文章编号: 1008-1542(2009) 03-0208-04

离线方法与在线优化相结合的混合型鲁棒预测控制

李孝录[1], 曾 强[1], 宝 苍[2]

(1. 河北化工医药职业技术学院, 河北石家庄 050026; 2. 重庆大学自动化学院, 重庆 400044)

摘 要: 通过加入自由摄动量和采用在线优化来扩大离线鲁棒预测控制的吸引域。当状态位于离线预测控制的吸引域之外时, 在线求解简单的优化问题, 得到| 个较大的椭圆型吸引域; 当状态位于这 个较大椭圆型区域的外面时, 在线求解 1 个标准的鲁棒预测控制问题, 使得整 个吸引域变为| 个大得多的非椭圆型区域。提出的方法具有离线预测控制的所有优点, 并且大范围地扩大了吸引域, 给出仿真例子显示其效果。

关键词: 鲁棒预测控制; 离线预测控制; 吸引域; 摄动量

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Mixed robust predictive control by combining off-line approach with on-line optimization

LI Xiao-lu[1], ZENG Qiang[1], DING Bao-cang[2]

(1. Hebei Chemical and Pharmaceutical College, Shijiazhuang Hebei 050026, China; 2. Automation College, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: This paper twice enlarges the region of attraction of the off-line predictive control by incorporating free perturbation items and on-line optimizations. When the state lies outside of the region of attraction of the off-line predictive control, a simple optimization problem is solved on-line so that a larger ellipsoidal region of attraction is achieved. When the state lies outside of this larger ellipsoidal set, a standard robust predictive control problem is solved on-line so that the overall region of attraction can be rendered as a much larger non-ellipsoidal one. The approach in this paper possesses all the merits of the off-line predictive control and greatly enlarges the region of attraction. A simulation example is given to show the effectiveness.

Key words: robust predictive control; off-line predictive control; region of attraction; perturbation item

鲁棒预测控制(RPC) 的研究已取得很多成果[1], 尽管其稳定性的证明几乎是基于相同的原理, 但在技术的实施上变化很大。可把现有 RPC 分为在线、离线和半在线半离线 3 种。在线 RPC 一般在每个采样周期求解 1 个优化问题, 包括确定终端约束集、终端代价函数和局部控制律(这些被称作预测控制的 3 要素)[2]。离线 RPC 不涉及在线优化, 并且是在离线状态下进行要素的确定和优化[3]。大多数现有的 RPC 技术属于半在线半离线 RPC, 即至少有 1 项要素是离线优化的(通常这 3 项要素都离线优化并称为标准 RPC), 而其他优化在每个采样周期完成[4, 5]。最新的研究表明, 尽管已经有很多 RPC 方法, 但是关于吸引域和计算量之间的关系并没有得到完善解决: 离线 RPC 只能获得较小的吸引域; 在线 RPC 计算量很大, 却不一定能够获

收稿日期: 2009-03-13; 修回日期: 2009-04-13; 责任编辑: 张 军
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60504013, 60874046)
作者简介: 李孝录(1972-), 男, 河北沧州人, 讲师, 硕士, 主要从事计算机控制系统与仿真方面的研究。
© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

得大的吸引域; 半在线半离线 RPC 扩大吸引域的能力是有限的。因此, 需要一种折中的算法: 既可以获得大的吸引域, 又具有较低的在线计算量。

笔者给出一种 RPC 的混合算法。在原点附近的一个指定区域 $\varepsilon_{x,1}$ 内, 这种混合型 RPC 变为离线 RPC, 也就是说, 离线构造 1 组状态反馈控制律(F_i), 其中每个控制律对应于 1 个椭圆型吸引域$(\varepsilon_{x,i})$。这些椭圆是相互嵌套的, 其中最大的一个是 $\varepsilon_{x,1}$。在 $\varepsilon_{x,1}$ 的外面, 运用文献[6]中的技术, 即在 1 个状态反馈上加 1 组摄动量。因此, 通过选择这个状态反馈为 F_1(F_1 对应于 $\varepsilon_{x,1}$), 引入摄动量可以获得 1 个比 $\varepsilon_{x,1}$ 大的椭圆型吸引域 $\varepsilon_{x,x}$。在 $\varepsilon_{x,x}$ 的外面, 通过引入自由摄动量来求解标准 RPC。这样, 整个系统的吸引域可比 $\varepsilon_{x,x}$ 更大。

1　相关的鲁棒预测控制算法

考虑下面的时变不确定系统:

$$x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k),\quad k\geqslant 0, \tag{1}$$

