

文章编号:1008-1542(2009)02-0083-04

# 一类非线性微分方程组解的有界性

王琦

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

**摘要:**对一类著名的非线性微分方程组  $\dot{x} = h(y) - F(x)$ ,  $\dot{y} = -\hat{g}(x, y)k(y) + e(t)$  的解的有界性进行了研究,得到了该系统解的正向有界性的新的充分条件和必要条件。举例说明所获得的结果推广和改进了一些前人得出的结论。

**关键词:**有界性;正向有界;微分方程

**中图分类号:** O175.14      **文献标识码:** A

## Boundedness for a class of non-linear differential equations

WANG Qi

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

**Abstract:** This paper obtained necessary and sufficient conditions for the boundedness for a class of important nonlinear differential equations:  $\dot{x} = h(y) - F(x)$ ,  $\dot{y} = -\hat{g}(x, y)k(y) + e(t)$ . An illustrative example was given to show that the results reached by many authors are extended and improved.

**Key words:** boundedness; positively bounded; differential equation

### 1 主要结论

笔者给出了系统

$$\begin{cases} \dot{x} = h(y) - F(x), \\ \dot{y} = -\hat{g}(x, y)k(y) + e(t) \end{cases} \quad (1)$$

的解的有界性的充分必要条件,其中  $h(y)$ ,  $F(x)$ ,  $\hat{g}(x, y)$  和  $k(y)$  ( $> 0$ ) 是实连续函数,  $e(t)$  在  $R^+ = \{t: t \geq 0\}$  上是连续的。显然,当  $h(y) = k(y) = 1$ ,  $\hat{g}(x, y) = g(x)$  时,系统(1)可转化为 Liénard 方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -g(x) + e(t). \end{cases}$$

此系统的定性问题已经被许多作者研究过<sup>[1-9]</sup>,特别是其一般化问题,如系统  $\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)x^2 +$

$g(x) = e(t)$  及系统  $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{a(x)}(h(y) - F(x)), \\ \dot{y} = -a(x)[g(x) - e(t)], \end{cases}$  它们的解的有界性已经引起了很多作者的兴趣<sup>[1-8]</sup>。笔者讨

论了系统(1)解的有界性的充分必要条件,举例说明本文推广和改进了文献[8]及文献[9]中的结果。

**定理** 假设系统(1)满足下列条件:

1) 存在  $M \gg 1$ ,使得对任意的  $y \in \mathbf{R}$ ,

收稿日期:2008-10-16;修回日期:2008-12-11;责任编辑:张军

作者简介:王琦(1973-),女,辽宁宽甸人,讲师,硕士,主要从事常微分方程方面的研究。

$$\left| \frac{h(y)}{k(y)} \right| \int_0^y \frac{h(s)}{k(s)} ds + M, \quad \lim_{|y| \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{h(s)}{k(s)} ds = +\infty; \quad (2)$$

2) 存在  $\mathbf{R}$ , 使得当  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  时,

$$h(y) (\hat{g}(x, y) - \hat{g}(x, y)) \leq 0, \quad F(x) \hat{g}(x, y) \leq 0, \quad (3)$$

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} \int_0^x \hat{g}(s, y) ds > -\infty; \quad (4)$$

$$3) \liminf_{x \rightarrow +\infty} F(x) > -\infty, \quad \limsup_{x \rightarrow -\infty} F(x) < +\infty, \quad \int_0^+ |e(s)| ds < +\infty; \quad (5)$$

4)  $h(\pm\infty) = \pm\infty$ , 且存在连续函数  $l(x)$  和  $l(y)$ , 使得

$$|\hat{g}(x, y)| \leq l(x)l(y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (6)$$

其中  $\int_0^+ l(x) dx < +\infty$ ,  $l(y)h(y)$  有界。

则系统(1) 所有解是正向有界的充分必要条件是

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \int_0^x \hat{g}(s, y) ds + (\operatorname{sgn} x) F(x) + (\operatorname{sgn} x) \int_0^x F(s) \hat{g}(s, y) ds \right) = +\infty. \quad (7)$$

## 2 定理的证明

定理将由下面的引理证明。

**引理 1** 若系统(1) 满足式(2) 一式(5) 和式(7), 则系统(1) 的所有解是正向有界的。

**证明** 假设  $(x(t), y(t)), t \in [0, t^+)$  是系统(1) 的异于点  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  的解, 其中  $[0, t^+)$  是  $(x(t), y(t))$  的最大存在区间,  $t^+ < +\infty$ 。

