文章编号:1008-1542(2010)06-0492-05

# 构造信息势场的一个偏微分方程模型

周　彬[1],穆春来[2],姚　卫[3],魏　嵬[4]

(1. 西安科技大学理学院,陕西西安　710054;2. 重庆大学数学与统计学院,重庆　400030;3. 河北科技大学理学院,河北石家庄　050018; 4. 西安交通大学电信学院,陕西西安　710049)

**摘　要:**提出了用于构造传感器网络中的信息位势场的一个偏微分方程模型。一个抛物方程被引入并用于确定这个位势场;有限差分法则被用于数值求解。求解得到的位势场保留了大部分对实际应用有利的节点特征。归功于偏微分方程所具有的良好性质,多个信息位势场能够很自然地被聚合起来。

**关键词:**传感器网络;信息势场;有限差分法;移动最小二乘;抛物方程

**中图分类号:**O175.2;TP393.17　　**文献标志码:**A

# PDE model for constructing potential fields in sensornets

ZHOU Bin[1], MU Chun-lai[2], YAO Wei[3], WEI Wei[4]

(1. School of Sciences, Xi′an University of Science and Technology, Xi′an Shaanxi 710054, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 400030, China; 3. School of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China; 4. School of Electronic and Information Engineering, Xi′an Jiaotong University, Xi′an Shaanxi 710049, China)

**Abstract:** A PDE model is proposed in this paper to construct the information potential fields in sensornets. A parabolic equation is introduced to determine the field and the finite differential method is used to salve it. The solution preserves major nodes′ features which are advantageous to most applications of sensornets. More than one piece of information potentials fields can be intergraded together naturally due to the sound property of the PDEs. Efficiency and stability of our method are verified by several numerical examples.

**Key words:** sensornets; potential fields; finite differential method; moving least-square; parabolic equation

传感器的研究进展显示了其巨大的潜在用途,在和现实世界的相互作用过程中,能彻底影响和改变人们生活的世界。分布式数据采集系统中,一些初步的应用情景由于具备低成本等优点,已经超越了传统的集中式传感器系统[1-2]。随着技术的逐步成熟和传感器网络规模扩大,人们期望传感器网络可以超越原有的军事部署用途,可以在动物或人类的工作和生活的地方进行监测。例如:家庭、建筑、道路栖息地等,在上述场所中的无线传感器网络和用户身处同一个网络物理空间从而进行交互式对话。此外,这种对话还要求低延迟地提供相关信息的传输[3],从而可以让用户能及时响应。例如在第一响应时间内,作出灾难恢复方案[4]。在找到可自行设定高查询频率的可扩展方法之前,信息导航也已被探索研究中。

很多基于梯度的研究方法都是使用物理现象的梯度也就是物理量的分布来说明的[5-7],因为很多物理量的空间分布具有很大的类似,例如热量的传导就是遵循自然的扩散法则。然而,梯度是被自然规律所影响

收稿日期:2010-06-08;责任编辑:张　军
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771226,10926055)
作者简介:周　彬(1982-),男,浙江浦江人,讲师,博士研究生,主要从事偏微分方程应用、传感器网络方面的研究。

的，不是可以完全依赖的法则。当存在局部极值区域，会迫使信息来引导用户随机地走动。

笔者尝试使用嵌入式传感器网络，通过动态的环境辅助信息来发现空位信息场而进行导航。这个过程包括数据导航（即从任何节点回答用户的查询）。当手持设备与附近的传感器节点通信时，用户可以获得实时的导航信息。例如，路边传感器本身也可以用来监测本地交通挤塞状况和市中心区域的空停车场，还可在每个停车位部署传感器，用来实时跟踪具体情况。

