立，取 $(x,y)\in P(\gamma,\alpha,a,c)$，且 $\theta(A(x,y))>b$，由 A_1，A_2 凹性知，

$$\alpha(A(x,y)) = A_1(x,y)(t_1)+A_2(x,y)(t_1)\geqslant\frac{t_1}{t_2}(A_1(x,y)(t_2)+A_2(x,y)(t_2)) = \frac{t_1}{t_2}\theta(A(x,y))>a。$$

最后来证(A4)，取 $(x,y)\in Q(\gamma,\beta,d,c)$，且 $\psi(A(x,y))<h$，由 A_1，A_2 凹性知，

$$\beta(A(x,y)) = A_1(x,y)(\frac{1}{2})+A_2(x,y)(\frac{1}{2})\leqslant\frac{r}{2}(A_1(x,y)(\frac{1}{r})+A_2(x,y)(\frac{1}{r})) = \frac{r}{2}\psi(A(x,y))<d。$$

由五个泛函的不动点定理，A 在 K 上至少有 3 对不动点 (x_i,y_i)，$i=1,2,3$ 满足

$$\max_{t\in[0,t_3]\cup[1-t_3,1]}\{x_i(t)+y_i(t)\}\leqslant c,\ \max_{t\in I}\{x_1(t)+y_1(t)\}<d,\ \min_{t\in D}\{x_2(t)+y_2(t)\}>a,$$
$$\max_{t\in I}\{x_3(t)+y_3(t)\}>d,\ \min_{t\in D}\{x_3(t)+y_3(t)\}<a。$$

其次证明问题(1) 和(3) 多个正解的存在性。

定义 E 上锥 K_1 为 $K_1=\{(x,y)\in E\mid x$ 和 y 是 $[0,1]$ 上非负不减的凹函数$\}$。显然，对 $(x,y)\in K_1$，$t_3\in(0,1)$ 有：$\min_{t\in[t_3,1]}\{x(t)+y(t)\}\geqslant t_3\|(x,y)\|$，取 t_1,t_2,r 满足 $0<t_1<t_2\leqslant 1$，$0<\frac{1}{r}<1$，定义 K_1 上非负连续凹泛函 α_1，ψ_1 和非负连续凸泛函 β_1，θ_1，γ_1 为 $\gamma_1(x,y)=\max_{t\in[0,t_3]}\{z(t)\}=z(t_3)$，$\psi_1(x,y)=\min_{t\in[\frac{1}{r},1]}\{z(t)\}=z(\frac{1}{r})$，$\beta_1(x,y)=\max_{t\in[\frac{1}{r},1]}\{z(t)\}=z(1)$，$\alpha_1(x,y)=\min_{t\in[t_1,t_2]}\{z(t)\}=z(t_1)$，$\theta_1(x,y)=\max_{t\in[t_1,t_2]}\{z(t)\}=z(t_2)$，其中 $z(t)=x(t)+y(t)$。

定理 2　设 H1) – H3) 成立。此外假设存在常数 $0<h_1=\frac{d_1}{r}<d_1<\frac{a_1}{2}<a_1<b_1=\frac{t_2}{t_1}a_1\leqslant c_1$，使 $f(t,x,y)$，$g(t,x,y)$ 满足如下条件：

H7) 对 $\omega_1\in(0,1)$ 及任意 $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,\frac{c_1}{t_3}]\times[0,\frac{c_1}{t_3}]$ 有

$$f(t,x,y)\leqslant\frac{1}{\int_0^1 a(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{\omega_1 c_1}{m+t_3}\right),\quad g(t,x,y)\leqslant\frac{1}{\int_0^1 b(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{(1-\omega_1)c_1}{m+t_3}\right);$$

H_8) 对 $\omega_2\in(0,1)$，任意 $(t,x,y)\in[t_1,t_2]\times([\frac{a_1}{2},b_1]\times[0,b_1]\cup[0,b_1]\times[\frac{a_1}{2},b_1]$ 有

$$f(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{a_1}{t_1}\right),\text{或 } g(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} b(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{a_1}{t_1}\right),\text{或}$$

$$f(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{\omega_2 a_1}{t_1}\right)\text{ 且 } g(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} b(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{(1-\omega_2)a_1}{t_1}\right);$$