由式(3) 和式(4) 可知, 存在一个正数  $p$ , 使得当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $\int_0^x \hat{g}(s, y) ds + p > 0$ ; 当  $x \in \mathbf{R}^+, F(x) \leq -p$  且当  $x \in \mathbf{R}^-$  时,  $F(x) \geq p$ 。设

$$\hat{G}(x) = \int_0^x \hat{g}(s, y) ds, \quad H(y) = \int_0^y \frac{h(s)}{k(s)} ds, \quad E_t = \int_0^t |e(s)| ds,$$

$$V(t, x, y) = e^{-E_t} (\hat{G}(x) + p + H(y) + M), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

则  $V(t, x, y)$  且

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} &= V(t, x, y) [-|e(t)|] + e^{-E_t} \left\{ \frac{h(y)}{k(y)} [-\hat{g}(x, y)k(y) + e(t)] + \hat{g}(x, y) (h(y) - F(x)) \right\} \\ &\quad - e^{-E_t} \left\{ h(y) [\hat{g}(x, y) - \hat{g}(x, y)] + |e(t)| \left( \left| \frac{h(y)}{k(y)} \right| \int_0^y \frac{h(s)}{k(s)} ds - M \right) - F(x) \hat{g}(x, y) \right\} \\ &\leq -e^{-E_t} F(x) \hat{g}(x, y) \leq 0. \end{aligned}$$

于是

$$0 \leq V(t, x(t), y(t)) \leq V(0, x_0, y_0), \quad t \in [0, t^+). \quad (8)$$

首先说明  $y(t, 0, x_0, y_0)$  是有上界的。否则, 假设  $\limsup_{t \rightarrow t^+} y(t) = +\infty$ , 其中  $y(t) = y(t, 0, x_0, y_0)$ 。根据式(2), 存在  $y^* > \max\{y_0, 0\}$ , 使得  $H(y^*) + M > e^{E_+} V(0, x_0, y_0)$ 。既然  $\limsup_{t \rightarrow t^+} y(t) = +\infty$ , 存在  $n > 0$ , 使得  $y(t_n) > y^* > y_0 = y(0)$ 。由中值定理可知, 存在  $t^* \in (0, t_n)$ , 使得  $y^* = y(t^*)$ 。从而,

$$V(t^*, x(t^*), y(t^*)) = e^{-E_{t^*}} \{ (\hat{G}(x(t^*)) + p) + (H(y^*) + M) \} > V(0, x_0, y_0),$$

这与式(8) 矛盾。类似还可证明  $y(t)$  有下界。从而存在  $Y_0 > 0$ , 使得  $|y(t)| < Y_0, t \in [0, t^+)$ 。

关于  $x(t)$  有上界的证明, 可分为如下 3 种情况。

1)  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \hat{G}(x) = +\infty$  的情况

存在  $B_1 > x_0$ , 使得  $\hat{G}(B_1) + p > e^{E_+} V(0, x_0, y_0)$ 。则当  $t \in [0, t^+)$  时, 必有  $x(t) < B_1$ 。否则, 存在  $t_1 \in [0, t^+)$ , 使得  $x(t_1) = B_1$  且当  $0 \leq t < t_1$  时, 有  $x(t) < B_1$ 。于是

$$V(0, x_0, y_0) \leq V(t_1, x(t_1), y(t_1)) = e^{-E_{t_1}} (\hat{G}(x(t_1)) + p) > V(0, x_0, y_0),$$

矛盾。

2)  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$  的情况

存在  $B_2 > x_0$ , 使得  $F(B_2) > h_0$ , 其中  $h_0 = \max_{x, y} |y_0| / |h(y)|$ 。可以断定当  $t \in [0, t^+)$  时, 有  $x(t) < B_2$ 。否则, 存在  $t_2 \in [0, t^+)$ , 使得  $x(t_2) = B_2$  且当  $0 \leq t < t_2$  时, 有  $x(t) < B_2$ 。于是

$$0 < \frac{dx(t_2)}{dt} = h(y(t_2)) - F(x(t_2)) = h_0 - F(B_2) < 0,$$

矛盾。

3)  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} (\hat{G}(x) + F(x)) < +\infty$  和  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \hat{g}(s, y) F(s) ds = +\infty$  的情况

由式(5)可知, 存在  $f_0 > 0$ , 使得对任意的  $x > 0$ , 有  $|F(x)| < f_0$ 。则  $|\frac{dx}{dt}| \leq |h(y(t))| + |F(x(t))|$

