第29卷第3期 河北科技大学学报 Vol.29, No.3
2008年9月 Journal of Hebei University of Science and Technology Sept.2008

文章编号:1008-1542(2008)03-0177-05

基于综合效应的模糊规划方法研究

董 清[1], 李法朝[1,2]

(1. 河北科技大学理学院, 河北石家庄 050018; 2. 河北科技大学经济管理学院, 河北石家庄 050018)

摘 要: 模糊规划是资源分配、优化决策等众多领域广泛存在的问题, 是当今学术界和应用领域的热点研究内容。在分析模糊规划的本质特征以及现有方法的特点和不足基础上, 针对目标和约束的综合处理问题, 提出了综合效应函数的概念, 给出了综合效应函数的公理化体系, 建立基于综合效应的模糊规划问题一般求解模式, 并结合实例进行了分析, 结果表明该方法不仅包容了现有的模糊规划方法, 而且可以有效地将决策意识融入求解的过程中, 在复杂系统优化、人工智能等众多领域具有较强的应用前景。

关键词: 模糊集; 模糊规划; 综合效应函数; 决策

中图分类号: O159 文献标识码: A

Study on fuzzy programming methods based on synthesizing effect function

DONG Qing[1], LI Fa-chao[1,2]

(1. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China; 2. College of Economics and Management, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: Fuzzy optimization is a well-known optimization problem in artificial intelligence, manufacture and management. In this paper, by analyzing the essential characteristic of fuzzy programming and the deficiencies of the existing methods, we propose the concept of synthesizing effect function for processing objective function and constraints, and further we give an axiomatic system for synthesizing effect function. Finally, we establish a general solution mode based on synthesizing effect function for fuzzy programming problem, and analyze the mode by two examples. All the results indicate that our method not only includes the existing methods for fuzzy programming, but also effectively merges the decision preferences into the solution, so it can be widely used in many fields such as complicated system optimization and artificial intelligence.

Key words: fuzzy set; fuzzy programming; synthesizing effect function; decision-making

模糊性是现实世界中广泛存在的现象, 是众多实际领域不可回避的问题。1965年, 美国控制论专家ZADEH提出了模糊集合的概念[1], 创立了模糊集理论, 为不确定信息的描述与处理提供了有效的工具, 并在模糊控制、人工智能等众多领域取得了许多理论和应用成果[2,3]。在模糊集理论的应用研究中, 模糊规划一直是学术界和应用领域广泛关注的研究课题, 但目前较为成熟的理论和应用大都集中在模糊线性规划方面, 而对于一般的模糊规划问题仍没有通用的解决方案。

模糊规划与普通规划的区别是: 普通规划的约束条件和目标函数均是清晰的, 而在模糊规划中它们通常

收稿日期: 2008-01-17; 责任编辑: 张 军
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70671034); 河北省自然科学基金资助项目(F2006000346); 河北省科技攻关项目(05547004D-2)
作者简介: 董 清(1984-), 女, 河北沧州人, 硕士研究生, 主要从事模糊优化、信息处理等方面的研究。

是带有模糊性的。目前解决模糊规划的基本方法大都是通过某种策略将其转化为普通的规划问题。例如:文献[4]通过目标函数的模糊化处理和模糊运算相结合的方法,给出了一种单目标模糊规划问题的求解方法,文献[5]和文献[6]通过最大满意原则,讨论了多目标模糊规划问题的求解方法,文献[7]通过对目标函数和约束条件分别给出伸缩指标将其化为分段函数的方法,讨论了目标函数和约束条件都带有模糊性的模糊规划问题的求解方法。尽管这些方法具有良好的理论基础和较强的执行性,且取得了许多成功的应用,但它们均具有较强的针对性,且不能充分地处理目标函数与约束条件之间的关系,不能很好地处理不同意识下的目标函数与约束条件的制约关系。

基于上面的分析,笔者主要做了以下几方面的工作:1)针对目标和约束的融合问题,提出了综合效应函数的概念,给出了综合效应函数的公理化体系,讨论综合效应函数的构建方法;2)针对模糊规划的求解问题,建立了基于综合效应的模糊规划模型;3)通过具体实例分析了该方法的特征和有效性。

为了叙述上的方便,对论域X上的模糊集合(即X到$[0,1]$的映射)A,本文中用$A(x)$表示A的隶属函数,$A_\lambda=\{x\mid A(x)\geqslant\lambda\}$表示$A$的$\lambda$-截集($\lambda\in[0,1]$),特别是当$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$时,将$A$简记为$A=A(x_1)/x_1+A(x_2)/x_2+\cdots+A(x_n)/x_n$,$A$支集为$\mathrm{supp}A=\{x\mid A(x)>0\}$。

