文章编号:1008-1542(2010)05-0390-06

一类可变号二阶三点边值问题拟对称正解的研究

韩晓虎[1,2],周长杰[1],郭彦平[1]

(1.河北科技大学理学院,河北石家庄　050018;2.河北行政学院综合部,河北石家庄　050031)

摘　要:微分方程有着深刻而生动的实际背景,它在许多领域发挥着重要的作用,所以微分方程边值问题解的定性研究是十分重要的。利用新不动点定理证明了一类可变号的带 p-拉普拉斯算子二阶三点边值问题拟对称正解的存在性。

关键词:边值问题;不动点定理;拟对称

中图分类号:O635　　**文献标志码**:A

Positive pseudo-symmetric solutions of boundary value problems for second-order quasilinear differential equation with sign changing nonlinearities

HAN Xiao-hu[1,2], ZHOU Chang-jie[1], GUO Yan-ping[1]

(1. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China; 2. Department of Comprehensive, Hebei Academy of Governance, Shijiazhuang Hebei 050031, China)

Abstract: Differential equations, for its profound and vivid actual background, play an important role in many fields, so the research in the existence of positive solutions of boundary value problems for differential equations has become a focus. In this paper, by using a new fixed point theorem, we obtain pseudo-symmetric solutions for three-point p-Laplacian boundary value problems with dependence on the first order derivative.

Key words: boundary value problem; fixed point theorem; pseudo-symmetric solution

1　引　言

多点边值问题的研究起源于许多不同的应用数学和物理领域。最近,非线性项可以改变符号的多点边值问题,以及含有一阶导数边值问题解的存在性,都得到了很好的研究,相关新的结论也一一得到论证。文献[1]用不动点定理证明了二阶三点边值问题对称解的存在性。

笔者研究可以改变符号的二阶多点边值问题:

$$\begin{cases}(\varphi_p(x'))'+q(t)f(t,x)=0, & 0<t<1\\ x(0)=0, \quad x(1)=x(\eta)\end{cases}。\tag{1}$$

式中:$\varphi_p(x)=|x|^{p-2}x$, $p>1$; $0<\eta<1$; f 可以变号。

H_1)　$f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[-M,+\infty)$ 是连续函数,且 $f(t,0)\geqslant 0$ $(\neq 0)$。

H_2)　$q:(0,1)\to[0,+\infty)$ 为连续函数,且 $q(t)\neq 0$, $\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t<\infty$。

收稿日期:2010-03-15;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10971045);河北省自然科学基金资助项目(A2009000664)

作者简介:韩晓虎(1978-),男,河北涿州人,讲师,硕士,主要从事常微分方程方面的研究。

2　预备知识

定义 1　设 M 是 Banach 空间的一个锥，映射 α 是定义在 M 上的非负的连续的凹函数，如果 $\alpha:M\to[0,+\infty)$ 是连续的，且满足：

$$\alpha(tx+(1-t)y)\geqslant t\alpha(x)+(1-t)\alpha(y),\quad x,y\in M,\quad t\in[0,1]。$$

定义 2　设 E 是实 Banach 空间，对于 $\eta\in[0,1]$，若 $u\in E$ 在 $[\eta,1]$ 是对称的，即 $u(t)=u(1-(t-\eta))$，则称 u 在 $[0,1]$ 关于 η 拟对称。

令 X 为 Banach 空间，锥 $M\subset X$，$\|\cdot\|$ 为常规范数，$K_r=\{x\in M:\|x\|<r\}$，$\partial K_r=\{x\in M:\|x\|=r\}$，设 $\alpha:M\to R^+$ 连续泛函，$K(b)=\{x\in M:\alpha(x)<b\}$，$\partial K(b)=\{x\in M:\alpha(x)=b\}$，$K_\alpha(b)=\{x\in M:a<\|x\|,\alpha(x)<b\}$。

证明基于文献[1]中不动点定理，下面将其列出。

定理 1　X 为 Banach 空间，锥 $M\subset X$，$T:M\to M$ 全连续算子，$\alpha:M\to R^+$ 凹泛函，且 $\alpha(x)\leqslant\|x\|$，$x\in M$，若有 $c>b>a>0$ 满足下列条件：

C_1)　$\|Tx\|<a$，$x\in\partial K_\alpha$；

C_2)　$\alpha(Tx)>b$，$x\in\partial K(b)$；

C_3)　由 $\alpha(x)\leqslant b$ 可推出 $\|Tx\|<c$，则 T 在 M 中至少有一个不动点 y 使得 $a<\|y\|<c$，$\alpha(y)<b$。

