文章编号: 1008-1542(2008)01-0060-03

倒向重随机微分方程解的共单调定理

黄晓芹, 李尊凤

(河北科技大学理学院, 河北石家庄　050018)

摘　要: 首先在比倒向随机微分方程更一般的倒向重随机微分方程中获得了一个新的比较定理。然后, 受倒向随机微分方程共单调定律的启发, 并利用获得的新的比较定理, 首次得到了倒向重随机微分方程解 z 的共单调定理; 其结果推广了许多已有的结果。

关键词: 共单调定理; 倒向重随机微分方程; 比较定理

中图分类号: O211.63　　文献标识码: A

Comonotonic theorem for solution of backward doubly stochastic differential equation

HUANG Xiao-qin, LI Zun-feng

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: First, we obtain a new comparison theorem for backward doubly stochastic differential equation which is more popular than backward differential equation. Then inspired by the comonotomic theorem of backward stochastic differential equation, and by using the new comparison theorem, we obtain comonotonic theorem for solwtion z of backward doubly stochastic differential equation. The results can generalize some existing results.

Key words: comonotonic theorem; backward doubly stochastic differential equations; comparison theorem

根据 PARDOUX 和彭实戈(PENG Shi-ge)的理论[1,2], 倒向随机微分方程的解是由一对适应过程(y, z)组成的。对于这对解, 人们主要是对解的第 1 部分 y 的性质进行研究, 比如比较定理和逆比较定理, 但对于解的第 2 部分 z 的性质的研究还很少。近年来, 人们发现许多金融问题的数学模型[3]常常为如下形式:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(r, y_r, z_r)\,\mathrm{d}r - \int_t^T z_r\,\mathrm{d}W_r。$$

其中: y_t 代表投资者 t 时刻的资产; z_t 代表投资者 t 时刻的投资策略。为了使资产在将来某个时刻达到预定目标, 投资者就必须选择最优的投资策略 z_t。为了找到这个最优的投资策略, 就需要对 z_t 进行深入研究。因此, 人们开始关注对于 z_t 性质的研究, 其中一个重要的成果就是 2005 年陈增敬(CHEN Zeng-jing)等提出的共单调定理[4], 其根据下面的方程研究了 z 的共单调性。

$$X_s = x + \int_0^s b(r, X_r)\,\mathrm{d}r + \int_0^s \sigma(r, X_r)\,\mathrm{d}W_r,$$

$$y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, y_r, z_r)\,\mathrm{d}r - \int_s^T z_r\,\mathrm{d}W_r。$$

作为倒向随机微分方程的一个重要的推广形式, 倒向重随机微分方程

收稿日期: 2007-03-27; 修回日期: 2007-10-20; 责任编辑: 张　军

作者简介: 黄晓芹(1977-), 女, 四川渠县人, 讲师, 博士, 主要从事随机控制方面的研究。

$$y_t = \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s)\,ds + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,dB_s - \int_t^T z_s\,dW_s$$

是由 Pardoux 和彭实戈(PENG Shi-ge) 于 1994 年提出来的[5], 这是继倒向随机微分方程之后的又一个开创性的工作(其中: dW_s 是一个标准的前向随机积分; dB_s 是一个标准的倒向随机积分)。在系数 f, g 满足 Lipschitz 条件下, 他们证明了上面的倒向重随机微分方程存在唯一的解。

下面, 笔者来研究耦合的倒向重随机微分方程:

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,dW_r,$$

$$y_s = \Phi(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, y_r^{t,x}, z_r^{t,x})\,dr + \int_s^T g(r, y_r^{t,x}, z_r^{t,x})\,dB_r - \int_s^T z_r^{t,x}\,dW_r$$

中解 z 的共单调性。

设 $T > 0$ 是一个给定的实数。令 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间。$\{W_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 和 $\{B_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上, 分别取值于 R^d 和 R^l 的 2 个相互独立的标准的 Brown 运动。令 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{F}$ 中全部 P- 零集构成的集合。对于任意的 $t \in [0, T]$, 定义 $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$, 对于任意的随机过程 $\{\eta_t\}$, $\mathcal{F}_{s,t}^B = \sigma\{\eta_r - \eta_s;\ s \leqslant r \leqslant t\} \vee \mathcal{N}$, $\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_{0,t}^B$。显然 $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 既不是递增的, 也不是递减的, 因此它不能构成经典的信息流。

