第 28 卷第 3 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 28, No. 3
2007 年 9 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Sept. 2007

文章编号: 1008-1542(2007)03-0190-04

弦振泛频分析及演奏中的泛音

韩佩琦[1], 王文武[2], 刘天山[1], 高新存[1]

(1. 河北科技大学理学院, 河北石家庄　050018; 2. 河北地质职工大学教务处, 河北石家庄　050081)

摘　要: 根据弦振驻波的规律, 证明了弦乐器振动中各次振动的振幅递减之规律, 给出了演奏中准确的泛音触弦位置, 揭示了拉弦类乐器泛音的物理本质, 是设计扩展音域、增加自然泛音的理论根据。

关键词: 驻波; 基频; 泛频; 音域; 简谐函数

中图分类号: O423　　　文献标识码: A

Analysis of the string vibration frequency and the overtone during playing the musical instruments

HAN Pei-qi[1], WANG Wen-wu[2], LIU Tian-shan[1], GAO Xin-cun[1]

(1. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China; 2. Academic Affairs Office, Hebei University of Geology Staff, Shijiazhuang Hebei 050081, China)

Abstract: According to the law of the string vibration standing wave, we have proven the rule that each vibration oscillation amplitude of the stringed musical instrument decreases progressively. The accurate overtone string position during the performance was also given. The overtone physical essence of bowed instrument was revealed. It's the theoretic basis for designing the sound territory and strengthening the natural overtone.

Key words: standing wave; pitch; overtone; sound territory; harmonic function

研究振动的简正方式在一些实际问题中有着重要的应用价值, 特别是将其规律应用于民族乐器中。

根据弦振驻波的规律, 以二胡为例, 通过具体计算揭示弦乐器"泛音"的物理本质(见图 1)。

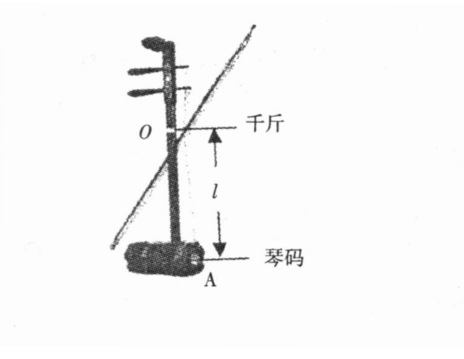

图 1　二胡结构图

Fig. 1　Structure of ErHu

1　弦振动的驻波解

略去次要矛盾, 弦乐器的有效振动的弦均可视为两端固定的弦(如二胡千斤至码子间的长度)。若弦长为 l(有效长度), 根据其自由振动的泛定方程及有关条件, 可得到两端固定的弦存在的驻波解为[1]

收稿日期: 2006-11-21; 修回日期: 2007-04-23; 责任编辑: 王士忠

基金项目: 河北科技大学校立基金资助项目(XL2006042)

作者简介: 韩佩琦(1955-), 男, 河北保定人, 副教授, 主要从事振动理论在民族乐器中的应用研究。

$$y_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi}{l}at+B_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x。\tag{1}$$

式中：y 是弦的横向位移；x 是弦上质点坐标；n 表示谐频次数，$n=1,2,\cdots$；t 是时间；A_n，B_n 是第 n 次振动的待定常数；$\frac{n\pi}{l}a$ 是圆频率 ω_n，其中 $a=\sqrt{\frac{T}{\delta}}$ 表示波速；T，δ 分别为弦上的张力及弦的线密度。

由 $\omega_n=2\pi f_n$ 有

$$f_n=\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\delta}}\tag{2}$$

可知

1) 弦振固有频率具有一系列(无限多个)特定不连续的数值。$n=1$，$f_1=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\delta}}$，称为弦的基频，其波包对应全部有效弦长 l；$n>1$ 的各次振动频率称为泛频，例如 $n=2$ 时，f_2 称弦的第一泛频，其波包对应 $\frac{l}{2}$，依次类推。

2) 演奏二胡时，手指实按弦的某处，即改变了有效弦长 l(见图 1)，亦就改变了弦的基频与泛频。

3) 因弦振总效果是各种振动方式的叠加，所以其一般解应是所有振动方式的线性叠加，即弦的总位移应是

$$y(x,t)=\sum_{1}^{\infty}(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)\sin k_n x,\tag{3}$$

其中：$k_n=\frac{2\pi}{\lambda_n}=\frac{\omega_n}{a}=\frac{n\pi}{l}$，$\lambda_n$ 代表波长，

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\frac{2}{l}\int_0^l y_0(x)\sin k_n x\,\mathrm{d}x\\B_n&=\frac{2}{l\omega_n}\int_0^l v_0(x)\sin k_n x\,\mathrm{d}x\end{aligned}\right\}。\tag{4}$$