H_9) 对 $\omega_3\in(0,1)$，任意 $(t,x,y)\in[\frac{1}{r},1]\times([\frac{h_1}{2},d_1]\times[0,d_1]\cup[0,d_1]\times[\frac{h_1}{2},d_1])$ 有

$$f(t,x,y)<\frac{1}{\int_{\frac{1}{r}}^1 a(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{r\omega_3}{r-1}\left(d-\frac{(rm+1)c_1}{r(m+t_3)}\right)\right),$$

$$g(t,x,y)<\frac{1}{\int_{\frac{1}{r}}^1 b(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{r(1-\omega_3)}{r-1}\left(d-\frac{(rm+1)c_1}{r(m+t_3)}\right)\right),$$

则问题(1)和(3)至少存在3对正解 (x_i,y_i)，$i=1,2,3$ 满足

$$\max_{t\in[0,t_3]}\{x_i(t)+y_i(t)\}\leqslant c_1,\ \max_{t\in[\frac{1}{r},1]}\{x_1(t)+y_1(t)\}<d_1,\ \min_{t\in[t_1,t_2]}\{x_2(t)+y_2(t)\}>a_1,$$

$$\max_{t\in[\frac{1}{r},1]}\{x_3(t)+y_3(t)\}>d_1,\ \min_{t\in[t_1,t_2]}\{x_3(t)+y_3(t)\}<a_1。$$

证　明　定义 K_1 上全连续算子 T_1 为

$$T_1(x,y)=\Big(B_0\phi_p\Big(\int_0^1 a(u)f(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\Big)+\int_0^t\phi_p\Big(\int_s^1 a(u)f(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}s,$$

$$B_0\phi_p\Big(\int_0^1 b(u)g(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\Big)+\int_0^t\phi_p\Big(\int_s^1 b(u)g(u,x(u),y(u))\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}s\Big),$$

类似定理1证明可得结论成立。

最后证明问题(1)和(4)多个正解的存在性。

定义 E 上锥 K_2 为 $K_2=\{(x,y)\in E\mid x$ 和 y 是 $[0,1]$ 上非负不增的凹函数 $\}$。显然，对 $(x,y)\in K_2$，$t_3\in(0,1)$ 有：$\min_{t\in[0,t_3]}\{x(t)+y(t)\}\geqslant(1-t_3)\|(x,y)\|$。取 $0<\frac{1}{r}<1$，$0<t_1<t_2\leqslant1$，定义 K_2 上非负连续凹泛函 α_2，ψ_2 和非负连续凸泛函 β_2，θ_2，γ_2 为 $\gamma_2(x,y)=\max_{t\in[t_3,1]}\{z(t)\}=z(t_3)$，$\psi_2(x,y)=\min_{t\in[0,\frac{1}{r}]}\{z(t)\}=z(\frac{1}{r})$，

$$\beta_2(x,y)=\max_{t\in[0,\frac{1}{r}]}\{z(t)\}=z(0),\ \alpha_2(x,y)=\min_{t\in[t_1,t_2]}\{z(t)\}=z(t_2),$$

$$\theta_2(x,y)=\max_{t\in[t_1,t_2]}\{z(t)\}=z(t_1),\text{ 其中 } z(t)=x(t)+y(t)。$$

定理3　设 H_1)－H_3) 成立。另外假设存在常数 $0<h_2=\frac{(r-1)d_2}{r}<d_2<\frac{a_2}{2}<a_2<b_2=\frac{1-t_1}{1-t_2}a_2\leqslant c_2$，使 $f(t,x,y)$，$g(t,x,y)$ 满足如下条件：

H_{10}) 取 $\omega_1\in(0,1)$ 对任意 $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,\frac{c_2}{1-t_3}]\times[0,\frac{c_2}{1-t_3}]$ 有：

$$f(t,x,y)\leqslant\frac{1}{\int_0^1 a(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{\omega_1 c_2}{m+1-t_3}\right),\quad g(t,x,y)\leqslant\frac{1}{\int_0^1 b(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{(1-\omega_1)c_2}{m+1-t_3}\right);$$

H_{11}) 取 $\omega_2\in(0,1)$，任意 $(t,x,y)\in[t_1,t_2]\times([\frac{a_2}{2},b_2]\times[0,b_2]\cup[0,b_2]\times[\frac{a_2}{2},b_2])$ 有

$$f(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{a_2}{1-t_2}\right),\text{ 或 } g(t,x,y)\geqslant\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} b(t)\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{a_2}{1-t_2}\right),\text{或}$$

$$f(t,x,y) \geqslant \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{\omega_2 a_2}{1-t_2}\right) \text{ 且 } g(t,x,y) \geqslant \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} b(t)\,\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\frac{(1-\omega_2)a_2}{1-t_2}\right);$$

