文章编号: 1008-1542(2008)01-0063-06

变时滞不确定性神经网络的鲁棒稳定性标准

杨丽芸[1], 冯红侠[2], 仇计清[1], 杨洪玖[1]

(1. 河北科技大学 理学院, 河北 石家庄　050018; 2. 秦皇岛市抚宁县第二中学, 河北 秦皇岛　066300)

摘　要: 研究了一类带变时滞和参数不确定的神经网络鲁棒稳定性问题。其中考虑的不确定性为范数有界不确定性, 系统参数具有的这种不确定性是与时间相关的, 但它的参数被限制在一定范围内, 时间滞后函数是随时间变化而改变的, 但它的导数是小于 1 的。并且通过一个线性矩阵不等式的方法得到一个充要条件, 这个充要条件可以使带时滞的神经且有一个平衡点, 并且在这个平衡点上具有鲁棒稳定性。这种基于线性矩阵不等式的充分条件可以通过近年发展的解线性矩阵不等式的算法得到数值结果, 并通过数值例子说明了这个技术的有效性。

关键词: 神经网络; 变时滞; 鲁棒稳定性; 线性矩阵不等式; 范数有界参数不确定

中图分类号: O635　　文献标识码: A

Robust stability criterion for uncertain neural network with time varying delays

YANG Li-yun[1], FENG Hong-xia[2], QIU Ji-qing[1], YANG Hong-jiu[1]

(1. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China; 2. No. 2 Middle School of Funing County in Qinhuangdao, Qinhuangdao Hebei 066300, China)

Abstract: This paper considers the problem of robust stability for uncertain neural networks with time varying delays. The uncertainties considered are norm-bounded uncertainties. These unceitainties of system parameters are associated with time, but the norm is restricted in a certain scope, the time delay function is improved with time, and its derivative is less than one. A linear matrix inequality (LMI) approach is developed to derive sufficient conditions ensuring the delayed neural network to have a equilibrium point, which is robustly stable. The proposed LMI conditions can be checked easily by recently developed algorithms. A numerical example is given to illustrate the effectiveness of the developed techniques.

Key words: neural networks; time varying delay; robust stability; linear matrix inequlity (LMI); norm-bounded uncertainty

人工神经网络被广泛应用于联想记忆、图像处理、二次最优等领域, 但是, 在人工神经网络的应用中时间滞后通常是不可避免的。因此, 带时滞神经网络稳定性的分析得到人们的广泛关注。另一方面, 由于模型误差、测量误差、线性估计等多种原因, 各种神经网络的不确定性也同样不可避免。

很多学者已经研究了带时滞的神经网络鲁棒稳定性问题。文献[1] 中作者考虑的时滞是一个常数, 但在实际情况下, 时间滞后通常是变化的。文献[2] 研究了变时滞的情况, 但在文献[3] 中作者并没有考虑参数的不确定性, 所以所得结果也就不具有鲁棒性。文献[4] 研究了一类普通的带有变时滞神经网络的鲁棒稳定性问题, 可是他仅仅得到了一组时滞不相关的结果, 而时滞相关的结果才具有更好的说服力。

本文研究了一类带变时滞的不确定性神经网络鲁棒稳定性问题。其参数不确定可能是时变的, 但具有范

收稿日期: 2007-04-10; 修回日期: 2007-10-12; 责任编辑: 张　军

作者简介: 杨丽芸(1978-), 女, 河北昌黎人, 主要从事微分方程边值问题方面的研究工作。

数有界性。基于李亚普诺夫函数的方法, 作者提出了一个新的与时滞相关的鲁棒稳定性评判标准, 这种评判标准是根据线性矩阵不等式得到的。

注: 本文采用的符号, 上标“T”表示矩阵的转置, $\mathscr{R}$ 表示 n 维欧式空间, $\mathscr{R}^n$ 表示 $n \times n$ 维的实数矩阵, $\boldsymbol{X} > \boldsymbol{Y}$ ($\boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{Y}$) 表示 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$ 是一个正定矩阵, $\boldsymbol{I}$ 表示具有合适的维数的单位矩阵, $|\cdot|$ 是欧化向量范数, 一个对称矩阵的对数部分用“*”表示。