3　主要结论

记 $\delta_1=\min\{1,1+\eta-\frac{\delta}{2}\}$，$\delta_2=\min\{1,1+\eta-\delta\}$。

引理 1　令 $0<\eta<1$，若 $y\in C[0,1]$，且 $y\geqslant 0$，则对于 $t\in[\frac{\delta}{2},\delta_1]$，边值问题

$$\begin{cases}x''+y(t)=0\\ x(0)=0,\ x(1)=x(\eta)\end{cases}\tag{2}$$

的解 x 满足 $\min\limits_{t\in[\delta,\delta_2]}x(t)\geqslant\gamma\max\limits_{t\in[\frac{\delta}{2},\delta_1]}x(t)$，其中 $\delta\in(0,\frac{1+\eta}{2})$，$\gamma=\dfrac{\delta}{1+\eta-\delta}$。

证明　对于边值问题(2)可知 $\max\limits_{\frac{\delta}{2}\leqslant t\leqslant\delta_1}x(t)=x(\frac{1+\eta}{2})$，$\max\limits_{\delta\leqslant t\leqslant\delta_2}x(t)=x(\delta)$，由解 x 的凹性可得：

$$\frac{x(\delta)-x(\frac{\delta}{2})}{\delta-\frac{\delta}{2}}>\frac{x(\frac{1+\eta}{2})-x(\frac{\delta}{2})}{\frac{1+\eta}{2}-\frac{\delta}{2}},$$

$$(1+\eta-\delta)x(\delta)-(1+\eta-\delta)x(\frac{\delta}{2})>\delta x(\frac{1+\eta}{2}),$$

$$(1+\eta-\delta)x(\delta)>\delta x(\frac{1+\eta}{2}),$$

$$x(\delta)>\frac{\delta}{1+\eta-\delta}\,x(\frac{1+\eta}{2})。\quad\text{证毕。}$$

令 $X=C[0,1]$，$K=\{x\in X:x(t)\geqslant 0,\ x(t)$ 在 $[0,1]$ 上关于 η 拟对称$\}$，$K'=\{x\in K:x$ 在 $[\frac{\delta}{2},1+\eta-\frac{\delta}{2}]$ 上为凹的$\}$，其中 $\delta\in(0,\frac{1+\eta}{2})$。显然 $K,K'\subset X$ 为 2 个锥，并且 $K'\subset K$。

假设下列条件成立：

H_3)　$f(t,x)$，$q(t)$ 关于 η 拟对称，且存在 $a,b,d>0$，满足：

$$0<\frac{1+\eta-\delta}{2}\varphi_p^{-1}[\varphi_p(\frac{2d}{\delta})+M\int_0^{\frac{\delta}{2}}q(t)\mathrm{d}t]+d<\gamma b<b;$$

H_4)　$f(t,x)\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{\frac{\delta}{2}}q(t)\mathrm{d}t$，　$(t,x)\in[\frac{\delta}{2},\delta_1]\times[d,b]$；

H_5) $f(t,x)\int_0^{\frac{1+\eta}{2}} q(t)\mathrm{d}t < \varphi_p(\frac{2a}{1+\eta})$, $(t,x)\in[0,1]\times[0,a]$;

H_6) $f(t,x)\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{1+\eta}{2}} q(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{\delta}{2}} q(t)\mathrm{d}t$, $(t,x)\in[\frac{\delta}{2},\delta_1]\times[d,b]$;

H_7) $f(t,x)\int_0^{\frac{1+\eta}{2}} q(t)\mathrm{d}t \leqslant \varphi_p(\frac{2a}{\delta})$, $(t,x)\in[0,\frac{\delta}{2}]\times[0,b]$。

对于 $x\in K$,定义 $\alpha(x)=\min\limits_{t\in[\delta,\delta_2]} x(t)$,

$$(Tx)(t)=\begin{cases}(\int_0^t \varphi_p^{-1}(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)F(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s)^+, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1+\eta}{2},\\ (\int_0^\eta \varphi_p^{-1}(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)F(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\int_t^1 \varphi_p^{-1}(\int_{\frac{1+\eta}{2}}^s q(r)F(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s)^+, & \frac{1+\eta}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{3}$$