作为一种有效的数值方法，有限元法能够很方便的用于各种领域，但是在求解大变形问题上仍然存在很多困难。复杂结构的网格生成是困难并且耗时的[8]。最近，无网格法发展迅速并用于很多领域[9]。这是一种不依赖于节点的数值方法，它能有效克服上述困难。目前的无网格法（例如 EFG[10]，PUM，Hp-Clouds，MLPG[8]）大都是基于 Galerkin 方法。数值积分对这类方法来说是必要的，但会导致巨大的运算量，而且背景网格也需要被提前引入，而基于聚点法的无网格法不需要数值积分，具有较小的运算量，但是精度较低，稳定性较差。在最小二乘法基础上，文献[11]提出的无网格加权最小二乘法能够克服上述缺点，移动最小二乘法是其中的关键环节。

在本文中，笔者将用无网格法构造传感器网络中的信息位势场。首先，用拉普拉斯方程确定一个平滑并且保留主要原有特征的信息位势场。其次，用移动最小二乘法求解相关的偏微分方程。得益于偏微分方程的良好性质，多个信息位势场能够被自然地融合。本文方法能够更有效地获得合适的信息位势场。

## 1　背景和基本原理

### 1.1　信息位势场

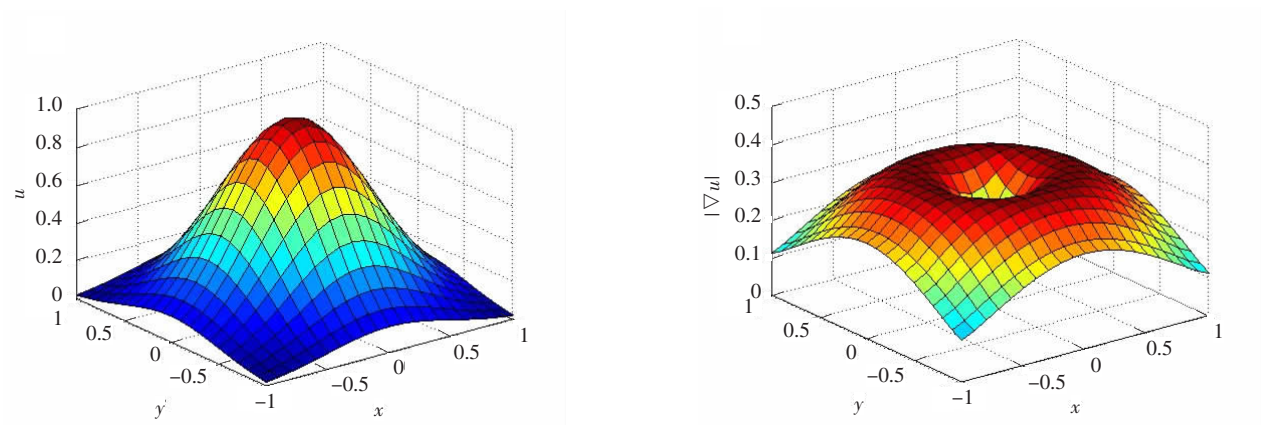
位势场被用于描述节点的信息分布，并应用于各种场景。这些应用场景能够通过一些基于梯度的算法得到信息位势场。对于这些算法来说，更重要的是建立一个合适的信息位势场。更确切地说，获得一个光滑并且保留主要原始特征的信息位势场是必要的前提。光滑性将有利于梯度计算和算法实现，而主要特征的保留则是目标能够实现的必要保障。

很多数学方法和技术能够被用于信息位势场（曲面）的构造，比如：多项式拟合，非线性拟合，多项式插值，最小二乘拟合，径向基插值等等。目前，这些方法已经被用于各种领域，随着它们的发展，所构造曲面的误差也越来越小，光滑性也逐渐提高。

然而，这些方法不能直接应用在此场景中。如图 1a）所示，传统方法获得的位势曲面具有较好的光滑性和较高的节点准确性，但是梯度模在靠近极值点处迅速衰减为 0，图 1b）显示了相应的梯度模场。