定义

$C^k(R^p, R^q) := \{\phi \mid \phi: R^p \to R^q$ 是 k 次连续可微函数$\}$;

$C_{l,b}^k(R^p, R^q) := \{\phi \mid \phi \in C^k(R^p, R^q)$ 且阶数小于或等于 k 的偏导数是有界的$\}$;

$C_p^k(R^p, R^q) := \{\phi \mid \phi \in C^k(R^p, R^q)$ 且函数本身及其阶数小于或等于 k 的偏导数至多像自变量为 x 的多项式函数在 x 趋向无穷时的那样增长$\}$。

$L^2(0, T; R^n) := \{\varphi: [0, T] \times \Omega \to R^n \mid \varphi(\cdot)$ 是 $\{\mathcal{F}\}_{t\geqslant 0}$- 适应的, $E\int_0^T |\varphi(s)|^2 ds < \infty\}$。

假设 **1**　设 $f: [0, T] \times R \times R \times R^d \to R$ 和 $g: [0, T] \times R \times R^d \to R^l$ 是循序可测函数。对于任意的 $(y, z) \in R \times R \times R^d$, 有 $f(\cdot, y, z) \in L^2(0, T; R)$, $g(\cdot, y, z) \in L^2(0, T; R^l)$。存在 2 个常数 $c > 0, 0 < \alpha < 1$, 使得对于任意的 $t \in [0, T]$, $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in R \times R^d$, $x \in R$, 有

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)|^2 \leqslant c(|y_1 - y_2|^2 + |z_1 - z_2|^2),$$

$$|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)|^2 \leqslant c|y_1 - y_2|^2 + \alpha|z_1 - z_2|^2。$$

引理 **1**[5]　设 $\alpha \in s^2(0, T; R^k)$, $\beta \in L^2(0, T; R^k)$, $\gamma \in L^2(0, T; R^{k\times l})$, $\delta \in L^2(0, T; R^{k\times d})$ 使得

$$\alpha_t = \alpha_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \gamma_s dB_s + \int_0^t \delta_s dW_s, 0 \leqslant t \leqslant T,$$

那么

$$|\alpha_t|^2 = |\alpha_0|^2 + 2\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)\,ds + 2\int_0^t (\alpha_s, \gamma_s dB_s) + 2\int_0^t (\alpha_s, \delta_s dW_s) - \int_0^t |\gamma_s|^2 ds + \int_0^t |\delta_s|^2 ds,$$

$$E|\alpha_t|^2 = E|\alpha_0|^2 + 2E\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)\,ds - E\int_0^t |\gamma_s|^2 ds + E\int_0^t |\delta_s|^2 ds。$$

引理 **2**[5]　如果 $b \in C_{l,b}^3(R, R)$, $\sigma \in C_{l,b}^3(R, R^d)$, 那么随机微分方程

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,dW_r \tag{1}$$

存在唯一的强解 $\{X_s^{t,x}\}$。

如果 f, g 满足假设 1 中的条件, $\Phi(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, 那么倒向重随机微分方程

$$y_s = \Phi(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, y_r, z_r)\,dr + \int_s^T g(r, y_r, z_r)\,dB_r - \int_s^T z_r\,dW_r \tag{2}$$

存在唯一的解 (y, z)。

假设 **2**　对于任意的 $s \in [0, T]$, $(x, y, z) \to (f(s, x, y, z), g(s, y, z))$ 是 3 次连续可微函数且所有的导数是有界的, $\Phi \in C_p^3(R, R)$, $b \in C_{l,b}^3(R, R)$, $\sigma \in C_{l,b}^3(R, R^d)$。

$$gg^*(t, y, z) \leqslant zz^* + c(|g(t, 0, 0)|^2 + |y|^2)I,$$

$$g_z'(t, y, z)\theta\theta^* g_z'(t, y, z)^* \leqslant \theta\theta^*, \quad \forall y \in R; z, \theta \in R^d。$$

引理 **3**[5]　假设 b, σ, f, g, Φ 满足假设 1 和假设 2 的条件, 那么倒向重随机微分方程的解 (y, z) 满足:

(i)　$u(t, x) := y_t^{t,x}$ 是下面的倒向随机偏微分方程的唯一解。

$$u(t,x) = \Phi(x) + \int_t^T [\mathscr{A}u(s,x) + f(s,x,u(s,x),\sigma^*(x)\partial_x u(s,x))]\,ds + \int_t^T g(s,u(s,x),\sigma^*(x)\partial_x u(s,x))\,dB_s,$$

其中: $\mathscr{A}u(t,x) := \frac{1}{2}\sigma(x)\sigma^*(x)\partial^2_{xx}u(t,x) + b(x)\partial_x u(t,x)$, $\partial_x u, \partial^2_{xx}u$ 分别是 u 关于 x 的一阶偏导数和二阶偏导数, σ^* 是向量 σ 的转置。

(ii) $z_s^{t,x} = \sigma^*(x)\partial_x u(s,x)$, a. e. 。

主要结果如下。

定理 1 *[比较定理]* 设 f, g 满足假设 1, $\xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, P)$。令 (y^1, z^1) 和 (y^2, z^2) 分别是下面倒向重随机微分方程的解:

$$y_t^1 = \xi^1 + \int_t^T f(s, X_s^1, y_s^1, z_s^1)\,ds + \int_t^T g(s, y_s^1, z_s^1)\,dB_s - \int_t^T z_s^1\,dW_s, \tag{3}$$

$$y_t^2 = \xi^2 + \int_t^T f(s, X_s^2, y_s^2, z_s^2)\,ds + \int_t^T g(s, y_s^2, z_s^2)\,dB_s - \int_t^T z_s^2\,dW_s。 \tag{4}$$

1) 如果 $\xi^1 \leqslant \xi^2, f(s, X^1, y^1, z^1) \leqslant f(s, X^2, y^1, z^1)$, 那么有 $y_t^1 \leqslant y_t^2$, $\forall 0 \leqslant t \leqslant T$;

2) 如果 $\xi^1 \geqslant \xi^2, f(s, X^1, y^1, z^1) \geqslant f(s, X^2, y^1, z^1)$, 那么有 $y_t^1 \geqslant y_t^2$, $\forall 0 \leqslant t \leqslant T$。

证明 仅仅证明 1)。

令 $\xi = \xi^1 - \xi^2, \hat{y} = y^1 - y^2, \hat{z} = z^1 - z^2$。那么由方程(3) 和方程(4) 可得

$$\hat{y}_t = \xi + \int_t^T (f(s, X_s^1, y_s^1, z_s^1) - f(s, X_s^2, y_s^2, z_s^2))\,ds + \int_t^T (g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2))\,dB_s - \int_t^T \hat{z}_s\,dW_s,$$

对 $\hat{y}_t^{+2}$ 应用 Itô 公式, 可得

$$\hat{y}_t^{+2} = \xi^{+2} + 2\int_t^T \hat{y}_s^+ [f(s, X_s^1, y_s^1, z_s^1) - f(s, X_s^2, y_s^2, z_s^2)]\,ds +$$
$$2\int_t^T (\hat{y}_s^+, (g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2))\,dB_s) - 2\int_s^T (\hat{y}_s^+, \hat{z}_s\,dW_s) -$$
$$\int_t^T I_{[\hat{y}_s > 0]} |\hat{z}_s|^2\,ds + \int_t^T I_{[\hat{y}_s > 0]} |g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2)|^2\,ds =$$
$$2\int_t^T \hat{y}_s^+ [f(s, X_s^1, y_s^1, z_s^1) - f(s, X_s^2, y_s^1, z_s^1) + f(s, X_s^2, y_s^1, z_s^1) - f(s, X_s^2, y_s^2, z_s^2)]\,ds +$$
$$\xi^{+2} + 2\int_t^T (\hat{y}_s^+, (g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2))\,dB_s) - 2\int_t^T (\hat{y}_s^+, \hat{z}_s\,dW_s) -$$
$$\int_t^T I_{[\hat{y}_s > 0]} |\hat{z}_s|^2\,ds + \int_t^T I_{[\hat{y}_s > 0]} |g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2)|^2\,ds。$$