其中 $u\in\mathcal{R}$ 和 $x\in\mathcal{R}$ 分别是输入和可测状态向量。存在 L 个非负系统 $w_l(k)$ 和 L 个组合矩阵$[A_l\mid B_l]$ 使得 $\sum_{l=1}^{L}w_l(k)=1,[A(k)\mid B(k)]=\sum_{l=1}^{L}w_l(k)[A_l\mid B_l]$, 也称式(1)为多包描述系统。约束条件为

$$-\underline{u}\leqslant u(k+i)\leqslant\overline{u},\quad\forall i\geqslant 0, \tag{2}$$

其中 $\underline{u}:=[\underline{u}_1,\underline{u}_2,\cdots,\underline{u}_m]^{\mathrm{T}}$, $\overline{u}:=[\overline{u}_1,\overline{u}_2,\cdots,\overline{u}_m]^{\mathrm{T}}$, $\underline{u}_j>0,\overline{u}_j>0,j\in\{1,2,\cdots,m\}$。

文献[7]的方法能够处理对称的输入约束和处理椭圆型输入约束, 没有本质的差别, 因此, 对式(2)所示的约束情形, 定义 $z_{\inf}=[z_{1,\inf},z_{2,\inf},\cdots,z_{m,\inf}]^{\mathrm{T}}$, $z_{j,\inf}=\min\{-\underline{u}_j,\overline{u}_j\}$。在文献[7]每一时刻 k 求解如下优化问题:

$$\min_{u(k+i\mid k)}\ \max_{[A(k+i)\mid B(k+i)]\in\Omega,\ i\geqslant 0}J_\infty(k)=\sum_{i=0}^{\infty}\{\|x(k+i\mid k)\|_{\mathcal{Q}}^2+\|u(k+i\mid k)\|_{\mathcal{R}}^2\} \tag{3}$$

$$\text{s.t.}\quad -z_{\inf}\leqslant u(k+i\mid k)\leqslant z_{\inf},\quad\forall i\geqslant 0, \tag{4}$$

$$x(k+i+1\mid k)=A(k+i)x(k+i\mid k)+B(k+i)u(k+i\mid k),\ x(k\mid k)=x(k),\quad\forall i\geqslant 0, \tag{5}$$

$$u(k+i\mid k)=\boldsymbol{F}(k)x(k+i\mid k),\quad\forall i\geqslant 0, \tag{6}$$

其中 $\mathcal{Q}>0$ 和 $\mathcal{R}>0$ 为加权矩阵, $\boldsymbol{F}(k)$ 是一个线性状态反馈矩阵。对向量 $\boldsymbol{v}$ 和矩阵 $\boldsymbol{W}$ 有 $\|v\|_{\boldsymbol{W}}^2:=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{v}$。该法得到在线预测控制。求解文献[7]中优化问题涉及的计算量较大, 对于高阶系统尤甚。在文献[7]的基础上, 离线 RPC 算法如下[8]。

算法 1　离线, 选取状态点 x_i, $i\in\{1,2,\cdots,N\}$。用 x_i 代替 $x(k)$, 并求解文献[7]中优化问题获得对应的矩阵$\{\mathcal{Q},Y_i\}$, 椭圆域 $\varepsilon_{x,i}=\{x\in\mathcal{R}\mid x^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}^{-1}x\leqslant 1\}$ 和反馈增益 $F_i=Y_i\mathcal{Q}^{-1}$。在线地, 在每一时刻 k, 采用如下状态反馈控制律:

$$u(k)=F(k)x(k)=\begin{cases}F(\alpha(k))x(k), & x(k)\in\varepsilon_{x,i},x(k)\notin\varepsilon_{x,i+1},i\neq N,\\ F_Nx(k), & x(k)\in\varepsilon_{x,N},\end{cases} \tag{7}$$

其中 $F(\alpha(k))=\alpha(k)F_i+(1-\alpha(k))F_{i+1}$, $\alpha(k)$ 满足 $0\leqslant\alpha(k)\leqslant 1$ 且 $x(k)^{\mathrm{T}}[\alpha(k)\mathcal{Q}^{-1}+(1-\alpha(k))\mathcal{Q}_{i+1}^{-1}]x(k)=1$。

