文章编号: 1008-1542(2011)01-0008-03

具有灰色输入率的 M/M/1 排队系统

史瑛瑛, 李智慧, 王建南

(燕山大学理学院, 河北秦皇岛　066004)

摘　要: 针对M/M/1 排队模型, 对其输入率的不确定性做了研究。在输入率中引入灰参数, 产生了灰色输入率, 给出了它的基本模型, 并研究了其灰平稳分布和各项灰指标。且将各个灰指标进行白化, 求出了其白化值。

关键词: M/M/1 排队系统; 灰数; 灰色输入率

中图分类号: O211.6　　文献标志码: A

Study on M/M/1 queuing system with gray input rate

SHI Ying-ying, LI Zhi-hui, WANG Jian-nan

(Department of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: For the M/M/1 queuing model, this paper researches into the uncertainty of its input rate. The gray parameters are introduced into input rate, so the gray input rates are formed, and its basic model is given. Furthermore, the paper studies its gray stationary distribution and gray indicators. Every gray indicator is whitened, and the whitening values are obtained.

Key words: M/M/1 queuing system; grey number; gray input rate

具有可变输入率的 M/M/1 排队模型是排队论的一个重要内容。在日常生活中, 经常看到顾客到达某服务台(窗)前, 发现顾客较多而产生犹豫, 确定是否加入队列等候服务。一般而言, 到达的顾客进入系统的概率随当时的队长而发生变化。以往文献讨论了用 $_k$ 表示当系统队长为 k 时, 新来的顾客加入队列的概率, 显然有 $_0 = 1$ 且 $\lim_k \ _k = 0$。文献[1]讨论了到达的顾客以概率 $_k = \frac{1}{k+1}$ 加入队列排队等候服务的情况; 文献[2]引入了 参数(> 0), 讨论了 $_k = \frac{1}{k+1}$ 的情形, 使顾客进入系统的概率与顾客数 k 的关系更切合实际情况; 文献[3]讨论了 $_k = \ ^{-k}(k \quad N, \ > 1)$ 的情形。而在实际生活中, 以上概率并不准确, 因为顾客在确定是否加入队列等候服务时, 要依情况而定。有些顾客到达时, 由于还有其他事急着办, 只要队列中有人, 他就要离开, 除非人数极少或服务较快; 而有些顾客急于接受此服务, 即使队列中人数再多, 也要等待。所以到达的顾客进入系统的概率带有很大的不确定性。为此, 笔者引进灰数作为不确定的信息, 且这些信息被带进 M/M/1 排队系统中, 产生灰解, 可以通过分析灰解的白化值实现所需的系统指标。为此, 笔者讨论了到达的顾客以概率 $_k(\quad) = \frac{1}{k \quad + 1}$ 加入队列排队等候服务的情况。

1　模型假设

1)设系统中有 1 个服务台。

收稿日期: 2010-08-30; 责任编辑: 张　军

作者简介: 史瑛瑛(1985-), 女, 河北邢台人, 硕士研究生, 主要从事排队系统与优化方面的研究。

2)系统对每个顾客的服务时间 T 服从参数为　的指数分布。

3)顾客到达系统的时间间隔服从参数为　的指数分布。

4)顾客的到达时间与服务时间独立, 且系统容量为　。

5)到达的顾客加入队列排队等候服务的概率 $_k(\quad)=\dfrac{1}{k\quad+1}$($k$　**N**,　为正灰数)。

2　数学模型

定义 **1**[4]　设区间灰数　$[a, b](0<a<b)$, 其白化值为 $\tilde{}=a+(1-)b$,　$[0, 1]$。

针对灰色 M/M/1 排队模型, 可把灰数的相关概念与 M/M/1 排队模型相结合, 从而给出新的定义。

定义 **2**　设区间灰数　$[a, b](0<a<b)$, 则 $_k(\quad)=\dfrac{1}{k\quad+1}$($k$　**N**,　为正灰数), 称为到达的顾客加入队列排队等候服务的概率。

针对以上模型假设, 我们给出灰生灭过程的定义。

定义 **3**　令 $X_t(\quad)$ 表示时刻 t 系统中的顾客数(队长), 设$\{X_t(\quad), t\quad 0\}$ 为一个随机过程, 若 $X_t(\quad)$ 的概率分布有如下性质:

1)给定 $X_t(\quad)=\tilde{}(k)$, 到下一个生(顾客到达)的间隔时间服从参数为 $_k(\quad)(k=0, 1, 2,\quad,)$ 的负指数分布;

2)给定 $X_t(\quad)=\tilde{}(k)$, 到下一个灭(顾客到达)的间隔时间服从参数为 $_k(k=0, 1, 2,\quad)$ 的负指数分布;

3)同一时刻只可能发生一个生或一个灭(即同时只能有 1 个顾客达到或离去),

则称$\{X_t(\quad), t\quad 0\}$为灰生灭过程。

由灰生灭过程的定义, 对灰色 M/M/1 排队模型, 有

$$\begin{cases}\text{生率}\ _k(\quad)=\dfrac{\qquad}{k\quad+1}, k=0, 1, 2,\quad\text{且}\quad\text{是正灰数},\\ \text{灭率}\ _k=\quad, k=1, 2,\quad,\end{cases}$$

其状态转移为

$$\underset{\mu}{\overset{\lambda}{\boxed{0}}}\rightleftharpoons\underset{\mu}{\overset{\lambda\alpha_1(\otimes)}{\boxed{1}}}\rightleftharpoons\underset{\mu}{\overset{\lambda\alpha_2(\otimes)}{\boxed{2}}}\rightleftharpoons\cdots\underset{\mu}{\overset{\lambda\alpha_{k-1}(\otimes)}{\boxed{k-1}}}\rightleftharpoons\underset{\mu}{\overset{\lambda\alpha_k(\otimes)}{\boxed{k}}}\rightleftharpoons\underset{\mu}{\overset{\lambda\alpha_{k+1}(\otimes)}{\boxed{k+1}}}\rightleftharpoons\cdots\ 。$$

3　平稳分布

由排队论的原始定义, $p_k(t)$ 表示在时刻 t 系统中有 k 个顾客的概率, 当 t　　时, $p_k=\lim_t p_k(t)$ 为系统的平稳分布; 而在本文中, 针对所建立的灰色 M/M/1 排队模型, 给出一个新的定义。

定义 **4**　令 $p_{k_t}(\quad)=p\{X_t(\quad)\}$ 表示在时刻 t 灰色排队系统中有 k 个顾客的概率, 当 t　　时, 称 $p_k(\quad)=\lim_t p_{k_t}(\quad)$ 为系统的灰平稳分布。本模型中灰平稳分布表示为

$$p_k(\quad)=\lim_t p_k(t)=\ ^k\frac{1}{(\quad+1)(2\quad+1)\quad[(k-1)\quad+1]}p_0(\quad),\quad k>1,$$

其中: $=$ —; $p_0(\quad)=\left\{1+\quad+\dfrac{^2}{+1}+\dfrac{^3}{(\quad+1)(2\quad+1)}+\quad+\dfrac{^k}{(\quad+1)(2\quad+1)\quad[(k-1)\quad+1]}+\right\}^{-1}$。

由状态转移图列出 k 氏方程:

对 0 状态有 $p_0(\quad)=\quad p_1(\quad)\quad p_1(\quad)=—p_0(\quad)=\quad p_0(\quad)$;

对 1 状态有 $\dfrac{\qquad}{+1}p_1(\quad)=\quad p_2(\quad)\quad p_2(\quad)=\dfrac{^2}{+1}p_0(\quad)$;

对 2 状态有 $\dfrac{\qquad}{2\quad+1}p_2(\quad)=\quad p_3(\quad)\quad p_3(\quad)=\dfrac{^3}{(\quad+1)(2\quad+1)}p_0(\quad)$;

对 $k-1$ 状态有 $\frac{}{(k-1)+1}p_{k-1}(\ )=p_k(\ )\ p_k(\ )=\frac{k}{(\ +1)(2\ +1)\ [(k-1)\ +1}p_0(\ )$。

所以其灰色平稳分布为 $p_k(\ )=\lim_t p_k(t)=\ ^k\frac{1}{(\ +1)(2\ +1)\ [(k-1)\ +1]}p_0(\ ),\ k>1$, 其中 $=$ 一。