根据 f, g 满足的假设条件

$$|f(t, X, y^1, z^1) - f(t, X, y^2, z^2)|^2 \leqslant c(|y^1 - y^2|^2 + |z^1 - z^2|^2),$$
$$|g(t, y^1, z^1) - g(t, y^2, z^2)|^2 \leqslant c|y^1 - y^2|^2 + \alpha|z^1 - z^2|^2,$$
$$f(s, X^1, y^1, z^1) \leqslant f(s, X^2, y^1, z^1),$$

有 $\hat{y}_t^{+2} \leqslant 2\int_t^T \hat{y}_s^+ [f(s, X_s^2, y_s^1, z_s^1) - f(s, X_s^2, y_s^2, z_s^2)]\,ds +$

$$\xi^{+2} + 2\int_t^T (\hat{y}_s^+, (g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2))\,dB_s) -$$
$$2\int_t^T (\hat{y}_s^+, \hat{z}_s\,dW_s) - \int_t^T I_{[\hat{y}_s > 0]} |\hat{z}_s|^2\,ds + \int_t^T (c\hat{y}_s^{+2} + I_{[\hat{y}_s > 0]}\alpha|\hat{z}_s|^2)\,ds \leqslant$$
$$\int_t^T \frac{2c}{1-\alpha}\hat{y}_s^{+2}\,ds + \frac{1-\alpha}{2c}\int_t^T (c\hat{y}_s^{+2} + cI_{[\hat{y}_s > 0]}|\hat{z}_s|^2)\,ds +$$
$$\xi^{+2} + 2\int_t^T (\hat{y}_s^+, (g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2))\,dB_s) -$$
$$2\int_t^T (\hat{y}_s^+, \hat{z}_s\,dW_s) - \int_t^T I_{[\hat{y}_s > 0]} |\hat{z}_s|^2\,ds + \int_t^T (c\hat{y}_s^{+2} + I_{[\hat{y}_s > 0]}\alpha|\hat{z}_s|^2)\,ds \leqslant$$
$$\int_t^T \left(\frac{2c}{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{2} + c\right)\hat{y}_s^{+2}\,ds + \int_t^T \frac{\alpha - 1}{2} I_{[\hat{y}_s > 0]} |\hat{z}_s|^2\,ds +$$

(下转第 86 页)

场监管的职责由交易所来履行, 交易所激励不足的领域, 通过监管权的分配以强化交易所的监管激励, 并遵循自律监管第一、政府监管监督性与补充性为辅的原则。

参考文献:

[1] STIGLIT Z, JOSEPH E. The inefficiency of the stock market equilibrium[J]. Review of Economic Studies, 1982, 49(2): 32-35.
[2] STIGLIT Z, JOSEPH E. Market failure, and development[J]. American Economic Review, 1989, 19(2): 18-23.
[3] 鲁 篱. 证券交易所自治地位的比较研究[J]. 社会科学研究, 2004, (5): 86-88.
[4] 郭 晔. "有限理性" 框架下证券交易监管研究[D]. 厦门: 厦门大学, 2002.
[5] 龙 超. 证券监管的原因与结构分析[D]. 上海: 复旦大学, 2003.
[6] 杨再斌, 匡 霞. 全球交易所公司化改革趋势及对我国的启示[J]. 经济经纬, 2005, (6): 47-49.
[7] 徐 明, 卢文道. 从市场竞争到法制基础: 证券交易所自律监管研究[J]. 华东政法学院学报, 2005, (5): 25-27.

(上接第 **62** 页)

$$\xi^{+2} + 2\int_t^T (\hat{y}_s^+, (g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2))\,\mathrm{d}B_s) - 2\int_t^T (\hat{y}_s^+, \hat{z}_s\,\mathrm{d}W_s)。$$

因此 $\hat{y}_t^{+2} + \int_t^T I_{[\hat{y}_s>0]} \frac{1-\alpha}{2} |\hat{z}_s|^2 \mathrm{d}s \leqslant$

$$2\int_t^T (\hat{y}_s^+, (g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2))\,\mathrm{d}B_s) - 2\int_t^T (\hat{y}_s^+, \hat{z}_s\,\mathrm{d}W_s) + \int_t^T (\frac{2c}{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{2} + c)\hat{y}_t^{+2}\mathrm{d}s + \xi^{+2}。$$