如果信息位势场是用传统方法构造的，那么在进一步的实际应用中，比如停车场空闲车位导航，用户在局部极值点附近将被低水平的梯度所导航，影响效率。

这意味着预期的位势场在目标节点（局部极值点）附近，仍需保持较高的梯度模水平。




a)　　b)

图 1　传统方法的构造结果

Fig. 1　Universal results of traditional methods

### 1.2　拉普拉斯方程

根据上述目的，文献[4]把预期的位势场 $u(x)$ 假定为 $\Omega$ 中的一个调和函数，给出如下拉普拉斯方程

$$\begin{cases}\nabla^2 u(x)=0, & x\in\Omega,\\ u(x)=f_D(x), & x\in\Gamma_D,\\ \nabla u(x)\cdot\boldsymbol{n}+b(x)u(x)=f_N(x), & x\in\Gamma_N,\end{cases}\tag{1}$$

这里 $\Gamma=\partial\Omega$。

由偏微分方程的理论易得，位势函数在区域内部的值能够被它在边界上的取值唯一确定。而且，根据极值原理，极值点必定位于边界上。也就是说，位势场函数可以通过求解拉普拉斯方程得到。图 2 给出了 2 个非凸域上具有 Dirichlet 条件的 Laplace 问题求解结果。

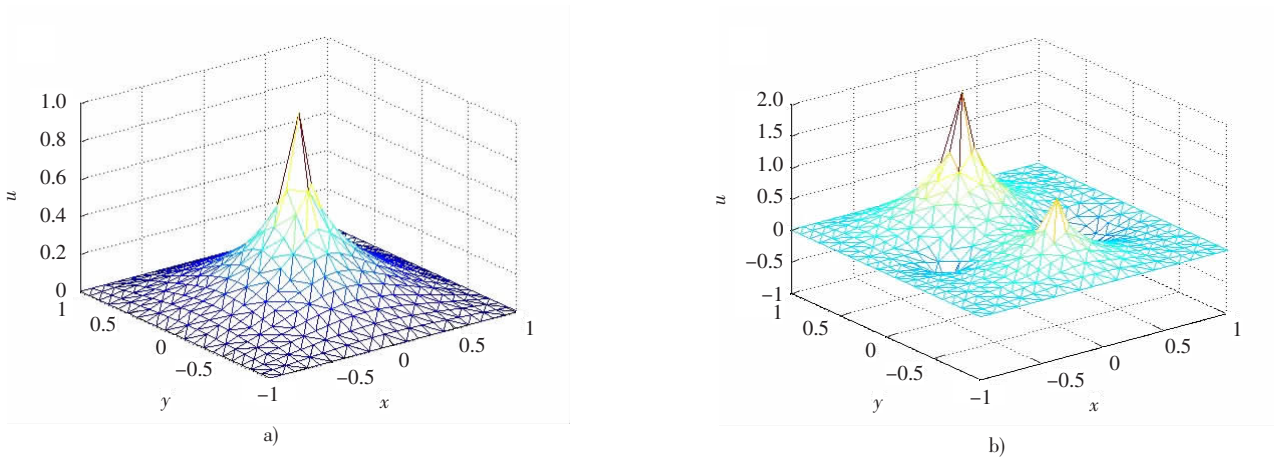



图 2 非凸域上的拉普拉斯问题

Fig. 2 Laplace problems in Non-convex regions

## 2 无网格法

有许多数值方法能够被用于求解拉普拉斯问题(1)，比如：有限差分法(FDM)，有限元法（FEM）等等。作为一种有效的数值方法，有限元法能够很便捷地被用于求解偏微分方程。然而，由于节点分布的不规则性，很难建立有限元方法所需要的网格。文献[11]中提出的移动最小二乘无网格法能够克服这样的困难。