1 模型的准备工作

笔者用下面的微分方程来描述要考虑的变时滞神经网络:

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = -(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}(t))\boldsymbol{u}(t) + (\boldsymbol{W}_0 + \Delta\boldsymbol{W}_0(t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t)) + (\boldsymbol{W}_1 + \Delta\boldsymbol{W}_1(t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t - \tau(t))) + \boldsymbol{J}, \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathscr{R}$ 是神经元向量; $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$; $\boldsymbol{W}_0 \in \mathscr{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{W}_1 \in \mathscr{R}^{n}$ 是实数矩阵; $\Delta\boldsymbol{A}(t)$, $\Delta\boldsymbol{W}_0(t)$, $\Delta\boldsymbol{W}_1(t)$ 表示参数不确定性; $\tau(t)$ 表示变时滞函数, 且满足 $0 \leqslant \tau(t) \leqslant h$, $\dot{\tau}(t) \leqslant d \leqslant 1$, h 和 d 是常数; $\boldsymbol{J} = [J_1, J_2, \cdots, J_n]^{\mathrm{T}}$ 是常外部输入向量; $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t)) = [g_1(u_1(t)), g_2(u_2(t)), \cdots, g_n(u_n(t))]^{\mathrm{T}}$ 表示神经激活函数。

假设 $g_i(u_i(t))$ 是有界的, 并且满足以下条件:

$$0 \leqslant \frac{g_i(x) - g_i(y)}{x - y} \leqslant k \text{ 和 } g_i(0) = 0, i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2}$$

由 g 函数的有界性, 它服从 Brouwer 的不动点定理: 对于给定的常输入向量 $\boldsymbol{J}$, 系统(1) 至少有 1 个由

$$(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}(t))u^*(t) = (\boldsymbol{W}_0 + \Delta\boldsymbol{W}_0(t) + \boldsymbol{W}_1 + \Delta\boldsymbol{W}_1(t))g^*(u(t)) + \boldsymbol{I} \tag{3}$$

确定的平衡点, $\boldsymbol{u}^* = [u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*]^{\mathrm{T}}$ 为使讨论简便, 通过坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*$ 把 $\boldsymbol{u}^*$ 平移至原点, 系统(1) 改写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}(t))x(t) + (\boldsymbol{W}_0 + \Delta\boldsymbol{W}_0(t))f(x(t)) + (\boldsymbol{W}_1 + \Delta\boldsymbol{W}_1(t))f(x(t - \tau(t))), \tag{4}$$

其中:

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}; f(x(t)) = [f(x_1(t)), f(x_2(t)), \cdots, f(x_n(t))]^{\mathrm{T}}。 \tag{5}$$

$f_j(x_j) = g_j(x_j + u_j^*) - g_j(u_j^*)$ 通过条件(2) 可得 $f_j(x_j)$ 满足 $|f_j(x_j)| \leqslant k|x_j|$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 系统(3) 的 1 组解依赖于初始条件 $x(s)$, $-h \leqslant s \leqslant 0$, 时变不确定性 $\Delta\boldsymbol{A}(t)$, $\Delta\boldsymbol{W}_0(t)$, $\Delta\boldsymbol{W}_1(t)$ 定义为

$$\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}, \Delta\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{H}_0\boldsymbol{F}_0(t)\boldsymbol{E}_0, \Delta\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}_1(t)\boldsymbol{E}_1, \tag{6}$$

其中: $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{E}_1$ 是适当维数的常数矩阵, $\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{F}_0(t), \boldsymbol{F}_1(t)$ 是未知的带 Lebesgue 的可测元素的时变矩阵, 且满足:

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) \leqslant \boldsymbol{I}, \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_1(t) \leqslant \boldsymbol{I}, \boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_0(t) \leqslant \boldsymbol{I}。 \tag{7}$$

