

文章编号: 1008-1542(2008)03-0182-03

一类非线性系统分岔混沌拓扑结构分析

邓学明

(浙江科技学院理学院, 浙江杭州 310023)

摘要: 分析了一类非线性系统的动力学行为。基于稳定性理论, 讨论了 CHEN 系统平衡点的稳定性、局部拓扑结构。对 CHEN 系统进行数值模拟表明理论结果和数值结果一致。

关键词: CHEN 系统; 分岔; 拓扑结构; 全局复杂性

中图分类号: O193 文献标识码: A

A nalysis of bifurcation topological structure of non-linear system

DEN G Xue-ming

(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

Abstract: The dynamical behavior of CHEN system was studied. Based on the stability theory, we discussed the stability of equilibrium and topological structure. The simulation results indicate that the theory and simulation results are consistent.

Key words: CHEN system; bifurcation; topological structure; global complicated character

自混沌现象发现以来, 对当今社会产生了巨大的冲击, 因为系统中出现混沌现象意味着运动本身具有内在的不稳定性^[1], 不稳定性和复杂性使精确预测系统的行为受到很大限制, 合理预测系统的行为也变得复杂起来^[2~4]。在社会生活的各领域由于非线性因素的相互作用, 许多问题日趋复杂化(有低维向高维的演化过程), 系统的内在结构也呈现出多样性、复杂性^[5~8]。因此深入开展对复杂系统内在结构特征的研究, 通过研究系统的周期解失稳、分岔、倍周期分岔、各分岔点值的位置、复杂系统进入混沌的道路, 从而揭示复杂现象产生的原因, 就变得越来越重要了。

非线性动力系统在临界点附近具有复杂的动力学特性^[9], 根据系统在临界点的 Jacobian 矩阵的结构可将其分为余维一、余维二等^[10]。一般的 2 对纯虚根特征值余维二系统, 不仅会产生静态分岔, 且当系统的特征指数穿越 -1 时, 会有 Hopf 分岔产生^[11]。许多工程及物理系统在复合临界点附近都会存在复杂的动力学行为, 已有许多关于其临界点附近的分岔和稳定性方面的研究报道^[12]: SCHEIDL 等人用平均法研究了其在单零及一对纯虚根复合临界点附近的静态分岔及 Hopf 分岔^[13], SAMARANA YAKE 和 BAJA 给出了其 2 对纯虚根临界点附近在共振及非共振情形下的动力学特征^[14], YI 和 BI 给出了维三的 Norm form(进一步指出了导致 2-D 及 3-D 环面的分岔过程)。笔者从 CHEN 系统出发, 分析这一模型可能出现的各种情况: 平衡、稳定周期、分形、Hopf 分岔以及参数与 Hopf 分岔之间的关系。

1 CHEN 系统

收稿日期: 2008-03-24; 修回日期: 2008-05-19; 责任编辑: 王士忠

作者简介: 邓学明(1969), 男, 黑龙江虎林人, 讲师, 主要从事物理学和物理教学理论方面的研究。

CHEN 系统是一个非线性动力系统, 具有混沌特性。表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3. \end{cases} \quad (1)$$

当系统参数 $a = 35, b = 3, c = 28$ 时, 系统处于混沌状态, 混沌吸引子如图 1 所示(笔者研究的 CHEN 系统是无量纲化系统, 所以相图不标单位)。

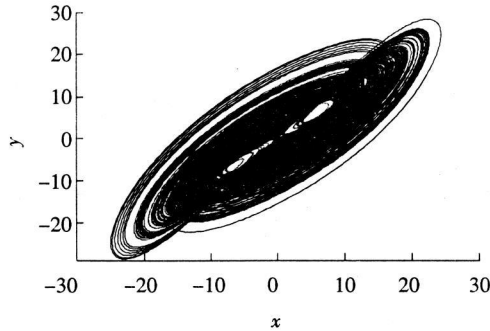


图 1 CHEN 系统的相图

Fig. 1 Phase portraits of CHEN system

首先对式(1)在平衡点附近的局部分岔进行分析, 令 A_p 为系统的吸引集, 记

$$x = (x_1, x_2, x_3), f(x) = \begin{bmatrix} a(x_2 - x_1) \\ (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{bmatrix}, Df(x) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - x_3 & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{bmatrix}.$$