设 $B^+=\max\{B,0\}$;$F(t,u)=f(t,u),u\geqslant 0$;$F(t,u)=f(t,0)$, $u<0$,

$$(Ax)(t)=\begin{cases}\int_0^t \varphi_p^{-1}(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)F(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1+\eta}{2},\\ \int_0^\eta \varphi_p^{-1}(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)F(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\int_t^1 \varphi_p^{-1}(\int_{\frac{1+\eta}{2}}^s q(r)F(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s, & \frac{1+\eta}{2}\leqslant t\leqslant 1。\end{cases}\tag{4}$$

对于 $x\in X$,定义$(\theta x)(t)=\max(x(t),0)$,则 $T=\theta * A$。

对于 $x\in K'$,

$$(T_1x)(t)=\begin{cases}\int_0^t \varphi_p^{-1}(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1+\eta}{2},\\ (\int_0^\eta \varphi_p^{-1}(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s+\int_t^1 \varphi_p^{-1}(\int_{\frac{1+\eta}{2}}^s q(r)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s)^+, & \frac{1+\eta}{2}\leqslant t\leqslant 1。\end{cases}\tag{5}$$

其中:

$$f^*(t,x)=\begin{cases}f(t,0), & 0\leqslant t\leqslant\frac{\delta}{2}\text{ 或 }\delta_1<t<1,-\infty<x<0,\\ f(t,x), & \frac{\delta}{2}\leqslant t\leqslant\delta_1,d\leqslant x\leqslant b,\\ f(t,d), & \frac{\delta}{2}\leqslant t\leqslant\delta_1,-\infty<x<d,\\ f(t,x), & 0\leqslant t<\frac{\delta}{2}\text{ 或 }\delta_1<t\leqslant 1,\quad 0\leqslant x\leqslant b,\\ f(t,b), & 0\leqslant t\leqslant 1,\quad b<x<+\infty。\end{cases}$$

引理 2[2] 若 $A:K\to X$ 是全连续,则 $\theta * A:K\to K$ 全连续。

引理 3 若条件 H_1)— 条件 H_4) 成立,则算子 $T_1:K\to K$ 全连续。

证明 对于 $x\in K'$,由 H_1) 和 H_4) 可知:

$$\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r=\int_s^{\frac{\delta}{2}} q(r)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r+\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\geqslant$$

$$-M\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(r)\mathrm{d}r+\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)\frac{M\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(t)\mathrm{d}t}{\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{1+\eta}{2}} q(t)\mathrm{d}t}=0,\text{当 }0\leqslant s\leqslant\frac{\delta}{2};$$

$$\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\geqslant 0,\ \text{当}\frac{\delta}{2}\leqslant s\leqslant\frac{1+\eta}{2}。$$

所以可知:

$$(T_1x)(t)=\int_0^t \varphi_p^{-1}(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\geqslant 0,\ \text{当 }0\leqslant t\leqslant\frac{1+\eta}{2},$$

$(\varphi_p(T_1x)')'=-q(t)f^*(t,x(t))\leqslant 0$, 当 $t\in[\frac{\delta}{2},\delta_1]$,所以可得$(T_1x)$ 在$[\frac{\delta}{2},\delta_1]$ 上为凹。

对于 $t\in[\eta,\frac{1+\eta}{2}]$，则 $1-(t-\eta)\in[\frac{1+\eta}{2},1]$ 成立，

$$(T_1x)(1-(t-\eta))=$$

$$\int_0^{\eta}\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_{1-(t-\eta)}^{1}\varphi_p^{-1}\left(\int_{\frac{1+\eta}{2}}^{s}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^{\eta}\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_{\eta}^{t}\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^{t}\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=(T_1x)(t)。$$

对于 $t\in[\frac{1+\eta}{2},1]$，则 $1-(t-\eta)\in[\eta,\frac{1+\eta}{2}]$ 成立，

$$(T_1x)(1-(t-\eta))=$$

$$\int_0^{1-(t-\eta)}\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^{\eta}\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_{\eta}^{1-(t-\eta)}\varphi_p^{-1}\left(\int_{\frac{1+\eta}{2}}^{1-(s-\eta)}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^{\eta}\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s-\int_t^{1}\varphi_p^{-1}\left(\int_{1-(s-\eta)}^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^{\eta}\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_t^{1}\varphi_p^{-1}\left(\int_{\frac{1+\eta}{2}}^{1-(s-\eta)}q(t)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=(T_1x)(t)。$$