若 $u(x)$在区域 $\Omega$ 中的节点 $x_I(I=1,2,\cdots,N)$上是已知的，且基函数为

$$\boldsymbol{P}(x)=[\boldsymbol{p}_1(x),\boldsymbol{p}_2(x),\cdots,\boldsymbol{p}_m(x)]^{\mathrm{T}},\tag{2}$$

那么在邻域 $O(x,\delta)$内，$u(x)$能够被表示为

$$u^h(x)=\boldsymbol{A}(x)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{P}(x),\tag{3}$$

其中：$k$ 是步长；$\boldsymbol{A}(x)=[\boldsymbol{a}_1(x),\boldsymbol{a}_2(x),\cdots,\boldsymbol{a}_m(x)]^{\mathrm{T}}$ 是待定的。在 $x_I$ 处的权函数被定义为 $w_I(x)=w(\frac{|x-x_I|}{d})$，其中 $d$ 表示支撑域半径。于是 $u^h(x)$的误差为

$$\varepsilon=\sum_{I=1}^{N}w_I(x)[u^h(x_I)-u(x_I)]^2=\sum_{I=1}^{N}w_I(x)[\boldsymbol{P}(x_I)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}(x)-u(x_I)]^2。\tag{4}$$

极小化这个能量泛函，得到

$$u^h(x)=\boldsymbol{P}(x)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{B}(x)^{-1}\cdot C(x)\cdot U,\tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{P}(x_I)\boldsymbol{P}(x_I)^{\mathrm{T}}]\sum_{I=1}^{N}w_I(x),$$

$$C(x)=[\boldsymbol{p}(x_1),\boldsymbol{p}(x_2),\cdots,\boldsymbol{p}(x_N)]\cdot\mathrm{diag}[w_1(x),w_2(x),\cdots,w_N(x)]$$

$$U=[u(x_1),u(x_2),\cdots,u(x_N)]^{\mathrm{T}}。$$

据此，拉普拉斯方程(1) 能够被重新表示，从而建立相关的线性方程组。求解之后即可得到所需要的信息位势场。

## 3　算例与仿真

在本文中，如不作特殊说明，算例均采用二次多项式基$[1,x,y,x^2,xy,y^2]$。相应的高斯权函数为

$$w(r)=\frac{\exp(-r^2t^2)-\exp(-t^2)}{1-\exp(-t^2)},\tag{6}$$

它将被用于求解几个数值算例。对一个具有随机信息分布的传感器网络，采用本文方法获得了预期的位势场。

**算例 1**　图 3a)显示了区域 $G=[-1,1]\times[-1,1]$中 3 个信息节点的分布。节点$(-1,-1)$，$(1,-1)$，$(-0.5,0)$处的信息量分别为 2，2，5。令 $\Omega=G\backslash\Gamma_D$，$\Gamma_N=\partial G$，其中 $\Gamma_D=\{(-1,-1),(1,-1),(-0.5,0)\}$。给定相应的边界条件，一个平滑的信息位势场能够被确定并用于进一步的应用，如图 3b)所示。