H12) 取 $\omega_3 \in (0,1)$，任意$(t,x,y) \in [0,\frac{1}{r}] \times ([\frac{h_2}{2},d_2] \times [0,d_2] \cup [0,d_2] \times [\frac{h_2}{2},d_2])$ 有

$$f(t,x,y) < \frac{1}{\int_0^{\frac{1}{r}} a(t)\,\mathrm{d}t}\varphi_p\left(\omega_3 r\left[d_2 - \frac{(rm+r-1)c_2}{r(m+1-t_3)}\right]\right),$$

$$g(t,x,y) < \frac{1}{\int_0^{\frac{1}{r}} b(t)\,\mathrm{d}t}\varphi_p\left((1-\omega_3) r\left[d_2 - \frac{(rm+r-1)c_2}{r(m+1-t_3)}\right]\right),$$

则问题(1) 和(4) 至少存在 3 对正解(x_i,y_i)，满足

$$\max_{t\in[t_3,1]}\{x_i(t)+y_i(t)\} \leqslant c_2,\ \max_{t\in[0,\frac{1}{r}]}\{x_1(t)+y_1(t)\} < d_2,\ \min_{t\in[t_1,t_2]}\{x_2(t)+y_2(t)\} > a_2,$$

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{r}]}\{x_3(t)+y_3(t)\} > d_2,\ \min_{t\in[t_1,t_2]}\{x_3(t)+y_3(t)\} < a_2。$$

证明　定义全连续算子 T_2 为

$$T_2(x,y) = \Big(B_1\phi_p\Big(\int_0^1 a(u)f(u,x(u),y(u))\,\mathrm{d}u\Big) + \int_t^1 \phi_p\Big(\int_0^s a(u)f(u,x(u),y(u))\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}s,$$
$$B_1\phi_p\Big(\int_0^1 b(u)g(u,x(u),y(u))\,\mathrm{d}u\Big) + \int_t^1 \phi_p\Big(\int_0^s b(u)g(u,x(u),y(u))\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}s\Big),$$

类似定理 1 证明可得结论成立。

2　示　例

考虑下列边值问题：

$$\begin{cases} (\varphi_p(x'))' + a(t)f(t,x(t),y(t)) = 0, & 0<t<1, \\ (\varphi_p(y'))' + b(t)g(t,x(t),y(t)) = 0, & 0<t<1, \\ x(0)=y(0)=x(1)=y(1)=0, \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$f(t,x,y) = \begin{cases} 8^p + \sin^2(x^2+y^2), & x^2+y^2 \geqslant 1, \\ \frac{4}{3}(x^2+y^2-\frac{1}{4})(8^p+\sin^2 1), & \frac{1}{4} < x^2+y^2 < 1, \\ 0, & x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$g(t,x,y) = \begin{cases} 8^p + \cos^2(x^2+y^2), & x^2+y^2 \geqslant 1, \\ \frac{4}{3}(x^2+y^2-\frac{1}{4})(8^p+\cos^2 1), & \frac{1}{4} < x^2+y^2 < 1, \\ 0, & x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$a(t)=b(t)=1$。取 $d=\frac{1}{4}$, $a=2$, $b=3$, $c=4+\frac{3}{4}(\frac{1}{2}8^p+1)^{\frac{1}{p-1}}$, $t_1=t_3=\frac{1}{4}$, $t_2=\frac{3}{8}$, $r=65+12(\frac{1}{2}8^p+1)^{\frac{1}{p-1}}$, $h=\frac{2}{r}d$, $\omega_1=\frac{1}{2}$, ω_2, $\omega_3 \in (0,1)$。容易验证条件 H4)，H5) 的第 1 部分和 H6) 成立，由定理 1 可得边值问题(5) 至少有 3 对正解。

参考文献：

[1] WANG Jun-yu. The existence of positive solutions for the one-dimensional p-Laplacian[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, 125(8): 2 275-2 283.

[2] GUO Yan-ping, GE Wei-gao. Three positive solutions for the one-dimentional p- Laplacian[J]. J Math Anal Appl, 2003, 286: 491-508.