综上可得算子 $T_1:K'\to K'$，由函数 f^* 的定义及函数 f 的连续性可得 $T_1:K'\to K'$ 全连续。证毕。

定理 2　若条件 H_1)— 条件 H_7) 成立，则边值问题(1) 至少有 2 个拟对称正解 y_1,y_2，且满足：

$$0<\|y_1\|<a<\|y_2\|,\quad \min_{t\in[\delta,\delta_2]}y_2(t)<\gamma b。$$

证明　首先证明算子 T 有一个不动点 $y_1\in K$，且 $0<\|y_1\|<a$，实际上对于 $x\in\partial K_a$ 则 $\|x\|=a$，由条件 H_5) 可得：

$$\|Tx\|=\max_{0\leqslant t\leqslant\frac{1+\eta}{2}}\left|\left(\int_0^t\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(r)F(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right)^+\right|=$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\frac{1+\eta}{2}}\max\left\{\int_0^t\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(r)f(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,0\right\}<$$

$$\frac{1+\eta}{2}\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^{\frac{1+\eta}{2}}q(r)f(r,x(r))\mathrm{d}r\right)<\frac{1+\eta}{2}\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^{\frac{1+\eta}{2}}q(r)\frac{\varphi_p^{-1}\left(\frac{2a}{1+\eta}\right)}{\int_0^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}r\right)=$$

$$\frac{1+\eta}{2}\times\frac{2a}{1+\eta}=a。$$

由 Schauder 不定点定理可得 y_1 存在。

显然，y_1 是边值问题(1) 的解充分必要条件，y_1 是算子 A 不动点。

下面证明 y_1 是算子 A 不动点。

反证，若 y_1 不是算子 A 的不动点，则必有一点 $t_0\in(0,1)$，使得 $y_1(t_0)\neq(Ay_1)(t_0)$，于是必有 $(Ay_1)(t_0)<0$，$y_1(t_0)=0$。令 (t_1,t_2) 为 $(Ay_1)(t_1)<0$ 的最大区间，则 $(Ay_1)(t_1)=(Ay_1)(t_2)=0$。由条件 H_1) 可知 $[t_1,t_2]\neq[0,1]$，则有任意 $t\in[t_1,t_2]$，$y_1(t)\equiv0$，任意 $t\in(t_1,t_2)$，$(Ay_1)(t)<0$，再由 $(Ay_1)(t_2)=0$，必有 $(Ay_1)'(t_2)\geqslant0$，所以由 $(\varphi(Ay_1)')'=-q(t)f(t,0)<0$，可得 $(Ay_1)'(t)$ 为减函数，从而可得出 $(Ay_1)'(t)\geqslant0$，当 $t\in[t_1,t_2]$。再由 $(Ay_1)(t_1)=(Ay_1)(t_2)=0$，可知 $(Ay_1)(t)\equiv0$，矛盾，所以 y_1 是算子 A 不动点。

对于 $x\in K'_a$，则 $\|x\|=a$，由条件 H_5) 可得：

$$\|T_1x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant\frac{1+\eta}{2}}\left|\left(\int_0^t\varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}}q(r)f^*(r,x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right)\right|<$$

$$\frac{1+\eta}{2}\ \varphi_p^{-1}\left(\int_0^{\frac{1+\eta}{2}}q(r)\frac{\varphi_p^{-1}\left(\frac{2a}{1+\eta}\right)}{\int_0^{\frac{1+\eta}{2}}q(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}r\right)=\frac{1+\eta}{2}\times\frac{2a}{1+\eta}=a。$$

对于 $x \in \partial K'(\gamma b)$ 可知，当 $t \in [\delta, \delta_2]$ 时，$\gamma b \leqslant x(t) \leqslant b$。由条件 H_1) 和条件 H_6) 可得：

$$\alpha(T_1 x) = \min_{\delta \leqslant t \leqslant \frac{1+\eta}{2}} \int_0^t \varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^{\delta} \varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^{\delta} \varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\delta} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r + \int_{\delta}^{\frac{1+\eta}{2}} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s >$$

$$\int_0^{\delta} \varphi_p^{-1}\left(-M\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r)\mathrm{d}r + \int_{\delta}^{\frac{1+\eta}{2}} q(r) \frac{M\int_0^{\delta} q(t)\mathrm{d}t + \varphi_p\left(\frac{\gamma b}{\delta}\right)}{\int_{\delta}^{\frac{1+\eta}{2}} q(t)\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}s = \gamma b。$$