1 模糊规划的本质特征

在一定的条件下,确定最优实施方案是生产管理、资源分配等众多问题的核心内容,其一般形式为

$$\begin{cases}\max \quad f(x),\\ \text{s. t. } x\in A。\end{cases} \tag{1}$$

式中:$f(x)$是论域X上的函数,A为X上的某种集合。当$f(x)$为X上的实值函数,A为X的某清晰集合时,称问题(1)为普通规划问题;当$f(x)$或A具有某种不确定特征时,称问题(1)为不确定性规划问题,特别是若$f(x)$或A具有模糊性时,称问题(1)为模糊规划问题。

对于模糊规划问题,笔者进一步区分为下面2种基本形式:

1)$f(x)$是X上的实值函数,A为X上的模糊集合;2)$f(x)$是X上的模糊值函数,A为X的清晰集合。由于上述2种基本形式在解决方法和策略上有许多共同之处,因而本文中着重考虑1)的求解方法。

对于模糊规划问题(1),其最优的含义与普通规划问题具有相当大的差别,它既要考虑目标函数$f(x)$的取值,又要兼顾x与A的隶属程度。一般而言,既能使目标最优,又能使隶属于A的程度最高的x是不存在的,因而,模糊规划的最优解是一个相对的概念,如何有机处理两者的关系是模糊规划的关键问题。

为了建立具有可操作性的模糊规划求解方法,许多学者进行了有益的探讨,目前较为常用的方法如下。

(Ⅰ)基于水平截集的模糊规划求解方法[8]

$$\begin{cases}\max f(x),\\ \text{s. t. } x\in A_\lambda。\end{cases} \tag{2}$$

其具体步骤如下。

步骤1 确定模糊约束的满足程度认可标准(即相对满足约束的标准)$\lambda\in(0,1]$以及A的λ-截集A_λ;

步骤2 用普通集合A_λ代替模糊集合A,将模糊规划问题(1)转化为普通规划问题(2)。

(Ⅱ)基于模糊化运算的模糊规划求解方法[9]

$$\begin{cases}\max A_f(x)=\min\{M_f(x),A(x)\},\\ \text{s. t. } x\in X。\end{cases} \tag{3}$$

其具体步骤如下:

步骤1 模糊化目标函数:$M_f(x)=(f(x)-\inf f(x))/(\sup f(x)-\inf f(x))$,其中$\sup f(x)$和$\inf f(x)$分别表示当$f(x)$在$X$上的上确界和下确界(显然,$M_f$可以认为是$X$上的模糊集合);

步骤2 清晰化模糊决策:$A_f(x)=\min\{M_f(x),A(x)\}$(即通过$M_f$与$A$的交运算来综合目标函数和模糊约束),将模糊规划问题(1)转化为普通规划问题(3)。

虽然上述方法具有较强的可操作性,但在理论上存在以下2方面的不足:1)缺乏通用性(比如,当$f(x)$在X上的上确界或下确界不存在时,$M_f(x)$无意义);2)不能充分体现不同的决策意识(比如,对目标函数值

与模糊约束的不同重视程度)。请看下面的例子。

例 1　设 $X=(0,5]$, $f(x)=1/x$, A 是 X 上的模糊集合, 其隶属函数为当 $0<x<1$ 时, $A(x)=0$, 当 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时, $A(x)=1$, 试考虑 $f(x)$ 在 A 上的最大值。

由于对任何 $x\in(0,1]$, $A(x)\equiv 0$, 而对于任何 $x\in[1,5]$, $A(x)\equiv 1$, 因而求 $f(x)$ 在 A 上的最大值等价于求 $f(x)$ 在 $[1,5]$ 上的最大值, 由此可知 $f(x)$ 在 A 上的最大值为 1。但由于 $f(x)$ 在 X 上的上确界不存在, 因而按照上述方法便无法确定 $f(x)$ 在集合 A 上的最大值。

例 2　设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 为 5 个人的集合, $f(x)$ 表示 X 上的身高(单位: cm)函数, A 为 X 上的模糊集"年轻人"。已知 $f(x)$ 如表 1 所示, $A=0.4/x_1+0.2/x_2+1/x_3+0.41/x_4+0.9/x_5$, 试在 X 上考虑年轻人中的最高者。