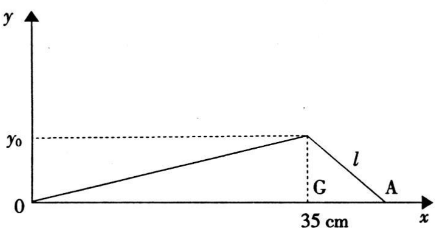

图 2　琴弦的初始状态

Fig. 2　Original state of string

4) 因弦振动时，激发的固有频率都是谐频，所以弦乐器发出的音乐其音色听起来一般都是感到和谐的。

2　各次振动的振幅递减规律的证明

只要 $y_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 具体函数已知即可定出 A_n，B_n，于是弦的各次振动的位移就可完全确定。

在二胡演奏中，l 的长度因人(据手的大小调节千斤 O 的位置)而异，一般成人可在 35～45 cm 范围内。为有代表性，取 $l=40$ cm，琴码 A 至弓毛摩擦处 G 的距离一般为 5 cm 左右。以千斤处 O 为坐标原点，弓毛摩擦位置 G 距 O 为 35 cm，设开始时(即初始拉弓或推弓) G 点被拉开位移为 y_0 之后才开始振动(各种弦乐器的弦受激振动基本相同)，如图 2 所示。具体的初始条件为

$$y_0(x)=\begin{cases}\frac{8y_0}{7l}x,\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{7}{8}l\right),\\8y_0\left(1-\frac{x}{l}\right),\ \left(\frac{7}{8}l\leqslant x\leqslant l\right),\end{cases}\tag{5}$$

$$v_0(x)=\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0,(0\leqslant x\leqslant l)。\tag{6}$$

将式(5)、式(6)代入式(4)计算可得:

$$A_n=\left|\frac{2}{l}\int_0^l y_0(x)\sin k_n x\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{2}{l}\left[\frac{8}{7}\frac{y_0}{l}\int_0^{\frac{7l}{8}}x\sin k_n x\,\mathrm{d}x+8y_0\int_{\frac{7l}{8}}^{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin k_n x\,\mathrm{d}x\right]\right|=\left|\frac{128y_0}{7n^2\pi^2}\sin\frac{7}{8}n\pi\right|,\tag{7}$$

$$B_n=\frac{2}{l\omega_n}\int_0^l v_0(x)\sin k_n x\,\mathrm{d}x=0。$$

因 $B_n=0$, 式(3)可写为

$$y(x,t)=\sum_1^{\infty}A_n\sin k_n x\cos\omega_n t,\tag{8}$$

可知各次振动的振幅为 A_n。

由式(7)算得 A_n 值见表1。由表中数据可看出, 各次振动的振幅依次递减, 且衰减的较快, 其中 $n=4$ 的整数倍时, $A_n=0$(这将在后面予以解释)。

令 $\cos\omega_n t=1$, 由式(8)可知, 各 x 点的位移应是 $A_n\sin k_n x$, 且各点位移均处于绝对值最大的状态, 对于不同次的振动, 有

$$y_n(x)=A_n\sin k_n x,$$

$$y_1(x)=A_1\sin\frac{\pi}{l}x=\frac{7}{\pi^2}y_0\sin\frac{\pi}{l}x\begin{cases}x=0,l, & y_1=0(\text{节点}),\\ x=\frac{l}{2}, & y_1=\frac{7y_0}{\pi^2}(\text{波腹});\end{cases}$$

$$y_2(x)=A_2\sin\frac{2\pi}{l}x=-\frac{3.2}{\pi^2}y_0\sin\frac{2\pi}{l}x,$$

$$\begin{cases}x=0,\frac{l}{2},l, & y_2=0(\text{节点}),\\ x=\frac{l}{4},\frac{3l}{4}, & y_{21}=-\frac{3.2}{\pi^2}y_0,\ y_{22}=\frac{3.2}{\pi^2}y_0(\text{波腹});\end{cases}$$

$$y_3(x)=A_3\sin\frac{3\pi}{l}x=\frac{1.88}{\pi^2}y_0\sin\frac{3\pi}{l}x,$$

$$\begin{cases}x=0,\frac{l}{3},\frac{2l}{3},l, & y_3=0(\text{节点}),\\ x=\frac{l}{6},\frac{l}{2},\frac{5l}{6}, & y_{31}=y_{33}=\frac{1.88}{\pi^2}y_0,\ y_{32}=-\frac{1.88}{\pi^2}y_0(\text{波腹});\end{cases}$$

$$\vdots$$

表1 各次振动振幅及其与基频振幅之比

Tab.1 Ratio of each vibration oscillation amplitude and the pitch oscillation amplitude

A_n	振幅值(y_0 是初始时刻弦被拉开的位移)	各次泛频与基频振幅之比(A_n/A_1)
A_1	$6.998y_0/\pi^2$	1
A_2	$3.232y_0/\pi^2$	0.462
A_3	$1.877y_0/\pi^2$	0.268
A_4	0	0
A_5	$0.676y_0/\pi^2$	0.097
A_6	$0.359y_0/\pi^2$	0.051
A_7	$0.143y_0/\pi^2$	0.020
A_8	0	0