设 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 是式(1)的平衡点, 则 $f(x) = 0$ 。即当 $2c - a \leq 0$ 时, 系统(1)有唯一的平衡点 $P = (0, 0, 0)$; 当 $2c - a > 0$ 时, 系统(1)有 3 个平衡点 $P = (0, 0, 0)$ 和 $P^\pm = (\pm \sqrt{b(2c - a)}, \pm \sqrt{b(2c - a)}, 2c - a)$ 。本文只讨论 $2c - a \leq 0$ 的情形。

2 局部拓扑结构与分岔混沌研究

当 $2c - a \leq 0$ 时, 系统(1)在平衡点 $P = (0, 0, 0)$ 处对应的线性化系统的特征方程为

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + (a - c)\lambda + a^2 - 2ac) = 0, \quad (2)$$

式(2)所对应的 3 个特征值为 $\lambda = -b$, 且 λ_2 与 λ_3 由式(3)决定,

$$\lambda^2 + (a - c)\lambda + a^2 - 2ac = 0. \quad (3)$$

由于 $2c - a \leq 0$, 式(3)对应的 2 个特征值 λ_2 与 λ_3 的解可分为 2 种情况。

情况 1 $2c - a < 0$, 则 $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$, 结合 $\lambda_1 = -b < 0$, 则系统(1)在满足情况 1 的条件下其平衡点 $P = (0, 0, 0)$ 是稳定的汇, 此时 $A_p = \{P\}$ 。

情况 2 $2c - a = 0$, 则 $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = -c < 0$, 下面应用中心流形定理来判断此平衡点的稳定性。此时 3 个特征值所对应的特征向量分别是: 对应于 $\lambda = -b$ 的特征向量为 $(0, 0, 1)^T$, 对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $(1, 1, 0)^T$, 对应于 $\lambda = -c$ 的特征向量为 $(1, 1 - c/a, 0)^T$, λ_2, λ_3 的特征向量张成稳定子空间 E^s , λ_1 的特征向量张成中心子空间 E^c 。对特征基 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 进行线性变换 $T(y_1, y_2, y_3)^T$, 有:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 - c/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - a/c & a/c & 0 \\ a/c & -a/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

将式(4)代入式(1)可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a(y_1 + y_2)y_3/c \\ -a(y_1 + y_2)y_3/c \\ -(y_1 + y_2)^2 - cy_2(y_1 + y_2)/a \end{bmatrix}. \quad (5)$$

对新变量 $(y_1, y_2, y_3)^T$ 而言其 3 个特征值并没有改变, 其所对应的特征向量分别是: 对 $\lambda = -b$ 的特征向量为 $(0, 0, 1)^T$, 对 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $(1, 0, 0)^T$, 对 $\lambda = -c$ 的特征向量为 $(0, 1, 0)^T$, 故 $E^c = y_1, E^s = \text{span}\{(y_1, y_2, y_3)^T\}, E^u = \emptyset$, 方程组(5)的线性部分已解耦:

$$\dot{y}_1 = -a(y_1 + y_2)y_3/c, \tag{6a}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a(y_1 + y_2)y_3 \\ (y_1 + y_2)^2 - cy_2(y_1 + y_2)/a \end{bmatrix}. \tag{6b}$$

中心流形 W^c 是与中心子空间 E^c 相切的曲线, 求 W^c 的方程, 需求在平衡点 $P = (0, 0, 0)$ 的邻域内的 W^c 与 E^c 在平衡点 $P = (0, 0, 0)$ 相切后, 从 y_1 向 y_2 及 y_3 偏离的函数 $h_1(y_1)$ 和 $h_2(y_1)$, 中心流形:

$$W^c = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = h(y) = \begin{bmatrix} h_1(y_1) \\ h_2(y_1) \end{bmatrix} \right\}, h(0) = 0, Dh(0) = 0,$$