文献[6]采用 $u(k+i\mid k)=Kx(k+i\mid k)+c(k+i\mid k)$, $c(k+n_c+i\mid k)=0$, $\forall i\geqslant 0$, 其中 $c(k+i\mid k)$, $i\in\{0,1,\cdots,n_c-1\}$ 为摄动量, K 是离线确定的反馈增益。可用如下自治状态空间模型等价地表示预测模型:

$$\mathrm{X}(k+i+1\mid k)=\Phi(k+i)\mathrm{X}(k+i\mid k),$$

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix}x\\ f\end{bmatrix},\ f(k+i\mid k)=[c(k+i\mid k)^{\mathrm{T}},c(k+1+i\mid k)^{\mathrm{T}},\cdots,c(k+n_c-1+i\mid k)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

其中 $\Phi(k+i)=\sum_{l=1}^{L}w_l(k+i)\Phi_l$, 具体形式略。

考虑 $\varepsilon_{\mathrm{X}}=\{\mathrm{X}\in\mathcal{R}^{mn_c}\mid\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}^{-1}\mathrm{X}\leqslant 1\}$, 其中 $\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{21}^{\mathrm{T}}\\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22}\end{bmatrix}$, 并考虑

$$\varepsilon_{x,x}=\{x\in\mathcal{R}\mid x^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{x,x}^{-1}x\leqslant 1\},\ \mathcal{Q}_{x,x}=[\mathcal{Q}_{11}-\mathcal{Q}_{21}^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{22}^{-1}\mathcal{Q}_{21}]^{-1}=T\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}T^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

其中 T 通过 $x=T\mathrm{X}$ 来定义。则下式保证了 $\varepsilon_{\mathrm{X}}(\varepsilon_{x,x})$ 为不变集, 输入约束(2)满足:

$$\Phi_l^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}^{-1}\Phi_l-\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}^{-1}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathcal{Q}_{\mathrm{X}} & \mathcal{Q}_{\mathrm{X}}\Phi_l^{\mathrm{T}}\\ \Phi_l\mathcal{Q}_{\mathrm{X}} & \mathcal{Q}_{\mathrm{X}}\end{bmatrix}\geqslant 0,\ l\in\{1,2,\cdots,L\}, \tag{9}$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\| [K_j \quad e_j] Q_x^{1/2} \| \leqslant z_{j,\inf} \Leftrightarrow z_{j,\inf}^2 - [K_j \quad e_j] Q [K_j \quad e_j]^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ j \in \{1, 2, \cdots, m\}, \tag{10}$$

其中 K_j, e_j 分别表示 K 和单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行。

通过求解如下的优化问题可得到使 $\varepsilon_{\alpha,x}$ 体积最大的 Q:

$$\min_{Q_x} \log \det (T Q T^{\mathrm{T}})^{-1}, \quad \text{s.t.} \quad \text{式(9)} - \text{式(10)}。 \tag{11}$$

算法 2 离线, 确定 K, 满足输入约束。通过解式(11)得到 Q_x。若 $x(0) \subseteq \varepsilon_{\alpha,x}$, 则可在线; 否则增大 n_c, 重新进行离线设计。在线的, 在每一个采样时刻 k 求解如下的优化问题:

$$\min_{f} f^{\mathrm{T}} f, \quad \text{s.t.} \quad x^{\mathrm{T}} Q^{-1} x \leqslant 1, \tag{12}$$

执行 $u(k) = Kx(k) + c(k)$。

2 鲁棒预测控制的新算法

下面给出的 2 个算法分别是在文献[9]和文献[10]的基础上经改进得到的。

算法 3(三模预测控制) 离线, 选取 K 使满足输入约束。选取 n_c 和 $\overline{N}$。求解式(11)从而获得矩阵 Q, $Q_{x,x}$ 和椭圆集 $\varepsilon_{x,x}$。在线, 在每个采样时刻 k:

1) 如果 $x(k) \in \varepsilon_{\alpha,x}$, 求解式(12);

2) 如果 $x(k) \notin \varepsilon_{\alpha,x}$, 求解

$$\min_{c(k),\, c(k+1|k),\, \cdots,\, c(k+\overline{N}+n_c-1|k)} J(k) = \| [c(k|k)^{\mathrm{T}} c(k+1|k)^{T} \cdots c(k+\overline{N}+n_c-1|k)^{\mathrm{T}}] \|_2^2, \tag{13}$$

$$\text{s.t.} \quad \text{式(4)、式(5)}, u(k+i|k) = Kx(k+i|k) + c(k+i|k),\ i \in \{0, 1, \cdots, \overline{N}-1\}, \tag{14}$$

$$\| [x(k+\overline{N}|k)^{\mathrm{T}} c(k+\overline{N}|k)^{\mathrm{T}} \cdots c(k+\overline{N}+n_c-1|k)^{\mathrm{T}}] \|_{Q_x^{-1}}^2 \leqslant 1。 \tag{15}$$