因此, 系统(1) 的平衡点 $\boldsymbol{u}^*$ 是渐近稳定的, 当且仅当式(4) 的解是渐近稳定的。

引理 **1**[5] 对于任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{R}$ 和正定矩阵 $\boldsymbol{D} \in \mathscr{R}^n$, 下列不等式成立,

$$2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}。 \tag{8}$$

引理 **2** 若 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 是适当维数的实矩阵, $\boldsymbol{M}$ 满足 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$, 则对所有 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} < \boldsymbol{I}$ 有

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{V}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} < 0, \tag{9}$$

当且仅当存在常数 $e > 0$ 使得

$$\boldsymbol{M} + e^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} + e\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} < 0。 \tag{10}$$

引理 **3** (Schur 补) 对于一个对称矩阵

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{12} \\ \boldsymbol{S}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_{22} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

下列条件是等价的

(i) $\boldsymbol{S} < 0$;

(ii) $\boldsymbol{S}_{11} < 0$ and $\boldsymbol{S}_{22} - \boldsymbol{S}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{12} < 0$; (12)

(iii) $\boldsymbol{S}_{22} < 0$ and $\boldsymbol{S}_{11} - \boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{12}^{\mathrm{T}} < 0$。

其主要结论如下:

定理 **1** 系统(1) 和系统(4) 描述的系统是渐近稳定的, 如果存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P} > 0$, $\boldsymbol{Q} > 0$, $\boldsymbol{R} > 0$, 正

定对角矩阵 $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $e>0$, $e_0>0$, $e_1>0$, 实矩阵 $\boldsymbol{X}_{ij}$, $i, j=1, 2, 3$, 其中$\boldsymbol{X}_{11}$, $\boldsymbol{X}_{22}$, $\boldsymbol{X}_{33}$对称正定矩阵, 使得对称矩阵

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} & \boldsymbol{X}_{13}\\ * & \boldsymbol{X}_{22} & \boldsymbol{X}_{23}\\ * & * & \boldsymbol{X}_{33}\end{bmatrix}>0 \tag{13}$$

和

$$\begin{bmatrix}(1,1) & \boldsymbol{PW}_0+\boldsymbol{K} & \boldsymbol{PW}_1 & h\boldsymbol{X}_{12}-\boldsymbol{X}_{13}+\boldsymbol{X}_{23} & -h\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} & -\boldsymbol{PH} & \boldsymbol{PH}_0 & \boldsymbol{PH}_1\\ * & (2,2) & \boldsymbol{DW}_1 & 0 & h\boldsymbol{W}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} & -\boldsymbol{DH} & \boldsymbol{DH}_0 & \boldsymbol{DH}_1\\ * & * & (3,3) & \boldsymbol{L} & h\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & (4,4) & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{X}_{33} & -h\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{H} & h\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{H}_0 & h\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{H}_1\\ * & * & * & * & * & -e\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -e_0\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -e_1\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

成立, 其中:

$(1,1)=-(\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})+\boldsymbol{R}+h\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{X}_{13}+\boldsymbol{X}_{13}^{\mathrm{T}}+e\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$;

$(2,2)=-2\boldsymbol{DA}-2k^{-1}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{DW}_0+e_0\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_0$;

$(3,3)=-(1-d)\boldsymbol{Q}-2k^{-1}\boldsymbol{L}+e_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1$;

$(4,4)=-(1-d)\boldsymbol{R}+h\boldsymbol{X}_{22}-(\boldsymbol{X}_{23}+\boldsymbol{X}_{23}^{\mathrm{T}})$。