表 1　X 上的身高函数 $f(x)$

Fig. 1　Stature function $f(x)$ on X

cm

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$	178.5	180	165	172.5	168

解　由于"年轻人"是模糊概念, 因而该问题是模糊规划。下面按照上述方法来求解。利用 $\max f(x)=180$, $\min f(x)=165$ 可得:

$$M_f(x)=\frac{f(x)-\min f(x)}{\max f(x)-\min f(x)}=\frac{0.9}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}+\frac{0.2}{x_5},$$

$$A_f(x)=\min\{M_f(x),A(x)\}=\frac{0.4}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0.41}{x_4}+\frac{0.2}{x_5},$$

由此可得 X 上的年轻人中的最高者是 x_4。

模糊决策是融含主观意识的决策, 鉴于 x_1 和 x_4 隶属于 A 的程度 0.4 和 0.41 没有明显的差别, 而 $M_f(x_4)$ 明显小于 $M_f(x_1)$, 因而从综合角度考虑, 选取 x_1 作为 X 上的年轻人中的最高者或许更为合适。

上面的分析表明, 同一模糊规划问题在不同的决策意识下的决策结果可能是不同的, 造成这种不同的根源在于决策过程中对目标和约束的重视程度发生了变化, 为了建立一般的求解模式, 可以通过某种策略将目标函数值与约束的满足程度综合起来(称该综合策略为综合效应函数), 以此综合值作为决策的依据。下面给出综合效应函数的公理化体系。

2　综合效应函数的公理化体系

定义 1　设 Ξ 是某区间, $S(x,y):\Xi\times[0,1]\to(-\infty,+\infty)$ 的连续函数, 若满足: 1) 对任何给定的 $0\leqslant y\leqslant 1$, $S(x,y)$ 关于 x 是单调不减的; 2) 对任何给定的 $x\in\Xi$, $S(x,y)$ 关于 y 是单调不减的; 3) $S(x,1)$ 是严格单调递增的; 4) 对任何给定的 $x_1,x_2\in\Xi$, $S(x_1,0)=S(x_2,0)$, 则称 $S(x,y)$ 为 Ξ 上的最大型综合效应函数。

按照上面的定义, 不难验证:

1) $S(x,y)=(b-a)^{-1}(x-a)y$ 是 $[a,b]$ 上的最大型综合效应函数。

2) 对任何 $k\in(0,+\infty)$, $c\in[0,+\infty)$, $\alpha\in(0,+\infty)$, $S(x,y)=k(x+c)y^{\alpha}$ 是 $[0,+\infty)$ 上的最大型综合效应函数。

3) 对任何 $\alpha\in(0,\infty)$, $\beta\in[1,\infty)$, $S(x,y)=\beta^{x}y^{\alpha}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大型综合效应函数。

4) t-模(即 $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 的函数 $h(x,y)$, 满足 ①对任何 $x,y\in[0,1]$, $h(x,y)=h(y,x)$; ②对任何 $x,y,z\in[0,1]$, $h(h(x,y),z)=h(x,h(y,z))$; ③对任何 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1$, $0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant 1$, $h(x_1,y_1)\leqslant h(x_2,y_2)$; ④对任何 $x\in[0,1]$, $h(x,1)=x$ 是 $[0,1]$ 上的最大型综合效应函数。

定理 1　设 $S(x,y)$ 为 Ξ 上的最大型综合效应函数, 则:

1) 对于任何区间 $\Xi_1\subset\Xi$, $S(x,y)$ 必定为 Ξ_1 上的最大型综合效应函数;

2) 存在 $x_0\in\Xi$, $y_0\in(0,1]$, 使得 $S(x,0)>S(x_0,y_0)$。

证明　1) 可由综合效应函数的定义直接验证。

2) 假若不存在 $x_0\in\Xi$, $y_0\in(0,1]$ 使得 $S(x,0)<S(x_0,y_0)$, 则对任何 $x\in\Xi$, 有 $S(x,0)=S(x,1)$, 由此及定义 1 的 4) 可知 $S(x,1)$ 恒等于一个常数或 $-\infty$, 与 $S(x,y)$ 为 Ξ 上的最大型综合效应函数矛盾。