$h_0 + f_0, x > 0$ 。既然  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x F(s) \hat{g}(s, y) ds = +\infty$ , 则存在  $B_3 > \max\{x_0, 0\}$ , 使得

$$\int_0^{B_3} F(u) \hat{g}(u, y) du > \int_0^{x_0} F(u) \hat{g}(u, y) du + (h_0 + f_0)e^{E_+} V(0, x_0, y_0)。$$

笔者断定当  $t \in [0, t^+)$  时, 有  $x(t) < B_3$ 。否则, 存在  $t_3 \in [0, t^+)$ , 使得  $x(t_3) = B_3$  且当  $0 \leq t < t_3$  时, 有  $x_0 < x(t) < B_3$ 。由  $\frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} = -e^{-E_+} F(x) \hat{g}(x, y)$ , 知

$$\begin{aligned} & V(t_3, x(t_3), y(t_3)) - V(0, x_0, y_0) = -e^{-E_+} \int_0^{t_3} F(x(t)) \hat{g}(x(t), y) dt \\ & - \frac{e^{-E_+}}{h_0 + f_0} \int_0^{t_3} F(x(t)) \hat{g}(x(t), y) \left| \frac{dx}{dt} \right| dt = - \frac{e^{-E_+}}{h_0 + f_0} \int_0^{B_3} F(u) \hat{g}(u, y) du < -V(0, x_0, y_0), \end{aligned}$$

从而  $V(t_3, x(t_3), y(t_3)) < 0$ , 与式(8)矛盾。

综上所述,  $x(t)$  是有上界的。与此类似, 笔者也可以证明当

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x \hat{g}(s, y) ds + (\text{sgn } x) F(x) + (\text{sgn } x) \int_0^x F(s) \hat{g}(s, y) ds = +\infty$$

时,  $x(t)$  是有下界的。此外, 由解的延拓定理可得  $t^+ = +\infty$ 。证毕。

引理 2 若系统(1) 满足式(2) — 式(6), 则系统(1) 的所有解正向有界的必要条件是式(7) 成立。

证明 假设式(7) 不成立, 即有  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^x \hat{g}(s, y) ds + F(x) + \int_0^x F(s) \hat{g}(s, y) ds \right) < +\infty$ 。由式(2) — 式(5)可知, 存在  $G^*$ , 使得  $|F(x)| < G^*$ , 且对所有的  $x \in \mathbf{R}^+$ , 有  $\left| \int_0^x \hat{g}(s, y) ds \right| < G^*$  以及  $0 < \int_0^x F(s) \hat{g}(s, y) ds < G^*$ 。既然  $h(\pm \infty) = \pm 2$ , 存在  $y^* > 0$ , 对所有的  $y > y^*$ , 有  $h(y) > 1 + G^*$ 。令  $y_0 > y^*$ , 使得

$$H(y_0) > e^{E_+} \{ H(y^*) + G^* + \int_0^{y^*} (s) ds + \int_0^{y^*} F(s) \hat{g}(s, y) ds \} + (e^{E_+} - 1)(M + p),$$

其中  $2 = \sup_y |h(y)l(y)|$ 。可断定系统(1) 的异于点  $(x_0, y_0)$  的解  $(x(t), y(t))$  总是位于直线  $y = y^*$  的上方。因而, 对任意的  $t \geq 0$ , 有  $\frac{dx}{dt} = h(y) - F(x) > 1$ , 从而  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$  且系统(1) 有 1 个无界解。这与所有解是正向有界相矛盾。

下面证明对任意的  $t \geq 0$ , 有  $y(t) > y^*$ 。否则, 存在  $t_1 > 0$ , 使得  $y(t_1) = y^*$  且当  $t \in [0, t_1]$  时, 有  $y(t) > y^*$ 。当  $t \in [0, t_1]$  时,  $\frac{dx}{dt} = h(y) - F(x) > 1$ 。且在  $t \in [0, t_1]$  上,  $x(t)$  是递增的, 即  $0 = x(0) < x(t) < x(t_1)$ 。设  $W(t, x, y) = e^{E_+} (H(y) + M + \hat{G}(x) + p)$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} \Big|_{(1)} &= |e(t)| \cdot W(t, x, y) + e^{E_+} \left\{ \frac{h(y)}{k(y)} (-\hat{g}(x, y)k(y) + e(t)) + \hat{g}(x, y)(h(y) - F(x)) \right\} \\ &= e^{E_+} \{ -F(x) \hat{g}(x, y) + h(y)(\hat{g}(x, y) - \hat{g}(x, y)) \} \\ &= e^{E_+} \{ -F(x) \hat{g}(x, y) - h(y)(x)(l(y) + l(y)) \} \\ &= -e^{E_+} (x(x) + F(x) \hat{g}(x, y))。 \end{aligned}$$

$$W(t_1, x(t_1), y(t_1)) - W(0, 0, y_0) = e^{E_+} \int_0^{t_1} (x(s)) ds - e^{E_+} \int_0^{t_1} F(x(s)) \hat{g}(x(s), y) ds - e^{E_+} \int_0^+ (s) ds - e^{E_+} \int_0^+ F(s) \hat{g}(s, y) ds。$$