再由函数 f^* 的定义及函数 f 的连续性，必有 $c > b$ 使得当 $\alpha(x) \leqslant b$ 时 $\| T_1 x \| < c$，所以由定理 1 可得 T_1 有不定点 $y_2 \in K'_a(\gamma b)$。

下面证明 $Ax = T_1 x$ 对于 $x \in K'_a(\gamma b) \cap \{x; T_1 x = x\}$。若 $x \in K'_a(\gamma b) \cap \{x; T_1 x = x\}$，则 $\| x \| > a \geqslant \dfrac{1+\eta-\delta}{2} \varphi_p^{-1}\left(\varphi_p\left(\dfrac{2d}{\delta}\right) + M\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(t)\mathrm{d}t\right) + d$。

笔者断言 $\| x \| = \max\limits_{\frac{\delta}{2} \leqslant t \leqslant \delta_1} x(t)$。反证，若有 $t_0 \in \left(0, \dfrac{\delta}{2}\right)$，$x(t_0) = \| x \| > a$，则 $x'(t_0) = (T_1 x)'(t_0) = \varphi_p^{-1}\left(\int_0^{\frac{1+\eta}{2}} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r\right) = 0$，即 $\int_0^{\frac{1+\eta}{2}} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r = 0$。

由条件 H_7) 可得：

$$x(t_0) = \| x \| = \int_0^{t_0} \varphi_p^{-1}\left(\int_s^{\frac{1+\eta}{2}} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^{t_0} \varphi_p^{-1}\left(\int_s^{t_0} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{1+\eta}{2}} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^{t_0} \varphi_p^{-1}\left(\int_s^{t_0} q(r) f^*(r, x(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s < \frac{\delta}{2} \varphi_p^{-1}\left(\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(r) \frac{\varphi_p\left(\frac{2a}{\delta}\right)}{\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}r\right) = a,$$

矛盾，所以 $\| x \| = \max\limits_{\frac{\delta}{2} \leqslant t \leqslant \delta_1} x(t)$。

下面证明 $x\left(\dfrac{\delta}{2}\right) \geqslant d$。反证，若不成立，则存在 $t_1, t_2 \in \left(\dfrac{\delta}{2}, \dfrac{1+\eta}{2}\right)$ 使得：

$$x(t_1) = d, \quad x(t_2) = \frac{1+\eta-\delta}{2} \varphi_p^{-1}\left[\varphi_p\left(\frac{2d}{\delta}\right) + M\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(t)\mathrm{d}t\right] + d。$$

由中值定理得：

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = x'(t_0), \quad t_0 \in (t_1, t_2),$$

所以 $x'(t_0) = \dfrac{\dfrac{1+\eta-\delta}{2} \varphi_p^{-1}\left[\varphi_p\left(\dfrac{2d}{\delta}\right) + M\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(t)\mathrm{d}t\right]}{t_2 - t_1} > \varphi_p^{-1}\left[\varphi_p\left(\dfrac{2d}{\delta}\right) + M\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(t)\mathrm{d}t\right]$。

由 x 在 $\left[\dfrac{\delta}{2}, \delta_1\right]$ 上的凹性可得 $x'\left(\dfrac{\delta}{2}\right) \geqslant x'(t_0) > \varphi_p^{-1}\left[\varphi_p\left(\dfrac{2d}{\delta}\right) + M\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(t)\mathrm{d}t\right]$，

对于 $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\delta}{2}$ 可得：

$$\varphi_p(x'(t)) = \varphi_p\left(x'\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) - \int_t^{\frac{\delta}{2}} (\varphi_p(x'(s)))'\mathrm{d}s =$$

$$\varphi_p\left(x'\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) + \int_t^{\frac{\delta}{2}} q(s) f^*(s, x(s))\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\left[\varphi_p\left(\frac{2d}{\delta}\right) + M\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(t)\mathrm{d}t\right] - M\int_0^{\frac{\delta}{2}} q(s)\mathrm{d}s = \varphi_p\left(\frac{2d}{\delta}\right)。$$

于是可推出 $x'(t) \geqslant \frac{2d}{\delta}$，由 $0 = x(0) = x(\frac{\delta}{2}) - \int_0^{\frac{\delta}{2}} x'(s)\mathrm{d}s < d - \frac{\delta}{2} \times \frac{2d}{\delta} = 0$，矛盾。