3) 执行 $u(k) = Kx(k) + c(k|k)$。

通常, 状态反馈增益 K 的选择主要出于优化性能的考虑, 但必须同时兼顾对吸引域和计算量的要求。在算法 3 中, n_c 和 $\overline{N}$ 是影响吸引域和计算量的主要参数。注意, 与改变 $\overline{N}$ 相比, 改变 n_c 对计算量的影响更小一些。采用算法 3 仍然存在吸引域和计算量之间的矛盾, 这一矛盾是由选择 K 的最优性考虑造成的。

如果选择 $K = F_1$ (F_1 见算法 1), 式(13)– 式(15)、算法 2 和算法 1 可以自然地连接在一起, 达到优势互补的效果。由于 F_1 对应较大的椭圆型吸引域, 故可选择较小的 n_c 和 $\overline{N}$; 在 $\varepsilon_{\alpha,1}$ 内部, 则通过控制律的切换增强最优性。式(13)– 式(15)与算法 2 匹配。这是因为: 式(13)– 式(15)和算法 2 都是采用摄动量 2—范数性能指标, 同时式(13)– 式(15)将算法 2 的 ε_α 作为终端约束集。由于算法 1 中所有的离线控制律都是对二次型性能指标 $J_\infty(k)$ 优化的结果, 因此自然期望控制律最好选择为式(7)。但是, 在 $\varepsilon_{\alpha,1}$ 外面, 输入/状态约束的满足需要通过引入自由摄动量得到保证。为此, 在 $\varepsilon_{\alpha,1}$ 外面, 则期望摄动量越小越好。算法 2 和式(13)– 式(15)采用的性能指标恰好反应了“摄动量越小越好”的期望。可用如下直观的方法选取 Q_x:

$$\min_{\rho, Q_x} \rho, \quad \text{s.t.} \quad \text{式(9)和式(10)}, K = F_1, \rho T Q T^{\mathrm{T}} - Q \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} T Q T^{\mathrm{T}} & * \\ Q^{1/2} & \rho I \end{bmatrix} \geqslant 0。 \tag{16}$$

算法 4(混合 H-型预测控制)

第 1 步: 同算法 1 的离线部分。

第 2 步: 离线, 选择 $K = F_1$ 和合适的 n_c, $\overline{N}$。求解式(16)从而获得矩阵 $\boldsymbol{Q}_x$, $\boldsymbol{Q}_{x,x}$ 和椭圆集 $\varepsilon_{x,x}$。

第 3 步: 在线, 在每一个采样时刻 k, ①如果 $x(k) \in \varepsilon_{\alpha,1}$, 则采用式(7); ②如果 $x(k) \in \varepsilon_{\alpha,x} \backslash \varepsilon_{\alpha,1}$, 则求解式(12), 并执行 $u(k) = F_1 x(k) + c(k)$; ③如果 $x(k) \notin \varepsilon_{\alpha,x}$, 则求解式(13)– 式(15), 其中 $K = F_1$, 并执行 $u(k) = F_1 x(k) + c(k)$。

注意在算法 4 的第 2 步中, 也可以采用求解式(11), 而不求解式(16)。相比较而言, 式(16)更容易求解一些, 而且通过式(16)求得 $\varepsilon_{\alpha,x}$ 一定包含 $\varepsilon_{\alpha,1}$ 为子集; 用求解式(11)的方法不能保证 $\varepsilon_{\alpha,x} \supseteq \varepsilon_{\alpha,1}$。

3 仿真举例

考虑无量纲系统 $\begin{bmatrix} x^{(1)}(k+1) \\ x^{(2)}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \kappa(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)}(k) \\ x^{(2)}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$, 其中 $\kappa(k) \in [0.5 \quad 2.5]$ 是一个不确定参数。约束条件为 $|u| \leqslant 2$。取 $Q = 1$ 和 $R = 1$, 真实状态由 $\kappa(k) = 1.5 + \sin(k)$ 产生。当 $x^{(1)} \leqslant 59.2$ 且 $x(k) =$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$[x^{(1)}\quad 0]^{\mathrm{T}}$ 时, 优化问题式(8)总是可行的。故在算法 1 中, 选取 $x_i = [x_i^{(1)}\quad 0]^{\mathrm{T}}$, $x_i^{(1)} =$ 10, 18, 26, 34, 42, 50, 59. 2, 得到的椭圆型吸引域如图 1 中的虚线所示。采用 $K = F_1$, $n_c = 5$ 并解式(12), 得到椭圆型吸引域 $\varepsilon_{\alpha,x}$。然后, 选取 $N = 3$, $\varepsilon_{\alpha,x} \supset \varepsilon_{\alpha,1}$。对算法 4, 整个算法的吸引域为 $\bar{\gamma}$。