因为 $\xi^1 \leqslant \xi^2$, 所以 $\xi^{+2} = 0$。

对上面的不等式两边取数学期望, 可得

$$E\hat{y}_t^{+2} + E\int_t^T I_{[\hat{y}_s>0]} \frac{1-\alpha}{2} |\hat{z}_s|^2 \mathrm{d}s \leqslant E\int_t^T (\frac{2c}{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{2} + c)\hat{y}_s^{+2}\mathrm{d}s。$$

因为 $0 < \alpha < 1$, 所以 $E\hat{y}_t^{+2} \leqslant E\int_t^T (\frac{2c}{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{2} + c)\hat{y}_s^{+2}\mathrm{d}s$。根据 Gronwall 不等式, 可得 $E\hat{y}_t^{+2} = 0$。因此 $y_t^1 \leqslant y_t^2$, $\forall 0 \leqslant t \leqslant T$。

证毕。

定理 **2** *[共单调定理]* 对于 $i = 1, 2$, 假设 f_i, g_i, b_i, σ_i 和 Φ_i 满足假设 1 和假设 2 的条件。$\{X_t^i\}_{i=1,2}$ 和 $(y^i, z^i)_{i=1,2}$ 分别是下面的随机微分方程的解,

$$X_t^i = x^i + \int_0^t b_i(s, X_s^i)\,\mathrm{d}s + \int_o^t \sigma_i(s, X_s^i)\,\mathrm{d}W_s,$$

$$y_s^i = \Phi(X_T^i) + \int_s^T f_i(r, X_r^i, y_r^i, z_r^i)\,\mathrm{d}r + \int_s^T g_i(r, y_r^i, z_r^i)\,\mathrm{d}B_r - \int_s^T z_r^i\,\mathrm{d}W_r。$$

如果 $\Phi_1(\cdot)$, $\Phi_2(\cdot)$, $f_1(t, \cdot, y, z)$ 和 $f_2(t, \cdot, y, z)$ 是共单调的, 且 $\sigma_1 \odot \sigma_2 \geqslant 0$, 那么 $z_t^1 \odot z_t^2 \geqslant 0$。

证明 根据引理 3, 有

$$z_t^1 \odot z_t^2 = \sigma_1^*(t, X_t^1)\partial_x u_1(t, X_t^1) \odot \sigma_2^*(t, X_t^2)\partial_x u_2(t, X_t^2) =$$
$$\sigma_1(t, X_t^1) \odot \sigma_2(t, X_t^2)\partial_x u_1(t, X_t^1)\partial_x u_2(t, X_t^2),$$

根据随机微分方程的比较定理, 知 X_T^i 关于初值 x^i 是递增的; 根据定理 1, 如果 $\Phi_i(\cdot)$ 和 $f_i(t, \cdot, y_t, z_t)$ 关于 X^i 是递增(递减)的, 那么 y_t^i 关于 X^i 也是递增(递减)的。因为 $\Phi_1(\cdot)$, $\Phi_2(\cdot)$, $f_1(t, \cdot, y, z)$ 和 $f_2(t, \cdot, y, z)$ 是共单调的, 因此有 $\partial_x u_1(t, X_t^1)\partial_x u_2(t, X_t^2) \geqslant 0$。因为假设 $\sigma_1(t, X_t^1) \odot \sigma_2(t, X_t^2) \geqslant 0$, 因此有 $z_t^1 \odot z_t^2 \geqslant 0$。

证毕。

参考文献:

[1] PARDOUX E, PENG Shi-ge. Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J]. Systems Control Lett, 1990, 14: 51-61.
[2] PENG Shi-ge. The backward stochastic differential equations and its application[J]. Adv Math, 1997, 26: 97-112.
[3] KAROUI N E, PENG Shi-ge, QUENEZ M C. Backward stochastic differential equations in finance[J]. Mathematical Finance, 1997, 7: 1-71.
[4] CHEN Zeng-jing, KULPERGER R, WEI Gang. A comonotonic theorem for BSDEs[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2005, 115: 41-54.
[5] PARDOUX E, PENG Shi-ge. Backward doubly SDEs and systems of quasilinear SPDEs[J]. Probab Theory Related Fields, 1994, 98: 209-227.