所以对于 $\frac{\delta}{2} \leqslant t \leqslant \delta_1$，有 $d \leqslant x(t) \leqslant b$ 成立。由 f^* 定义可知 $f^*(t,x(t)) = f(t,x(t))$，　$0 \leqslant t \leqslant 1$。于是 $Ax = T_1 x$ 对于 $x \in K_a'(\gamma b) \bigcap \{x: T_1 x = x\}$ 成立。证毕。

参考文献：

[1] GUO Yan-ping, TIAN Ji-wei. Two positive solutions for second-order quasilinear differential equation boundary value problems with sign changing nonlinearities[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 169: 345-357.

[2] GUO Yan-ping, GE Wei-gao, GAO Ying. Twin positive solutions for higher order *m*-point boundary value problems with sign changing nonlinearities[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 146: 299-311.

(上接第 389 页)

对于 $(t,u,v,w) \in [0,1] \times [0,3 \times 10^8] \times [0,3 \times 10^8] \times [-3 \times 10^8, 3 \times 10^8]$，$f(t,u,v,w) > \varphi_p(\frac{kb}{\delta}) = 69\ 984$；

对于 $(t,u,v,w) \in [\frac{1}{6}, \frac{5}{6}] \times [2,12] \times [0,1\ 000] \times [-3 \times 10^8, 3 \times 10^8]$，$f(t,u,v,w) > \varphi_p(\frac{a}{N}) = 5.356\ 4$；

对于 $(t,u,v,w) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1\ 000] \times [-3 \times 10^8, 3 \times 10^8]$，$\xi(-\frac{5}{3}) = \xi(-\frac{1}{3}) = 500 > 2$。

这样定理 2 的所有条件满足，应用定理 2，边值问题(8) 至少有 3 个正解 x_1, x_2, x_3，满足

$$\gamma(x_i) \leqslant 3 \times 10^8, i = 1,2,3; 2 < \alpha(x_1); 1 < \psi(x_2) \text{ 和 } \alpha(x_2) < 2; \psi(x_3) < 1。$$

参考文献：

[1] CARVALHO L A, LADEIRA L A, MARTELLI M. Forbidden periods in delay differential equations[J]. Portugaliae Math Port Math, 2000, 57: 259-271.

[2] HALE J K, HUANG W. Global geometry of stable regions for two delay differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1993, 178: 344-362.

[3] LI Y, KUANG Y. Periodic solutions in periodic state-dependent delay equations and population models[J]. J Math Anal Appl, 2001, 255: 265-280.

[4] BAI D, XU Y. Positive solutions of second-order two delay differential systems with twinparameter[J]. Nonlinear Anal, 2005, 63: 601-617.

[5] WANG Y, ZHAO W, GE W. Multiple positive solutions for boundary value problems of secondorder delay differential equations with one-dimensional *p*-Laplacian[J]. J Math Anal Appl, 2007, 326: 641-654.

[6] JIANG D, WANG J. On boundary value problems for singular second-order functional differential equations[J]. J Comput Appl Math, 2000, 116: 231-241.

[7] JIANG D. Multiple positive solutions for boundary value problems of second-order delay differential equations[J]. Appl Math Lett, 2002, 15: 575-583.

[8] JIANG D, XU X, O' REGAN D, et al. Existence theory for single and multiple solutions to singular positone boundary value problem for the delay one-dimensional *p*-Laplacian[J]. Ann Polon math, 2003, 81: 237-259.

[9] SHU X, XU Y. Triple positive solutions for a class of boundary value problems of second-order functional differential equations[J]. Acta Mathematica Sinica (Chinese Series), 2005, 48: 1 113-1 120.

[10] AVERY R I, PETERSON A C. Three fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces[J]. Comput Math Appl, 2001, 42: 313-322.

[11] FENG H, GE W. Existence of three positive solutions for *m*-point boundary value problems with one-dimensional *p*-Laplacian[J]. Nonlinear Anal, 2008, 68(7): 2 017-2 026.

[12] LÜ H, O' REGAN D, ZHONG C. Multiple positive solutions for one-dimensional singular *p*-Laplacian[J]. Appl Math Comput, 2002, 46: 407-422.

[13] WONG F. Existence of positive solutions for *m*-Laplacian boundary value problem[J]. Appl Math Lett, 1999, 12: 11-17.