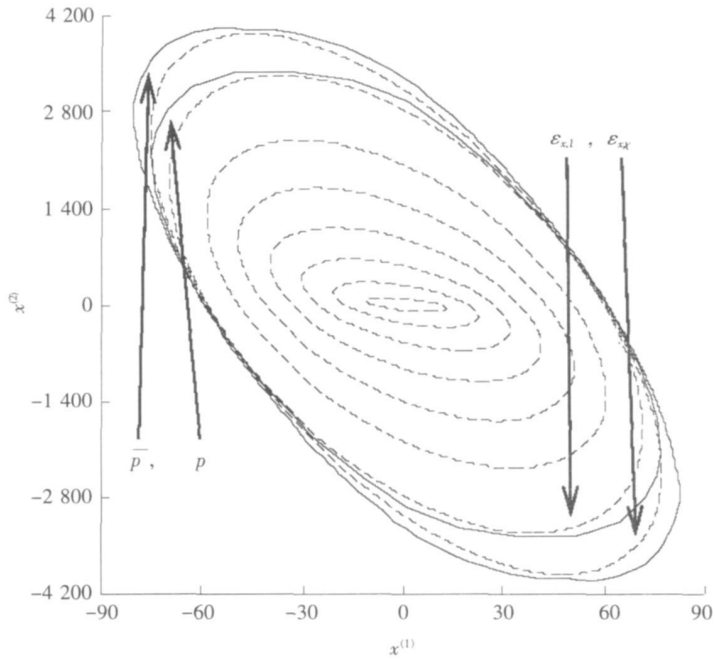

图 1　各个吸引域的比较

Fig. 1　Comparison of various regions of attradion

4　结　语

本文给出鲁棒预测控制的混合算法。当状态在原点附近的若干个嵌套的椭圆内时, 控制器采用文献[8]的离线鲁棒预测控制。在离线鲁棒预测控制对应的最大椭圆外面, 还有一个由文献[6]方法得到的更大的椭圆, 其对应着文献[6]的控制器。当状态在这个更大的椭圆外面时, 则采用标准的预测控制方法求解控制作用。本文的混合算法既包含在线优化与离线优化的混合, 也包括摄动量优化与控制量优化的混合。文献[8]中所有的优点都得到继承, 得到的控制比文献[8]的方法有更大的吸引域。

参考文献:

[1] 丁宝苍. 预测控制的理论与方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.

[2] DING B, XI Y, LI S. A synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control[J]. Automatica, 2004, 40(1): 163-167.

[3] 丁宝苍, 杨　鹏. 基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制器综合[J]. 自动化学报, 2006, 32(2): 304-310.

[4] 李小军, 丁宝苍, 焦克华, 等. The synthesis approaches of robust predictive control using LMI[J]. 微计算机信息, 2007, 25(9): 45-47.

[5] DING B, HUANG B. New formulation of robust MPC by incorporating off-line approach with on-line optimization[J]. International Journal of Systems Science, 2007, 38(6): 519-529.

[6] KOUVARITAKIS B, ROSSITER J A, SCHUURMANS J. Efficient robust predictive control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(11): 1 545-1 549.

[7] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 1996, 32(11): 1 361-1 379.

[8] WAN Z Y, KOTHARE M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 2003, 39(8): 837-846.

[9] ROSSITER J A, KOUVARITAKIS B, CANNON M. Triple mode control in MPC[A]. Proceedings of the American Control Conference[C]. Chicago: Illinois, 2000. 3 753-3 757.

[10] CANNON M, KOUVARITAKIS B, ROSSITER J A. Efficient active set optimization in triple mode MPC[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(11): 1 307-1 312.

《河北工业科技》被评为优秀期刊

近日, 根据河北省教育厅通知, 2004—2008 年度河北省教育系统的“三优”评比工作已经结束, 经专家委员会评审, 并经河北省教育厅批准, 我河北科技大学主办的《河北工业科技》被评为“2004—2008 年度河北省教育系统优秀期刊”。这次全省被评为优秀期刊的刊物共有 18 家。

(《河北工业科技》编辑部)

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net