第 29 卷第 3 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol.29, No.3
2008 年 9 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Sept.2008

文章编号: 1008-1542(2008)03-0185-03

分支-切割法的框架及收敛性

王艳红, 张文娟

(西安工业大学数理系, 陕西西安　710032)

摘　要: 在解决各类整数规划问题时, 分支-切割法是一个非常成功的方法, 并且它能保证给出一个最优解。从一个简单例子出发引出分支-切割算法的思想, 从而给出其算法框架, 并对其收敛性进行分析。

关键词: 分支-切割; 混和整数线性规划; 分支; 割平面

中图分类号: O221.4　　　文献标识码: A

Framework and convergence of branch-and-cut algorithms

WANG Yan-hong, ZHANG Wen-juan

(Department of Mathematics and Physics, Xi′an Technological University, Xi′an Shaanxi 710032, China)

Abstract: Branch-and-cut methods are very successful techniques for solving a wide variety of integer programming problems, and they can provide a guarantee optimality. In this paper, we derive the thought of branch-and-cut algorithms from a simple example, giving the framework of the algorithms and analyzing if the algorithms converge or not.

Key words: branch-and-cut; mixed integer linear programming; branch; cutting plane

许多组合优化问题都可以被描述为混合整数规划问题, 此类问题可以用分支-切割法来解决。解决整数规划的 2 种基本方法为分支定界法和割平面法[1,2], 而分支-切割法恰恰就是分支定界法和割平面法的结合。该方法通过解一系列整数线性规划的松弛问题来实现[3]。

1　一个简单的例子

先看一个整数规划问题(简称 ILP)的例子[4]:

$$\min z = -6x_1 - 5x_2,$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 11, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 5, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \text{且为整数。} \end{cases}$$

要解上述整数规划问题, 可用分支定界法, 也可用割平面法, 当然, 这 2 种方法都各有利弊。若将 2 种方法揉和起来使用, 是否会优于单种算法呢? 下面, 笔者将该例子的算法过程表示在一个图里, 见图 1。

从图 1 中可以看到, 最优解即为(3, 2), $z = -28$。该例子的解决过程就是将分支定界法和割平面法综合起来考虑。只需 3 步就可以得到最优解, 若仅仅用分支定界法或割平面法的话, 计算量会大大增大。当然, 用该算法解决问题有若干种方式, 主要问题是决定是否分支或是否切割以及怎么分支和怎样生成割平面。这就需要利用已有的知识和方法再结合具体的问题进行具体分析。

收稿日期: 2008-03-24; 责任编辑: 张　军

作者简介: 王艳红(1981-), 女, 甘肃陇西人, 硕士, 主要从事组合最优化方面的研究。

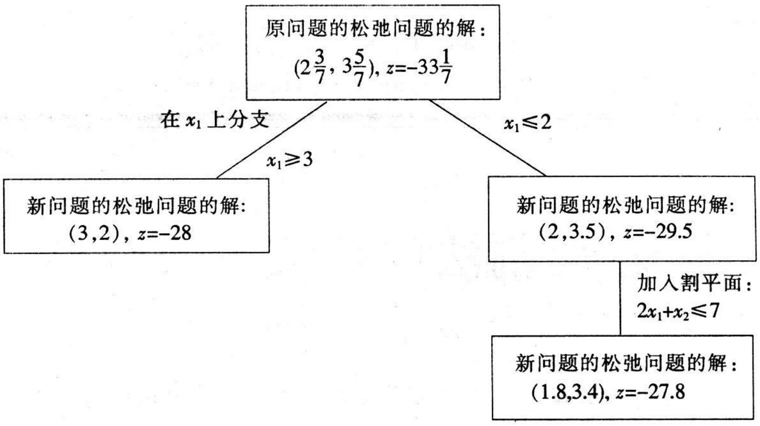

图1 一个二维整数规划问题的分支–切割算法过程

Fig.1 Branch-and-cut algorithm process of a two-dimensional integer programming problem

2 算法的框架

将混合整数线性规划问题

$$\min c^{\mathrm{T}} x,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \leqslant b, \\ x \geqslant 0, \\ x_i \text{ 为整数}, \quad i=1, \cdots, p \end{cases}$$

作为标准形式。这里 x 和 c 是 n 维向量; b 是 m 维向量; $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, 前 p 个变量被限制为整数, 其余的可以是分数。如果 $p=n$, 则变为纯整数规划问题。如果一个变量只能取0和1, 则变为二元变量。如果所有的变量都是二元的, 则问题变为二元问题[5]。

分支–切割算法的框架如下。

1) 初始化: 初始的整数规划问题用 MILP^0 表示。将上界设为 $\bar{z}=+\infty$, 对一个问题 $l \in L$, 将其下界设为 $\underline{z}_l=-\infty$。

2) 终止: 如果 $L=\varnothing$, 则解 x^* 使得目标值 $\underline{z}$ 是最优的, 如果没有这样的 x^*, 则 MILP 是不可行的。

3) 问题选择: 从 L 中选择并删除一个问题 MILP^l。

4) 松弛问题: 解整数线性规划 MILP^l 的松弛问题。如果松弛问题是不可行的, 令 $\underline{z}_l=+\infty$, 然后执行第6步, 如果它是有限的, 记 $\underline{z}_l$ 为松弛问题的最优目标值, x^{lR} 为最优解; 否则令 $\underline{z}_l=-\infty$。