依上面的计算可画出各次振动最大位移的图线见图3。

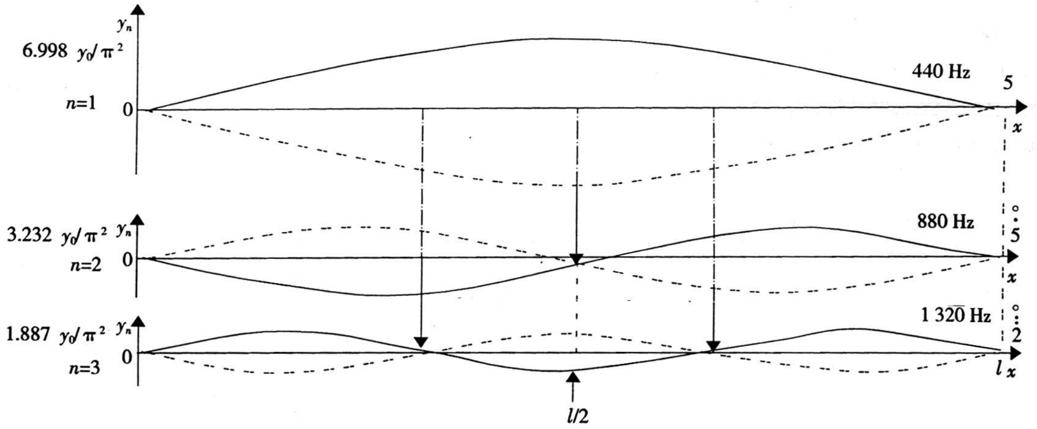

图 3　各次振动最大位移示意图(向下箭头表示泛音触弦位,
其基频是以外弦为 A 时 $f_1=440$ Hz 标出)

Fig. 3　Maximum of oscillational displacement every time

3　弦乐器泛音的演奏规律

由图 3 可看出: 若用一定的方法抑制掉大振幅的振动, 保留高次的泛频振动, 由于在琴弦上最低次振动($n=2$)同时存在 2 个波包, 势必出现新的听觉效果。如演奏时以手指肚轻按弦长的 1/2 处(演奏中称为虚按), 则 $n=1$ 的基频受到抑制, 而代之的最低频率是 $n=2$ 的振动, 听觉上必然是高八度的音调, 由于 $n=3$, 5, …等奇次振动也是叠加在弦上的, 它们的振幅也在$\frac{l}{2}$处出现, $\frac{l}{2}$处的抑制, 同时会抑制掉这些振动, 即剩下的只有偶次项振动。虽然振幅降低了, 但却具有高频合响的效果, 其音色应更深遂, 明彻。这正是二胡演艺界定义的泛音[2] 的物理本质。

以 D 调演奏为例, 二胡外弦为 A, 简谱唱名为 5(sol), 基频为 440 Hz, 当以手指轻按(虚按) $\frac{l}{2}$处时(图上以箭头表示), 抑制了 $n=1$ 的振动, 得到的最低频率是 $n=2$ 的振动, 其频率是 880 Hz, 发音为 $\dot{5}$; 当轻按$\frac{l}{3}$, $\frac{2l}{3}$处时, 又抑制了 $n=1$, $n=2$ 的振动, 得到的是 $n=3$ 的振动, 其最低频率为 1 320 Hz, 发音为 $\ddot{2}$。

由以上还可以看出, 泛音位置都是对应本次振动的节点位置, 级次越高, 节点越多, 因而会在同一弦线上出现几个音高相同的泛音位置, 这也是演艺界所说的镜像现象。同时由式(7)及表 1 中数据知, $n=4$ 的整数倍时, $A_n=0$, 因为对应于 $n=4j$ (j 为 1, 2, …)的奇数项的振动中, $x=\frac{7}{8}l$ 处是波节, 但这点恰好是被弓毛摩擦的部位, 波节条件被破坏, 在数学上必然导致与其对应的常数 $A_n=0$。如果摩擦点位置变化, 必然会有另外抑制的情况, 导致出现有区别的“音色”。演奏时弓毛触弦点越靠上, 被抑制掉的泛频级次越低, 被抑制的振幅越大, 音量损失严重。触弦点越往下, 被抑制掉的振幅越小, 有利泛音的出现。演奏家在实践中已体会到“在演奏高把位的泛音时, 右手可将弓子压低些, 使弓毛的触弦点尽可能的靠近琴码, 这样也有利于泛音的发音”[2] 正是这个道理。

4　结　语

二胡音域偏窄, 一直是演艺界关注的难题。本文根据弦振的规律, 具体证明了二胡弦振中各次振动波幅的递减; 将物理知识与演奏艺术相结合, 揭示了弦乐器“泛音”的物理本质, 从理论上给出了演奏泛音的准确位置, 是拓展音域、增加泛音的理论根据。

参考文献:

[1]　[美]P M 莫尔斯. 振动与声[M]. 南京大学《振动与声》翻译组译. 北京: 科学出版社, 1981.
[2]　赵寒阳. 二胡中级教程[M]. 北京: 同心出版社, 2001.