由正则条件 $\sum_{k=0}p_k(\ )=1$,

$$p_0(\ )=\left\{1+\ \ +\frac{^2}{\ +1}+\frac{^3}{(\ +1)(2\ +1)}+\ \ +\frac{^k}{(\ +1)(2\ +1)\ [(k-1)\ +1]}+\right\}^{-1}。$$

设区间灰数为 $[a,b](0<a<b)$, 将其白化值取为 $\tilde{}=a+\ (b-a),\ \ [0,1]$。所以其灰色平稳分布的白化值为

$$p_k(\tilde{}\ )=\lim_t p_k(t)=\ ^k\frac{1}{\tilde{}(\ +1)(2\ \tilde{}+1)\ [(k-1)\ \tilde{}+1]}p_0(\tilde{}\ ),\ k>1,$$

$$p_0(\tilde{}\ )=\left\{1+\ \ +\frac{^2}{\tilde{}+1\ \ (\ +1)(2\ \tilde{}+1)}+\frac{^3}{\tilde{}(\ +1)(2\ \tilde{}+1)\ \ [(k-1)\ \tilde{}+1]}+\right\}^{-1}。$$

值得注意的是: 令 $\tilde{}=1, p_0(\tilde{}\ )p_0(1)=[1+\ \ +\frac{^2}{2!}+\frac{^3}{3!}+\ \ ]^{-1}=e^{-}$, 即有 $p_k=\frac{^k}{k!}e^{-}$, $(k=0,1,2,\ \ )$, 即平稳分布为参数是 的泊松分布。

4 系统的主要指标

1) 顾客的灰色平均输入率

$$\bar{}(\ \ )=\sum_{k=0}\ ^k(\ \ )p_k(\ \ )=\ p_0(\ \ )+\sum_{k=1}\frac{^k}{(\ +1)(2\ +1)\ \ [(k-1)\ +1](k\ +1)}p_0(\ \ )=$$

$$p_0(\ \ )(1+\sum_{k=1}\frac{^k}{(\ +1)(2\ +1)\ \ [(k-1)\ +1](k\ +1)})。$$

2) 平均队长

$$\overline{N}=\sum_{k=1}kp_k(\ \ )=\sum_{k=1}k\frac{^k}{(\ +1)(2\ +1)\ \ [(k-1)\ +1]}p_0(\ \ )。$$

3) 平均等待队长

$$\overline{N}_q=\sum_{k=1}kp_{k+1}(\ \ )=\sum_{k=1}k\frac{^{k+1}}{(\ +1)(2\ +1)\ \ [(k-1)\ +1][k\ +1]}p_0(\ \ )。$$

4) 系统的灰色损失概率 $p_{损}$

设 $_k(\ \ )$ 表示当系统队长为 k 时, 新来的顾客加入队列的概率

$$p_{损}=\sum_{k=1}p_k(\ \ )(1-\ _k(\ \ ))=\sum_{k=1}p_k(\ \ )-\sum_{k=1}\ _k(\ \ )p_k(\ \ )=$$

$$1-p_0(\ \ )-\sum_{k=1}\frac{1}{k\ +1}\frac{^k}{(\ +1)(2\ +1)\ \ [(k-1)\ +1]}p_0(\ \ )=$$

$$1-p_0(\ \ )(1+\sum_{k=1}\frac{^k}{(\ +1)(2\ +1)\ \ [(k-1)\ +1](k\ +1)})=$$

$$1-\frac{}{(\ \ )}。$$

若以上各指标中灰数的白化值为 $\tilde{}=a+\ (b-a),\ \ [0,1]$, 给出一个 值, 灰数 就会有一个白化值 $\tilde{}$ 与其相对应。所以 $\tilde{}=a+\ (b-a),\ \ [0,1]$。

则以上各指标的白化值即为

(下转第 **102** 页)

14-16.
[7] 吴军见, 朱延美, 王 栋, 等. 固定化细胞技术在废水治理中的应用及降解动力学研究进展[J]. 辽宁化工(Liaoning Chemical Industry), 2002, 31(1): 20-25.
[8] 吴 莎. 光合细菌处理 VB_{12} 废水降解动力学研究[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2008, 29(2): 242-245.
[9] 吴 莎. 光合细菌- 膜生物反应器处理 VB_{12} 废水的研究[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2008, 29(1): 23-26.
[10] 刘 瑛, 陈运峰. 高效液相色谱法测定土霉素片的含量[J]. 中国药事(Chinese Pharmaceutical Affairs), 2004, 18(5): 300-301.