证明　考虑 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4+V_5+V_6, \tag{15}$$

其中:

$$V_1=x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}x(t); \tag{16}$$

$$V_2=2\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(t)}d_i f(s)\,\mathrm{d}s; \tag{17}$$

$$V_3=\int_{t-\tau(t)}^{t}f^{\mathrm{T}}(x(s))\boldsymbol{Q}f(x(s))\,\mathrm{d}s; \tag{18}$$

$$V_4=\int_{t-\tau(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}x(s)\,\mathrm{d}s; \tag{19}$$

$$V_5=\int_{t-h}^{t}\int_{\sigma}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}_{33}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma; \tag{20}$$

$$V_6=\int_0^t\int_{\sigma-\tau(t)}^{t}v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}v\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma, \tag{21}$$

且 $v=[x^{\mathrm{T}}(\sigma), x^{\mathrm{T}}(\sigma-\tau(\sigma)), \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)]$。

对系统(1) 求 V 的导数, 有:

$\dot{V}_1=2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{x}(t)=-2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PA}x(t)+2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PW}_0f(x(t))+2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PW}_1f(x(t-\tau(t)))$;

$\dot{V}_2=2f^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{D}\dot{x}(t)\leqslant$

$-2f^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{DA}x(t)+2f^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{DW}_0f(x(t))+2f^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{DW}_1f(x(t-\tau(t)))$;

$\dot{V}_3\leqslant f^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{Q}f(x(t))-(1-d)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))\boldsymbol{Q}f(x(t-\tau(t)))$;

$\dot{V}_4\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}x(t)-(1-d)x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{R}x(t-\tau(t))$;

$\dot{V}_5=hk\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}_{33}\dot{x}(s)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)X_{33}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s\leqslant$

$h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{A}\dot{x}(t)+hf^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{W}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{W}_0f(x(t))+$

$hf^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{W}_1f(x(t-\tau(t))-2hf^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{W}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{A}\dot{x}(t)-$

$2hf^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{A}\dot{x}(t)+2hf^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{W}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{W}_1f(x(t-\tau(t)))-$

$\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}_{33}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s$;

$$\dot{V}_6 = \tau(t)\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ * & \boldsymbol{X}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{bmatrix} + 2x^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}_{13}x(s) -$$
$$2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}_{13}x(t-\tau(t)) + 2x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{X}_{23}x(t) -$$
$$2x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{X}_{23}x(t-\tau(t)) + \int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}_{33}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant$$
$$h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}_{11}\dot{x}(t) + 2h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}_{12}x(t-\tau(t)) + h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{X}_{22}\dot{x}(t-\tau(t)) +$$
$$2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}_{13}\dot{x}(t) - 2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}_{13}\dot{x}(t-\tau(t)) + 2x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{X}_{23}\dot{x}(t) -$$
$$2x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{X}_{23}\dot{x}(t-\tau(t)) + \int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}_{33}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s。$$

合并以上导数得:

$$\dot{V} \leqslant \eta_1^{\mathrm{T}}\sum_1\eta_1 - 2f^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{K}(\dot{x}(t) - k^{-1}f(x(t))) -$$
$$2f^{\mathrm{T}}(x(t)-\tau(t))\boldsymbol{L}(\dot{x}(t-\tau(t)) - k^{-1}f(x(t)-\tau(t))), \tag{22}$$

其中:

$$\sum_1 = \begin{bmatrix} (1,1) & \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_0 + \boldsymbol{K} - h\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{W}_0 & \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_1 - h\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{W}_1 & \boldsymbol{X}_{12} - \boldsymbol{X}_{13} + \boldsymbol{X}_{23}^{\mathrm{T}} \\ * & (2,2) & \boldsymbol{D}\boldsymbol{W}_1 + h\boldsymbol{W}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{W}_1 & 0 \\ * & * & (3,3) & \boldsymbol{L} \\ * & * & * & (4,4) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$(1,1) = -(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{R} + h\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{A} + h\boldsymbol{X}_{11} + \boldsymbol{X}_{13} + \boldsymbol{X}_{13}^{\mathrm{T}};$$
$$(2,2) = -2\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} - 2k^{-1}\boldsymbol{K} + h\boldsymbol{W}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{W}_0 + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{W}_0;$$
$$(3,3) = -(1-d)\boldsymbol{Q} - 2k^{-1}\boldsymbol{L} + h\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{W}_1;$$
$$(4,4) = -(1-d)\boldsymbol{R} + h\boldsymbol{X}_{22} - (\boldsymbol{X}_{23} + \boldsymbol{X}_{23}^{\mathrm{T}});$$
$$\eta_1 = [x^{\mathrm{T}}(t), f^{\mathrm{T}}(x(t)), f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t))), x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))]^{\mathrm{T}}。$$