[3] 王　芳，钟承奎，王彩勋. 一类一维奇异 p-Laplacian 方程组边值问题正解的存在性[J]. 兰州大学学报(自然科学版)(Journal of Lanzhou University(Natural Sciences)), 2009, 45(1): 103-106.

(下转第 42 页)

避免重复建设的较为合理的方案[7]。

户用仪表物联网上的信息交换可以双向进行,除了上面所述的户用仪表的数据上传实现抄表功能外,还可利用物联网对居民小区的户用仪表等设施传送信息,实现控制户用仪表和居民小区的各种设施的功能。

4 结语

1) 利用M-Bus总线技术构造物联网的户用仪表小区楼宇基础网络系统,具有布线简单、成本低、容量大、带载能力强、传输距离远、抗干扰能力强的特点。

2) 采用MSP430嵌入式单片机系统建立小区户用仪表主站,具有数据处理能力强、存储容量大及故障诊断的功能。

3) GPRS无线数据传输技术可实现小区户用仪表主站与城市收费管理运营公司之间的无线数据交换,是城市区域户用仪表物联网的重要环节,构建户用仪表的物联网实现了城市基础设施的有效利用。

参考文献:

[1] 周连廷. MSP430FW427在热表中的应用[J]. 单片机与嵌入式系统应用(Microcontroller & Embedded System), 2004(6): 82-84.

[2] 刘立群,孙志毅. 基于M-Bus的超低功耗数据采集系统[J]. 单片机与嵌入式系统应用(Microcontroller & Embedded System), 2006(1): 24-29.

[3] 刘慕双,邹克武. 微功耗数据远传热量表的研制[J]. 现代测量与实验室管理(Advanced Measurement and Laboratory Management), 2006(4): 5-7.

[4] 宋俊德. 浅谈物联网的现状和未来[J]. 移动通信(Mobile Communications), 2010(15): 8-10.

[5] 赵 静,喻晓红,黄 波,等. 物联网的结构体系与发展[J]. 通信技术(Communications Technology), 2010, 43(9): 106-108.

[6] 冯凌杰,张 梅,范建丰. 基于GPRS远程监控系统的通信实现[J]. 微处理机(Microprocessors), 2010(3): 36-38.

[7] 杨 倩. 物联网关键技术及应用[J]. 电信科学(Telecommunications Science), 2010(8A): 139-142.

[8] 王静哲,周永鹏. 基于GSM天线网络的远程抄表系统设计[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2003, 24(4): 53-56.

[9] 刘俊伏,刘金娥. 基于GPRS的城市路灯远程监控系统[J]. 河北工业科技(Hebei Journal of Industrial Science and Technology), 2007, 24(5): 286-288.

(上接第19页)

[4] 田元生,刘春根. p-拉普拉斯四点边值问题拟对称正解的多重性[J]. 系统科学与数学(Journal of System Science and Mathematical Science), 2010, 30(3): 349-357.

[5] ZHANG B, LIU X. Existence of multiple symmetric positive solutions of higher order Lidstone problems[J]. J Math Anal Appl, 2003, 284: 672-689.

(上接第33页)

[2] 李永刚,李和明,万书亭. 发电机转子绕组匝间短路故障特征分析与识别[M]. 北京: 中国电力出版社, 2009.

[3] SOTTILE J, TRUTT F C, LEEDY A W. Condition monitoring of brushless three-phase synchronous generators with stator winding or rotor circuit deterioration[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2006(9/10): 1 209-1 215.

[4] 葛哲学,沙 威. 小波分析理论与MATLABR2007实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2007.

[5] 张 毅,李夏青,范圣韬. 基于VC和Matlab混合编程的牵引供电故障诊断系统[J]. 北京石油化工学院学报(Journal of Beijing Institute of Petro-Chemical Technology), 2008, 16(3): 21-25.

[6] 李建明,唐心亮,韩 明,等. 基于小波包能量谱的天气雷达伺服电机故障预警系统研究[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2010, 31(3): 233-235.

[7] WOOD J W, HINDMARCH R T. Rotor winding short detection[J]. IEE Proceedings-Pt B, 1986, 133(3): 181-189.

[8] 刘教民,赵小英,魏世泽,等. TMS320C40实现图像高速采集和处理系统[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2001, 22(3): 1-5.