3 基于综合效应的模糊规划模型

在综合效应函数 $S(x,y)$ 中，若将 x 和 y 分别视为模型(1)中的目标函数 $f(x)$ 和约束的满足程度 $A(x)$，那么 $S(f(x),A(x))$ 即为一种反映模糊决策理念的把 $f(x)$ 和 $A(x)$ 综合起来的方法，因而综合效应函数是建立一般模式模糊规划方法的理论基础，由此即可将模型(1)转化为下面的模型(4)：

$$\begin{cases}\max\ S(f(x),A(x)),\\ \text{s.t.}\ x\in X。\end{cases}\tag{4}$$

其中：$(\inf f(x),\sup f(x))\subset\Xi$；$S(x,y)$ 为 Ξ 上的最大型综合效应函数。

显然，若取 $a=\inf f(x)$，$b=\sup f(x)$，$S(x,y)=(b-a)^{-1}(x-a)\wedge y$，则模型(4)即为基于模糊化运算的模糊规划模型(3)；若取 $S(x,y)=x\delta(y-\lambda)$ 时，则模型(4)即为基于水平截集的模糊规划模型(2)，其中 $\delta(t)$ 满足：当 $t<0$ 时，$\delta(t)=-\infty$；当 $t\geqslant 0$ 时，$\delta(t)=1$。

定理2 设 $(\inf f(x),\sup f(x))\subset\Xi$，$S(x,y)$ 为 Ξ 上的最大型综合效应函数，则当 A 为清晰集合且 $f(x)$ 在 A 上非常函数时，模型(1)与模型(4)具有相同的最优解。

证明　若 x^* 是模型(1)的最优解，则对任何 $x\in A$，$f(x)\leqslant f(x^*)$。利用 $S(x,1)$ 的单调递增性可知，对任何 $x\in A$，$S(f(x),1)\leqslant S(f(x^*),1)$，对任何 $x\in X-A$，利用 $A(x)=0$ 以及 $S(x,y)$ 关于 x 和 y 的单调不减性可知，$S(f(x),0)\leqslant S(f(x^*),0)\leqslant S(f(x^*),1)$，即 x^* 是模型(4)的最优解。

若 x^* 是模型(4)的最优解，则对任何 $x\in X$，$S(f(x),A(x))\leqslant S(f(x^*),A(x^*))$。利用 $S(x,1)$ 的严格单调递增性可知，为证 x^* 是模型(1)的最优解，只需要证 $x^*\in A$ 即可。事实上，若 $x^*\notin A$，则有 $A(x^*)=0$ 可知 $S(f(x^*),A(x^*))\leqslant S(f(x),A(x))$ 对任何 $x\in X$ 恒成立，从而对任何 $x\in X$ 恒成立，即 $S(f(x),A(x))$ 在 X 上为常函数，特别是 $S(f(x),A(x))$ 在 A 上为常函数，即 $S(f(x),1)$ 在 A 上为常函数，由此及 $S(x,1)$ 的严格单调递增性可知 $f(x)$ 在 A 上为常函数，与条件矛盾。

注1 在定理2中，$f(x)$ 在 A 上非常函数是必要的，请看下面的例子。

例3 设 $X=[0,2]$，$A=[1,2]$，$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ $S(x,y)=xy$，则 $\max f(x)$，s.t. $x\in A$ 的最优解集为 $[1,2]$，而按照模型(4)求出的 $\max f(x)$，s.t. $x\in A$ 的最优解集为 $[0,2]$。

由于在实际问题中，目标函数在所讨论的范围内均不为常函数，因而定理2表明模糊规划模型(4)是普通规划的推广，这表明模型(4)具备理论上的系统性。

注2 定理2表明，当 A 为清晰集合且 $f(x)$ 在 A 上非常函数时，无论最大型综合效应函数 $S(x,y)$ 如何选取，模型(4)确定的最优解集是不变的，但当 A 不是清晰集合时，不同的综合效应函数所确定的最优解一般是不同的，甚至会有很大的差别(参见本文第4部分)，这种差别可通俗地解释为不同的决策意识造成的。

综合上面的讨论，可以按照下面的步骤来求解模糊规划问题(1)。

步骤1　确定 $f(x)$ 在 X 上的下界 a 和上界 b；

步骤2　选择 $[a,b]$ 的最大型综合效应函数 $S(x,y)$；

步骤3　利用模型(4)将模糊规划问题(1)转化为普通的规划问题。

4 实例分析

本部分结合具体实例进一步分析模糊规划模型(4)的特点。

例4 继续考虑例2的求解问题。

解　由 $\max f(x)=180$，$\min f(x)=165$，以及第2部分的讨论可知，求解该规划问题的关键是按照决策意识选择 $[165,180]$ 上的最大型综合效应函数 $S(x,y)$，下面分几种情形来讨论。

情形1 如果决策者对“年轻”的符合度有确切的基本要求，且对满足要求的对象不再详加区分，可以选择如下形式的最大型综合效应函数 $S(x,y)=x\delta(y-\lambda)$（其中 $\delta(t)$ 满足：当 $t<0$ 时，$\delta(t)=-\infty$；当 $t\geqslant 0$ 时，$\delta(t)=1$)，针对不同的 λ，相应的最优解 x^* 见表2。