利用 Schur 性质, 式(23) 可以写成

$$\sum_2 = \begin{bmatrix} (1,1) & \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_0 + \boldsymbol{K} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_1 & h\boldsymbol{X}_{12} - \boldsymbol{X}_{13} + \boldsymbol{X}_{23}^{\mathrm{T}} & -h\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} \\ * & (2,2) & \boldsymbol{D}\boldsymbol{W}_1 & 0 & h\boldsymbol{W}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} \\ * & * & (3,3) & \boldsymbol{L} & h\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} \\ * & * & * & (4,4) & 0 \\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{X}_{33} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

其中:

$$(1,1) = -(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{R} + h\boldsymbol{X}_{11} + \boldsymbol{X}_{13} + \boldsymbol{X}_{13}^{\mathrm{T}};$$
$$(2,2) = -2\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} - 2k^{-1}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{W}_0;$$
$$(3,3) = -(1-d)\boldsymbol{Q} - 2k^{-1}\boldsymbol{L};$$
$$(4,4) = -(1-d)\boldsymbol{R} + h\boldsymbol{X}_{22} - (\boldsymbol{X}_{23} + \boldsymbol{X}_{23}^{\mathrm{T}})。 \tag{25}$$

由式(6) 有

$$\sum_3 = \begin{bmatrix} (1,1) & \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_0 + \boldsymbol{K} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_1 & h\boldsymbol{X}_{12} - \boldsymbol{X}_{13} + \boldsymbol{X}_{23}^{\mathrm{T}} & -h\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} & -\boldsymbol{P}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}_0 & \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}_1 \\ * & (2,2) & \boldsymbol{D}\boldsymbol{W}_1 & 0 & h\boldsymbol{W}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} & -\boldsymbol{D}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{D}\boldsymbol{H}_0 & \boldsymbol{D}\boldsymbol{H}_1 \\ * & * & (3,3) & \boldsymbol{L} & h\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & (4,4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{X}_{33} & -h\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{H} & h\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{H}_0 & h\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{H}_1 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

其中:

$$(1,1) = -(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{R} + h\boldsymbol{X}_{11} + \boldsymbol{X}_{13} + \boldsymbol{X}_{13}^{\mathrm{T}};$$

$(2,2) = -2\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} - 2k^{-1}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{W}_0$;

$(3,3) = -(1-d)\boldsymbol{Q} - 2k^{-1}\boldsymbol{L}$;

$(4,4) = -(1-d)\boldsymbol{R} + h\boldsymbol{X}_{22} - (\boldsymbol{X}_{23} + \boldsymbol{X}_{23}^{\mathrm{T}})$。

因此有

$$\dot{V} \leqslant \eta^{\mathrm{T}} \sum\nolimits_3 \eta - 2f^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{K}(x(t) - k^{-1}f(x(t))) - 2f^{\mathrm{T}}(x(t) - \tau(t))\boldsymbol{K}(x(t-\tau(t)) - k^{-1}f(x(t) - \tau(t))) < 0, \tag{27}$$

其中:

$$\eta = [x^{\mathrm{T}}(t), f^{\mathrm{T}}(x(t)), f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t))), x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)), y^{\mathrm{T}}(t), (F(t)Ex(t))^{\mathrm{T}}, (F_0(t)E_0f(x(t)))^{\mathrm{T}}, (F_1(t)E_1f(x(t-\tau(t))))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$