5) 加入割平面: 如果需要, 寻找割平面, 该割平面会破坏 x^{lR}; 若找到了, 将其加入松弛问题并返回第4步。

6) 测量和删除: (a) 如果 $\underline{z}_l \geqslant \bar{z}$, 返回第2步; (b) 如果 $\underline{z}_l < \bar{z}$ 且 x^{lR} 是整数并可行, 更新 $\bar{z}=\underline{z}_l$, 将 L 中所有 $\underline{z}_l \geqslant \bar{z}$ 的问题删除, 并返回第2步。

7) 划分: 让 $\left\{s^{lj}\right\}_{j=1}^{j=k}$ 是问题 MILP^l 的约束集 s^l 中的一个划分。在 L 中加入问题 $\left\{\mathrm{MILP}^{lj}\right\}_{j=1}^{j=k}$, 这里 MILP^{lj} 是 MILP^l 对 s^{lj} 的可行域的限制, 且 $\underline{z}_{lj}(j=1, 2, \cdots, k)$ 是父母问题 l 的 $\underline{z}_l$ 值的集合。返回第2步。

分支–切割算法的框架如上所示。注意到 L 是分支–切割树的活动结点集。已知的 MILP 的可行点对应的值为 $\bar{z}$, 即给出了一个 MILP 的最优值的一个上界, 进一步, $\underline{z}_l$ 是当前子问题的最优值的一个下界, 子问题 LP 的松弛问题的值可用来更新 $\underline{z}_l$[6]。在某些情况下, 在第5步可能发现很多不可用的割平面, 此时, 可对割平面进行某种分类。在第7步中形成的子问题叫做孩子子问题, 前面的 MILP^l 问题即父母子问题。通常, 划分形成一种变量分离形式。例如: $x_i \leqslant a$, $x_i \geqslant a+1$, 对某个变量 x_i 和整数变量 a。其他的选择也是可能的, 这种分离在分支定界法中有更多的讨论[7]。

对于整数规划问题的松弛问题, 有很多方法可以解决。典型的方法是对原始的松弛问题用简单的方法来解决。随后的松弛问题用对偶方法来解决, 因为父母子问题的松弛问题的对偶解仍然是孩子子问题的松弛问题的可行解。另外, 第5步中, 当割平面被加入时, 当前的重复仍然是对偶可行的, 所以, 再次改变的松

弛问题能够用对偶方法来解决。用一个内部点的方法也是可能的, 而且, 当松弛问题规模相当大时, 这是一个很好的选择。如果目标函数或 MILP 中的约束是非线性的, 问题仍然可用分支-切割法来解决。由此可见, 分支-切割法是一个非常有用且成功的方法。

3　分支-切割算法的收敛性

笔者用定理的形式来说明分支-切割算法的收敛性。先看几个引理。

引理 1　分支不会丢失整数可行解。

引理 2　割平面不会割掉整数可行解。

引理 3　对于 MILP, 若有最优解, 则经过有限次迭代, 可得到其最优解。

引理 1、引理 2、引理 3 都是已知或显然的结论, 在此不再证明。现给出定理 1。

定理 1　对于 MILP, 分支-切割算法经过有限次迭代可得到其最优解, 或得出其无可行解。

证明　由引理 1 和引理 2 可知, 分支和割平面不会丢失整数可行解, 所以, 在分支-切割算法中, 不会丢失 MILP 的可行解。再由引理 3 及分支-切割算法知, 迭代使目标函数值不断减小(当目标值比迭代前的大, 即下界大于上界时, 该分支被删去)。因此, 分支-切割算法可以在有限次迭代下得到 MILP 的最优解。若迭代之后, 没有符合要求的 x^*, 则算法得出 MILP 无可行解的结果。定理证毕。

4　结　语

介绍了分支-切割算法, 可以看出, 分支-切割算法在解决整数规划, 尤其是混合整数规划时, 是一个可操作的方法。由于结合了分支定界法和割平面法, 分支-切割法有许多优点, 可用来解决很多问题, 有一定的实际意义。

参考文献:

[1] 钱颂迪. 运筹学[M]. 修订版. 北京: 清华大学出版社, 1990.

[2] CHRISTOS H P, KENNETH S. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity[M]. Canada: General Publishing Company, 1998.

[3] PARDALOS P M. Handbook of Applied Optimization[M]. Oxford: Oxford University Press, 2000.

[4] JOHN E M. Branch-and-cut algorithms for combinatorial optimization problem[J]. Mathematical Sciences, 1999, 23: 166-168.

[5] BALAS E, CERIA S, CORNUÉJOLS G. Mixed 0-1 programming by lift-and-project in a branch-and-cut framework[J]. Management Science, 1996, 42: 1 229-1 246.

[6] NEMHAUSER G L, SAVELSBERGH M W P, SIGISMONDI G C. A mixed integer optimizer[J]. Operations Research Letters, 1994, 15: 47-58.

[7] JÜNGER M, THIENEL S. Introduction to abacus-a branch-and-cut system[J]. Operations Research Letters, 1998, 22: 83-95.

向本期载文的审稿专家致谢

本期《河北科技大学学报》共发表论文 20 篇。这些论文的发表, 是与有关专家的认真审读、细查资料、推敲分析、中肯评价分不开的。他们的评价(有的给予了客观的肯定, 有的给出了修改意见, 有的指出了存在的问题)使作者和编者都受益匪浅。对此, 本编辑部特向这些专家表示敬意, 对他们的辛勤劳动表示感谢。

本期载文的审稿专家名单如下(按姓名的汉语拼音顺序排列):

白志明　陈　廷　陈　薇　陈　鸣　崔洪斌　范松川　李法朝　李荣平
刘守信　任军号　任世伟　孙晓云　唐瑞增　汪国昭　王　坤　许永兵
岳　峰　翟建华　翟学良

(本刊编辑部)