(上接第 **10** 页)

$$\bar{L}(\tilde{\ }) = p_0(\tilde{\ })\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(\tilde{\ }+1)(2\tilde{\ }+1)\cdots[(k-1)\tilde{\ }+1](k\tilde{\ }+1)}\right);$$

$$\bar{N}(\tilde{\ }) = \sum_{k=1}^{\infty}kp_k(\tilde{\ }) = \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{k}{(\tilde{\ }+1)(2\tilde{\ }+1)\cdots[(k-1)\tilde{\ }+1]}p_0(\tilde{\ });$$

$$\bar{N}_q(\ ) = \sum_{k=1}^{\infty}kp_{k+1}(\tilde{\ }) = \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{k+1}{(\tilde{\ }+1)(2\tilde{\ }+1)\cdots[(k-1)\tilde{\ }+1][k\tilde{\ }+1]}p_0(\tilde{\ });$$

$$p_{损}(\tilde{\ }) = \sum_{k=1}^{\infty}p_k(\tilde{\ })(1-\ _k(\tilde{\ })) = 1-p_0(\tilde{\ })\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(\tilde{\ }+1)(2\tilde{\ }+1)\cdots[(k-1)\tilde{\ }+1](k\tilde{\ }+1)}\right)。$$

例: 列车售票厅只有 1 个售票窗口, 假定顾客到达后加入队列的概率为 $_k(\ ) = \frac{1}{k\ +1}$(k **N,** 为正灰数), 即 $_k$ 不只依赖队长 k, 还依赖灰参数 的取值, 本模型假定 $[0.5, 3]$(的区间范围是通过抽样调查进行估计的), = 0.4, = 0.5。试求相应指标。

可见 $= \frac{0.4}{0.5} = 0.8$, 当顾客数 $k = 50$ 时, 顾客留下等待服务的概率为 $_k(\ )$ $[0.006\,6, 0.038\,5]$, 概率很小, 所以可以把顾客数 $k = 50$ 近似为该售票口接待顾客的上限。又因为 $[0.5, 3]$, 所以 的白化值为 $\tilde{\ } = a + (b-a)$, $[0, 1]$。当求出各灰色指标值后, 再给出一个 值对其进行白化。

$p_0(\ ) = \left\{1+\ +\frac{2}{\ +1}+\frac{3}{(\ +1)(2\ +1)}+\ +\frac{50}{(\ +1)(2\ +1)\cdots[49\ +1]}+\right\}^{-1}$。因为 $[0.5, 3]$, 将其带入 $p_0(\ )$, 得 $p_0(\ )$ $[0.405, 0.505]$。

同理:

$\bar{L}(\ )$ $[0.200, 0.371]$; $\bar{N}(\ )$ $[0.672, 1.254]$; $\bar{N}_q(\ )$ $[0.538, 1.003]$; $p_{损}(\ )$ $[0.072, 0.501]$。

通过调研, 笔者给出 值, 使 = 0.4, 则 $p_0(\tilde{\ })$ 0.445; $\bar{N}(\tilde{\ })$ 0.905; $\bar{N}_q(\tilde{\ })$ 0.724; $p_{损}(\tilde{\ })$ 0.244。

5 结 论

在 M/M/1 排队系统中, 笔者引入了灰参数使到达的顾客以概率 $_k(\ ) = \frac{1}{k\ +1}$ 加入队列排队等候服务, 示例结果表明该方法较符合实际, 丰富了 M/M/1 排队系统理论。

参考文献:

[1] 陆传赉. 排队论[M]. 北京: 北京邮电学院出版社, 1993.
[2] 台文志, 高世泽. 一类具有可变输入率的排队模型[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版) (Journal of Chongqing Normal University(Natural Science edition)), 2009, 26(1): 69-72.
[3] 台文志, 敖 姗. 具有可变输入率的 M/M/1 排队模型的一个注解[J]. 西南民族大学学报(自然科学版)(Journal of Southwest University for Nationalities(Natural Science edition)), 2009, 35(3): 485-488.
[4] 邓聚龙. 灰色预测与灰色决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2000.
[5] 唐应辉, 唐小我. 排队论基础与分析技术[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
[6] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.