$y(t)$ 是适当维数的任意向量。由式(7)和引理 2, 对于 $\varepsilon > 0, \varepsilon_0 > 0, \varepsilon_1 > 0$ 有

$$\begin{aligned} &\varepsilon[F(t)Ex(t)]^{\mathrm{T}}[F(t)Ex(t)] \leqslant \varepsilon x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}Ex(t), \\ &\varepsilon_0[F_0(t)E_0f(x(t))]^{\mathrm{T}}[F_0(t)E_0f(x(t))] \leqslant \varepsilon_0 f^{\mathrm{T}}x((t))E_0^{\mathrm{T}}E_0f(x(t)), \\ &\varepsilon_1[F_1(t)E_1f(x(t-\tau(t)))]^{\mathrm{T}}[F_1(t)E_1f(x(t-\tau(t)))] \leqslant \varepsilon_1 f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))E_1^{\mathrm{T}}E_1f(x(t-\tau(t)))。 \end{aligned} \tag{29}$$

把式(29)代入式(26)得到

$$\sum = \begin{bmatrix} (1,1) & \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_0 + \boldsymbol{K} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_1 & (1,4) & -h\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} & -\boldsymbol{P}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}_0 & \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}_1 \\ * & (2,2) & \boldsymbol{D}\boldsymbol{W}_1 & 0 & h\boldsymbol{W}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} & -\boldsymbol{D}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{D}\boldsymbol{H}_0 & \boldsymbol{D}\boldsymbol{H}_1 \\ * & * & (3,3) & \boldsymbol{L} & h\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & (4,4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{X}_{33} & -h\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{H} & h\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{H}_0 & h\boldsymbol{X}_{33}\boldsymbol{H}_1 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_0\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1\boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \tag{30}$$

其中:

$(1,1) = -(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{R} + h\boldsymbol{X}_{11} + \boldsymbol{X}_{13} + \boldsymbol{X}_{13}^{\mathrm{T}} + \varepsilon\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$;

$(1,4) = h\boldsymbol{X}_{12} - \boldsymbol{X}_{13} + \boldsymbol{X}_{23}^{\mathrm{T}}$;

$(2,2) = -2\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} - 2k^{-1}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{W}_0 + \varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_0$;

$(3,3) = -(1-d)\boldsymbol{Q} - 2k^{-1}\boldsymbol{L} + \varepsilon_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1$;

$(4,4) = -(1-d)\boldsymbol{R} + h\boldsymbol{X}_{22} - (\boldsymbol{X}_{23} + \boldsymbol{X}_{23}^{\mathrm{T}})$。

最后, 可以得到:

$$\dot{V} \leqslant \eta^{\mathrm{T}} \sum \eta - 2f^{\mathrm{T}}(x(t))\boldsymbol{K}(x(t) - k^{-1}f(x(t))) - 2f^{\mathrm{T}}(x(t) - \tau(t))\boldsymbol{K}(x(t-\tau(t)) - k^{-1}f(x(t) - \tau(t))) < 0, \tag{31}$$

由 Lyapunov-Krasovsovskii 定理可知, 不确定滞后神经网络是渐近稳定的。

2　实 例

考虑带有时变滞后性的系统(1)的 $\tau(t) = 0.2\sin^2(t)$ 的

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2.6 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{W}_0 = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{W}_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, k = 12\,345, h = 0.973\,0,$$

利用定理 1, 可以得知系统是渐近稳定的。

应用 Matlab LMI 工具箱, 可以得到在定理 1 中 LMI() 的解如下:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 5.446\,4 & -0.494\,6 \\ -0.494\,6 & 6.442\,0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 9.526\,3 & 0.190\,1 \\ 0.190\,1 & 5.053\,7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 7.210\,3 & -0.507\,7 \\ -0.507\,7 & 4.332\,1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}3.1381 & 0\\ 0 & 3.1381\end{bmatrix},\ e=6.4268,\ e_0=7.0880,\ e_1=10.0026,$$

$$\boldsymbol{X}_{11}=\begin{bmatrix}5.4339 & -0.3170\\ -0.3170 & 4.3846\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_{22}=\begin{bmatrix}5.0355 & -0.2262\\ -0.2262 & 4.6515\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_{33}=\begin{bmatrix}1.5043 & 0.0446\\ 0.0446 & 3.6025\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{12}=\begin{bmatrix}-0.8554 & -0.0809\\ -0.0266 & -2.6359\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_{13}=\begin{bmatrix}-0.5215 & -0.0447\\ -0.1494 & -2.0455\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_{23}=\begin{bmatrix}0.7167 & -0.0391\\ 0.1124 & 1.5985\end{bmatrix},$$