$h(y): R \rightarrow R^2$ 为在点 $P = (0, 0, 0)$ 邻域上的微分同胚, 用形式幂级数法求 $h(y)$ 。设

$$W^c = \left\{ \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = h(y) = \begin{bmatrix} h_1(y_1) \\ h_2(y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1y_1^2 + b_1y_1^3 + c_1y_1^4 + \dots \\ a_2y_1^2 + b_2y_1^3 + c_2y_1^4 + \dots \end{bmatrix} \right\}. \tag{7}$$

将式(7)代入式(6b)得

$$\begin{bmatrix} 2a_1y_1 + 3b_1y_1^2 + 4c_1y_1^3 + \dots \\ 2a_2y_1 + 3b_2y_1^2 + 4c_2y_1^3 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1cy_1^2 - (b_1c + a_2a/c)y_1^3 \\ (1 - a_2b)y_1^2 + (2a_2 - b_2b - ca_2/a)y_1^3 \end{bmatrix}.$$

比较系数得:

$$\begin{cases} a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = 0, \\ a_2 = 0, b_2 = 1/3, c_2 = -b/12. \end{cases}$$

精确到四次方的中心流形为

$$W^c = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = h(y) = \begin{bmatrix} h_1(y_1) \\ h_2(y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O(y_1^5) \\ y_1^3/3 - by_1^4/12 + O(y_1^5) \end{bmatrix} \right\}.$$

将 y_2 和 y_3 代入式(6a)可得流形上的方程:

$$\dot{y}_1 = -ay_1^4/3c - aby_1^5/12c + O(y_1^6). \tag{8}$$

由于式(8)中 y_1^4 的系数为负, 故在中心流形上的流是渐近稳定的, 由中心流形定理可知平衡点 $P = (0, 0, 0)$ 也是渐近稳定的。

综合情况 1 和情况 2, 当 $2c - a \leq 0$ 时, 系统(1)的平衡点 $P = (0, 0, 0)$ 是渐近稳定的。

3 数值分析和讨论

下面用数值方法验证上述理论结果。若取 $a = 2, b = 0.5, c = 0.9$, 则 a, b, c 满足 $2c - a \leq 0$ 关系。取初值为 $(x_1, x_2, x_3) = (0.001, 0.001, -0.001)$, 相图见图 2(无量纲单位), 数值结果表明: 系统在满足 $2c - a \leq 0$ 条件下的平衡点是稳定的汇, 与理论推导的结果完全一致。

4 结论

基于稳定性理论分析了 CHEN 系统平衡点的稳定性。当参数 a, b, c 满足 $2c - a \leq 0$ 时, 系统有唯一的平衡点 $P = (0, 0, 0)$ 是渐近稳定的; 同时用数值方法讨论了 CHEN 系统平衡点是稳定的汇, 与理论推导的相吻合。

感谢刘勇博士有益的建议。

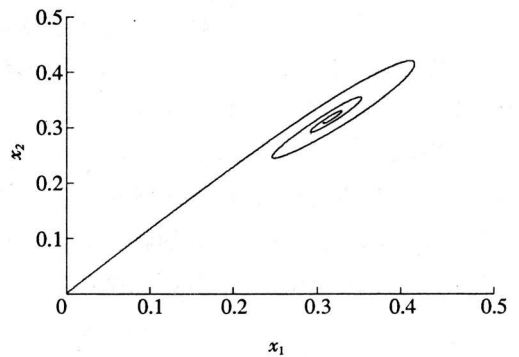


图 2 CHEN 系统的相图

Fig. 2 Phase portraits of CHEN system

(下转第 193 页)

参考文献:

- [1] CHUA L, YANG L. Cellular neural networks: Theory[J]. IEEE Trans Circ Syst, 1988, 35: 1 257-1 272.
- [2] CHUA L, ROSKA T. Cellular Neural Networks and Visual Computing[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [3] ROSKA T, CHUA L O. Cellular neural networks with nonlinear and delay-type template[J]. Int J Circuit Theory Appl, 1992, 20: 469 - 481.
- [4] HUANG T. Exponential stability of fuzzy cellular neural networks with distributed delay[J]. Phys Lett A, 2006, 351: 48-52.
- [5] PARK J H. On global stability criterion for neural networks with discrete and distributed delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30: 113-118.
- [6] WANG Y, XIONG W, ZHOU Q, et al. Global exponential stability of cellular neural networks with continuously distributed delays and impulses[J]. Phys Lett A, 2006, 350: 89-95.
- [7] CHEN A, CAO J, HUANG L. Global robust stability of interval cellular neural networks with time-varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23: 787-799.
- [8] LIOU T L, YAN J J, CHENG C J, et al. Global exponential stability condition of a class of neural networks with time varying delays[J]. Phys Lett A, 2005, 339: 333-342.
- [9] ZHANG Q, WEI X, XU J. Delay-dependent exponential stability of cellular neural networks with time-varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23: 1 363-1 369.
- [10] ZHANG Q, WEI X, XU J. On global exponential stability of delayed cellular neural networks with time varying delays[J]. Appl Math Comput, 2005, 162: 679-686.
- [11] SINGH V. Robust stability of cellular neural networks with delay: Linear matrix inequality approach[J]. IEE Proc Control Theory Appl, 2004, 151: 125-129.
- [12] BOYD S, GHAOUIL E, FERON E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [13] GU K, KHARITONOV V L, CHEN J. Stability of Time-Delay Systems[M]. Massachusetts: Birkhauser, 2003.
- [14] LIEN C H, CHUNG L Y. Global asymptotic stability for cellular neural networks with discrete and distributed time varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 34: 1 213-1 219.

(上接第 184 页)

参考文献:

- [1] LU Q C. Bifurcation and Singular[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House, 1995.
- [2] BRUNELLA M, MIARIM. Topological equivalence of a piecewise vector field with its principal part defined through Newton polyhedra[J]. J Differential Equations, 1990, 85: 338-366.
- [3] CIMARA, LLIBRE E. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane[J]. Math Anal Appl, 1990, 47: 420-448.
- [4] MORGUL O, SOLAK E. On the synchronization of chaotic systems by using state observers[J]. Phys Rev Lett, 1999, 82: 77-80.
- [5] 马文麒, 杨承辉. 一类耦合非线性振子同步混沌 Hopf 分岔及其电路仿真[J]. 物理学报, 2005, 54: 1 064-1 069.
- [6] 马文麒, 杨俊忠, 刘文吉, 等. 混沌振子的广义旋转数和同步混沌的 Hopf 分岔[J]. 物理学报, 1999, 48: 787-794.
- [7] 张旭, 沈柯. 时空混沌的单向耦合同步[J]. 物理学报, 2002, 51: 2 702-2 706.
- [8] 匡锦瑜, 邓昆, 黄荣怀. 利用时空混沌同步进行数字加密通信[J]. 物理学报, 2001, 50: 1 856-1 860.
- [9] YU P, HUSEYIN K. A perturbation analysis of interactive static and dynamic bifurcations[J]. IEEE Transactions of Automatic Control, 1988, 33: 28-41.
- [10] YU P, LEUNG A Y T. The simplest normal form and its application to bifurcation control[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2007, 33: 845-863.
- [11] HUSEYIN K, YU P. On bifurcations into nonresonant quasi-periodic motions[J]. Applied Mathematical Modelling, 1988, 12: 189-201.
- [12] BI Q S. Bifurcations of traveling wave solutions from KdV equation to Camassa-Holm equation[J]. Physics Letters A, 2005, 344: 364-368.
- [13] SCHEIDL R, TROGER H, ZAMAN K. Coupled flutter and divergence bifurcation of a double pendulum[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1984, 19(2): 163-176.
- [14] SAMARANAYAKE S, BAJA J. Bifurcation in the dynamics of an orthogonal double pendulum[J]. Nonlinear Dynamics, 1993, 4: 605-633.