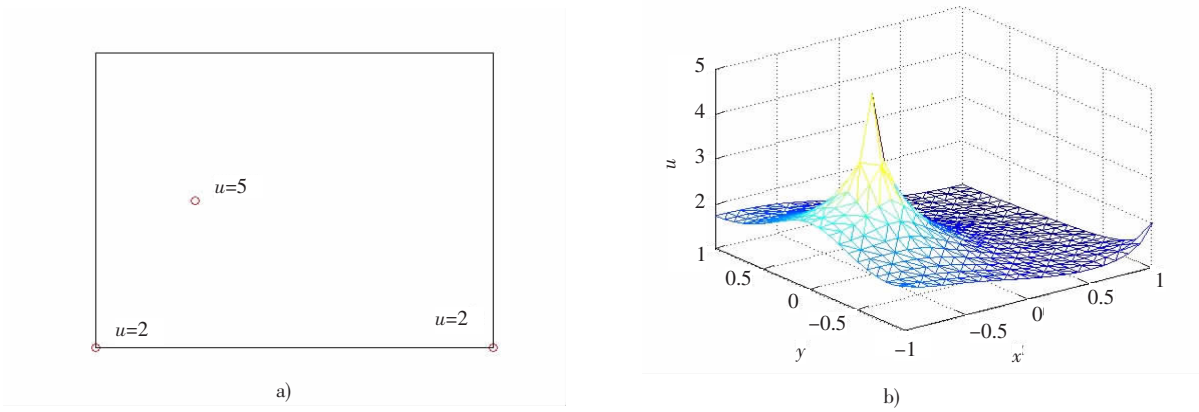



图 3　由三个节点确定的信息位势场

Fig. 3　Potential field determined by three nodes

**算例 2**　图 4a)给出了一个随机生成的传感器网络中的信息分布。相关拉普拉斯问题的边界条件设置类似于算例 1。通过计算，能够得到预期的信息位势场，如图 4b)所示。该信息位势场足够平滑，且保留了原有信息分布的主要特征，能够用于各种场景。

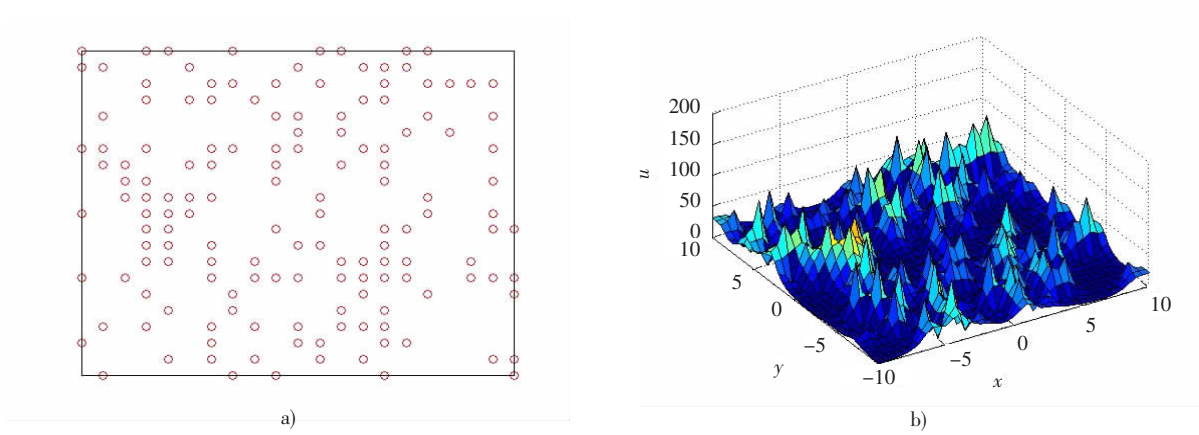



图 4　由随机信息分布所确定的信息位势场

Fig. 4　Potential field determined by a random distribution

## 4　结　语

提出了用于构造传感器网络中的信息位势场的一个新模型。一个保留了原有信息分布主要特征的平滑信息位势场能够由拉普拉斯方程所确定，并通过无网格方法进行求解。这样的信息位势场对于很多传感器网络的应用是很有帮助的，比如：停车场导航、环境监控等等[12-13]。第 3 节的数值算例验证了方法的有效性和稳定性。结果表明本文提出的方法能够很方便地应用于传感器网络中，用户可以通过手持设备和周边节点交互，获得实时的导航信息；道路传感器监控当地的交通阻塞信息；各个停车场的空闲车位信息能够被监控并有效利用等等。

## 参考文献：


[1] AKYILDIZ I F, SU W, SANKARASUBRAMANIAM Y, et al. Wireless sensor networks: A survey[J]. Computer Networks, 2002, 38 (4): 393-422.