所以本例中的神经网络是鲁棒渐近稳定的。

3 结 论

本文对考虑了一类同时带范数有界参数的参数不确定和时滞神经网络的稳定性问题。考虑的时滞是随时间变化而变化的非线性函数。而参数的不确定性是在一定范围内范数有界的。利用李亚普诺夫稳定性设计相应的 Lyapunov-Krasovskii 函数根据线性矩阵不等式理论得出了时滞相关的鲁棒稳定性的充分条件。最后用一组数值例子说明所得定理结论的的正确性。

参考文献:

[1] HE Yong, WANG Qing-guo, ZHENG Wei-xing. Global robust stability for delayed neural networks with polytopic type uncertainties[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, (26): 1 349-1 354.

[2] ZHANG Hong-bin, LI Chun-guang, LIAO Xiao-feng. A note on the robust stability of neural networks with time delay[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, (25): 357-360.

[3] ZHANG Hong-bin, LIAO Xiao-feng. LMI-based robust stability analysis of neural networks with time-varying delay[J]. Neuro Computing, 2005, (67): 306-312.

[4] ZHANG Hong-bin, LI Chun-guang, LIAO Xiao-feng. A note on the robust stability of neural networks with time delay[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, (25): 357-360.

[5] CHEN Wu-hua, GUAN Zhi-hong, LU Xiao-mei. Delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic systems with multiple deays: an LM2 appronch[J]. Systems and Control Letters, 2005, (54): 547-555.

[6] BARMISH B R. Necessary and suffiaient conolitions for quaolratir stability of an uncertain system[J]. J Oplim Theory Appl, 1985, (46): 399-408.

(上接第 **59** 页)

4 结 语

国内外压力容器的大量断裂失效情况证明, 裂纹隐患的存在、焊接接头韧性降低以及其他缺陷的存在等, 是导致脆断事故的主要原因。这些大多是焊接工艺不妥、设计不当或制作质量低劣而造成成千上万次的灾难性事故。20 世纪 50 至 60 年代出现了大量工业先进国家制造的压力容器爆裂事故, 经过反复分析、研究, 找到了解决的办法并提出相应的对策, 如美国从 1968 年颁布设计、制造许可证以来, 事故急剧下降, 事故率小于 1‰, 接近于零。因此, 对设计、制造压力容器的单位进行严格要求是正确而必要的。而中国 1981 年发放设计、制造压力容器许可证, 并由上级派出驻厂专职监督人员, 但其后灾难性事故依然不断, 这值得人们深思! 失效分析不是追究责任, 而是找到尿塔断裂失效原因, 杜绝类似事故再次发生。

参考文献:

[1] 丁春燕, 杨 杰. 尿塔物理断裂失效分析[J]. 河北工业科技, 2008, 25(1): 21-23.

[2] 王云程, 丁春燕, 杨 杰. 筒体缺陷区的应力分析[J]. 河北科技大学学报, 1999, 20(1): 42-46.

[3] 丁春燕, 王云程, 张一兵, 等. 厚壁筒体环焊缝冷裂纹评定[J]. 河北工业科技, 1998, 15(1): 23-25.

[4] 黄雪琴, 王振辉, 李延杰, 等. 尿塔断裂失效分析[J]. 河北科技大学学报, 2003, 24(1): 80-85.

[5] 黄雪琴, 王振辉, 丁春燕, 等. 尿塔断裂物料能量估算[J]. 河北科技大学学报, 2004, 25(1): 69-72.