表 2　例 4 的情形 1 的最优解

Tab.2　Optimal solution of case 1 of example 4

λ	$0<\lambda\leqslant 0.2$	$0.2<\lambda\leqslant 0.4$	$0.4<\lambda\leqslant 0.41$	$0.41<\lambda\leqslant 0.9$	$0.9<\lambda\leqslant 1$
x^*	x_2	x_1	x_4	x_5	x_3

情形 2　如果决策者要同时兼顾身高和“年轻”的符合程度, 则选择如下形式的最大型综合效应函数 $S(x,y)=((x-165)/15)^{\alpha}y^{\beta}$, (其中 $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$, 是分别反映对身高和“年轻”的重视程度的参数。例如: 在 α 固定时, β 越小(大)表明“年轻”的重视程度越低(高))。表 3 给出了几种不同 α 和 β 的值对应的最优解 x^*。

表 3　例 4 的情形 2 的最优解

Tab.3　Optimal solution of case 2 of example 4

(α,β)	(1, 0.2)	(1, 0.5)	(1, 1)	(1, 2)	(0.2, 1)	(0.5, 1)	(2, 1)
x^*	x_1	x_1	x_1	x_5	x_5	x_5	x_1

例 5　设论域 $X=[0,1]$, A 为 X 上的模糊集合, 其隶属函数为 $A(x)=x$。求 $f(x)=1-x$ 在 A 上的最大值。

解　由 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 可知, 该规划问题的关键是选择 $[0,1]$ 上的最大型综合效应函数 $S(x,y)$, 下面分几种情形来讨论。

情形 1　若 $S(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$, (其中 $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$), 则由 $S(f(x),A(x))=(1-x)^{\alpha}x^{\beta}$ 可知问题的最优解为 $x^*=\beta(\alpha+\beta)^{-1}$。

情形 2　若 $S(x,y)=\min\{x,y\}$, 则由 $S(f(x),A(x))=\min\{f(x),A(x)\}$ 可知 $S(f(x),A(x))$ 的图形是由 $A(x)$ 在区间 $[0,x^*]$ 上的函数和 $f(x)$ 在区间 $[x^*,1]$ 上的函数组成, 可知问题的最优解为 $x^*=0.5$。

情形 3　若 $S(x,y)=x\delta(y-\lambda)$ (其中 $\delta(t)$ 满足: 当 $t<0$ 时, $\delta(t)=-\infty$; 当 $t\geqslant 0$ 时, $\delta(t)=1$), 则有 $S(f(x),A(x))=\begin{cases}(1-x), & x\geqslant\lambda\\ 0, & x<\lambda\end{cases}$ 可知问题的最优解为 $x^*=1-\lambda$。

上述例子的计算结果表明, 不同的综合效应函数所确定在模糊规划问题的解可能是不同的, 甚至有很大的差别, 这充分说明了综合效应函数是一种将决策意识融入决策过程中的有效工具。

5　结　语

针对模糊规划的求解问题, 在分析现有方法的特点和不足的基础上, 从模糊决策的本质特征出发, 提出了综合效应函数的概念, 给出了综合效应函数的公理化体系, 建立基于综合效应的模糊规划问题一般求解模式, 并结合实例进一步分析了该求解模型的特征。结果表明: 综合效应函数是一种处理决策意识的有效工具, 可以将模糊信息的处理理念纳入数量化的操作过程中; 基于综合效应的模糊规划求解模式具有理论上的系统性和应用上的可操作性。因而, 本文的讨论为进一步建立复杂优化系统、完善不确定信息处理机制奠定了理论基础。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] ZIMMERMANN H J. Fuzzy Set Theory and Its Applications[M]. 2nd ed. London: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[3] DUBOIS D, PRADE H. Fuzzy Sets and Systems——Theory and Applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[4] 李安贵, 张志宏. 模糊数学及其应用[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2006.

[5] 王贤斌, 周宝刚. 采购量决策模糊规划模型[J]. 运筹与管理, 2007, 8(4): 157-159.

[6] ZIMMERMANN H J. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, (1): 45-55.

[7] 李树荣, 孙莉莉. 多目标模糊规划在油品调和中的应用[J]. 控制系统, 2007, (3): 22-25.

[8] HEINRICH R. A general concept for solving linear multicriteria programming problems with crisp, fuzzy or stochastic values[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, (4): 1-13.

[9] 谢季坚, 刘承平. 模糊数学方法及其应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2005.