[2] AKYILDIZ I F, MELODIA T, CHOWDHURY K R. A survey on wireless multimedia sensor networks[J]. Computer Networks, 2007, 51: 921-960.

[3] KALANTARI M, SHAYMAN M. Energy efficient routing in wireless sensor networks[A]. Proceeding of Conference on Information Sciences and Systems[C]. Princeton: NJ, 2004. 356-361.

[4] LIN H J, LU M H, MILOSAVLJEVIC N, et al. Composable information gradients in wireless sensor networks[A]. Proceeding of the International Conference on Information Processing in Sensor Networks (IPSN'08)[C]. Washington: IEEE Computer Society, 2008. 121-132.

[5] CHU M, HAUSSECKER H, ZHAO F. Scalable information driven sensor querying and routing for ad hoc heterogeneous sensor networks [J]. International Journal of High Performance Computing Applications, 2002, 16(3): 293-313.

[6] FARUQUE J, HELMY A, RUGGED B. Routing on fingerprint gradients in sensor networks [A]. IEEE International Conference on Pervasive Services (ICPS)[C]. Lebanon: American University of Beirut, 2004. 179-188.

[7] FARUQUE J, PSOUNIS K, HELMY A. Analysis of gradient based routing protocols in sensor networks [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 35: 258-275.

[8] ATLURI S N, ZHU T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics[J]. Computational Mechanics, 1998, 22(2): 117-127.

[9] BELYTSCHKO T, KRONGAUZ Y. Meshless methods: An overview and recent developments[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1/4): 3-47.

[10] ZHOU W Y, KOU X D. Meshless method and its application in engineering[J]. Journal of Mechanics, 1998, 14(2): 193-202.

[11] ZHANG X, HU W, PAN X F. Weighted least squares meshless method[J]. Journal of Mechanics, 2003, 14(4): 425-431.

[12] LIU J, ZHAO F, PETROVIC D. Information-directed routing in ad hoc sensor networks[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2005, 23(4): 851-861.

[13] 张东凯，田贵辰，巩增泰，等. 二阶模糊微分方程的数值解[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2010, 31(2): 158-161.


(上接第 491 页)


[3] YU L, CHU J. ALMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems[J]. Automatica, 1999, 35(6): 1 155-1 159.

[4] 陆俊玮，郭爱琴. 不确定离散系统的保成本控制[J]. 南京师范大学学报(自然科学版)(Journal of Nanjing Normal University (Natural Science Edition)), 2002, 25(1): 108-112.

[5] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust fragile or optimal[J]. IEEE Trans Automat Control, 1997, 42(8): 1 098-1 105.

[6] 付兴建，刘小河，童朝南，等. 鲁棒非脆弱保成本控制及其应用仿真[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版)(Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition)), 2007, 22(2): 73-76.

[7] PARK J, JUNG H Y. On the design of non-fragile guaranteed cost controller for a class of uncertain dynamic systems with state delay[J]. Applied Mathematics and Computations, 2004, 150: 245-257.

[8] 李钢生，屈百达，黄 俊. 多时滞不确定系统的非脆弱鲁棒控制器设计[J]. 江南大学学报(自然科学版) (Journal of Southern Yangtze University (Natural Science Edition)), 2007, 6(2): 193-196.

[9] PARK J. GCS of a class of chaotic dynamic systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26: 1 429-1 435.

[10] BOYD S, GHAOUI L E, BALAKRISHNAN V. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[11] 郗多明，何海阔，仇计清，等. 一类细胞神经网络的时滞相关全局稳定性判据[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2008, 29(3): 188-193.

[12] 仇计清，高志峰，王菊芳，等. 带时变时滞的不确定网络化控制系统的 $H_\infty$ 控制[J]. 河北科技大学学报(Journal of Hebei University of Science and Technology), 2007, 28(3): 180-185.

[13] PARK J. Robust guaranteed cost control for uncertain linear differential systems of neutral type[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 140: 523-535.