于是,  $W(t_1, x(t_1), y(t_1)) = H(y_0) + p + M - e^{E_+} \int_0^+ (s) ds - e^{E_+} \int_0^+ F(s) \hat{g}(s, y) ds。$ 另一方面, 由

$$W(t_1, x(t_1), y(t_1)) = e^{E_+} (H(y(t_1)) + M + \hat{G}(x(t_1)) + p) = e^{E_+} [H(y^*) + M + G^* + p]$$

可知,  $H(y_0) = e^{E_+} \{ H(y^*) + G^* + \int_0^+ (s) ds + \int_0^+ F(s) \hat{g}(s, y) \} + (e^{E_+} - 1)(M + p)$ , 与  $y_0$  的选取相矛盾。证毕。

### 3 应用举例

例 考虑系统  $\dot{x} = h(y) - F(x), \dot{y} = (x)l(y) - g(x) + e(t)$ , 其中  $h(y) = m / |y|^p \text{sgn } y, (m > 0,$

$$p > 1); l(y) = -y + 1; e(t) = \frac{1}{1+t^2}; (x) = 1; F(x) = 3(x - \frac{1}{2}); g(x) = \begin{cases} 2x, & x > -1, \\ \frac{2}{x^3}, & x < -1. \end{cases} \text{ 令 } \hat{g}(x, y) =$$

$-(x)l(y) + g(x), k(y) = 1$  且  $\int_0^+ = 0$ , 则  $l(\cdot) = 1$  且

$$h(y) (\hat{g}(x, y) - \hat{g}(x, y)) = h(y) (l(y) - l(\cdot)) = -m y / |y|^p \text{sgn } y = 0,$$

$$\int_0^x g(s) ds = \begin{cases} x^2 + (x - 1), & x > -1, \\ 2 - \frac{1}{x^2} - (x - 1), & x < -1, \end{cases}$$

$$\int_0^x \hat{g}(s, y) ds = \begin{cases} x^2 - x, & x > -1, \\ 2 - \frac{1}{x^2} - x + (x - 1), & x < -1, \end{cases}$$

$$F(x) \hat{g}(x, y) = F(x) (g(x) - l(\cdot) (x)) = \begin{cases} 6(x - \frac{1}{2})^2 & 0, & x > -1, \\ 3(\frac{2}{x^3} - 1)(x - \frac{1}{2}) & 0, & x < -1. \end{cases}$$

由引理 1 可知, 系统的解是正向有界的。

### 参考文献:

- [1] ANTOSIEWICZ H A. On non-linear differential equations of the second order with integrable forced term[J]. J London Math Soc, 1955, 30:64-67.
- [2] BURTON T A. On the equation  $x'(t) + f(x)h(x) + g(x) = e(t)$  [J]. Ann Mat Pure Appl, 1970, 85:277-286.
- [3] JIANG Ji-fa. The boundedness and convergence of solutions of second order differential equations with applications[J]. Ann Mat Pure Appl, 1993, CLXV(1) :29-47.
- [4] LASALLE J P. Stability of non-autonomous systems[J]. Nonlinear Anal Th Meth Appl, 1976, 1:83-91.
- [5] OPIAL Z. Sur une équation diff éentielle non lin éaire du sucond ordre[J]. Ann Polon Math, 1960, 8:65-69.
- [6] PAN Zhi-gang, JIANG Ji-fa. On the global asymptotic behavior of the generalized li énard equation[J]. J Sys Sci and Math Scis, 1992, 12(4) :376-380.
- [7] QIAN Chuang-xi. Boundedness and asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear system[J]. Bull London Math Soc, 1992, 249:281-288.
- [8] ZHOU Jin. Boundedness and convergence of solutions of a second-order nonlinear differential system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256:360-374.
- [9] ZHAO Li-qin. Boundedness and convergence for the non-li énard type differential equation[J]. Acta Mathematica Scientia, 2007, 27(2) :338-346.