第 28 卷第 3 期 河北科技大学学报 Vol.28, No.3
2007 年 9 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Sept. 2007

文章编号: 1008-1542(2007)03-0186-04

用双参数法构造十二参梯形板元

任大卫[1], 刘 伟[2], 李志勇[3], 王冀超[2]

(1.西安理工大学理学院,陕西西安 710048;2.河北科技大学信息科学与工程学院,河北石家庄 050018;3.河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

摘 要: 利用双参数有限元方法的基本理论,考虑特殊的四边形单元——梯形单元,构造出一类 12 个自由度的梯形板元,并对其收敛性进行了分析,这放松了对剖分的要求,拓宽了应用范围。

关键词: 梯形板元;双参数法;收敛性

中图分类号: O242.21 文献标识码: A

Construction of a kind of 12-parameter trapezoid plat elements by using double set parameter method

REN Da-wei[1], LIU Wei[2], LI Zhi-yong[3], WANG Ji-chao[2]

(1. College of Sciences, Xián University of Technology, Xián Shaanxi 710048, China; 2. College of Information Science and Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China; 3. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: By using double set parameter method of finite element theory, and by taking into consideration quadrilateral elements and trapezoidal element, we constructed a kind of 12-Parameter trapezoid plat elements and proved their convergence. These trapezoid plat elements can be used for any polygon, so it is useful in practice.

Key words: trapezoid plat elements; double set parameter method; convergence

利用双参数法[1],石钟慈等分析了九参数拟协调元[2]和九参数广义协调元[3],陈绍春分析了十二参矩形协调元[4];对于梯形板元,孙会霞等进行了通过构造十三参梯形板元,然后再离散成一个具有对称形式的十二参梯形板元的研究[5]。笔者利用双参数法直接构造了十二参梯形板元,其收敛效果同传统的矩形板元一样,这样就放松了对剖分的要求,更具有实用价值。

1 十二参梯形板元的构造

考虑板弯曲问题,求 $u\in H_0^2(\Omega)$,满足 $a(u,v)=f(v),\ \forall v\in H_0^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} a(u,v)=\int_\Omega [\Delta u\Delta v+(1-\sigma)(2u_{xy}v_{xy}-u_{xx}v_{yy}-u_{yy}v_{xx})]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\ f(v)=\int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \end{cases}$$

其中 $0<\sigma<\frac{1}{2}$ 是 Poisson 比。

收稿日期: 2007-03-16; 修回日期: 2007-04-27; 责任编辑: 张 军

作者简介: 任大卫(1980-), 男, 河北定州人, 硕士, 主要从事有限元方面的研究。

其对应的方程是
$$\begin{cases}\Delta^2 u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{on } \Omega,\end{cases} \qquad \Omega \subset \mathbf{R}^2,$$

假定 Ω 是多边形区域，对 Ω 进行剖分。构造出有限元空间 V_h，对应的离散问题是求 $u_h \in V_h$，满足
$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \ \forall v_h \in V_h,$$
其中 $a_h(u_h, v_h) = \sum_K \int_\Omega [\Delta u_h \Delta v_h + (1-\sigma)(2u_{h_{xy}} v_{h_{xy}} - u_{h_{xx}} v_{h_{yy}} - u_{h_{yy}} v_{h_{xx}})] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

设 T 为 $X-Y$ 平面内的单元，其中 $a_1(0, 0), a_2(a, 0), a_3(a-\varepsilon_2, b), a_4(\varepsilon_1, b)$ 为梯形的顶点，$a_5 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2), a_6 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3), a_7 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4), a_8 = \frac{1}{2}(a_4 + a_1)$ 为 T 边上的中点，$l_1 = |F_{41}|, l_2 = |F_{23}|$ 为梯形腰长。作变换
$$\begin{cases} x = a\xi + \varepsilon_1 \eta - \xi\eta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \\ y = b\eta, \end{cases} \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqslant 0, \ 0 < (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) < a, \tag{1}$$
将 T 变换到 $\xi-\eta$ 平面内的正方形参考单元 T。

取形函数空间
$$P(T) = \mathrm{span}\{p_1, p_2, \cdots, p_{12}\}, \tag{2}$$

$p_1 = (1-\xi)(1-2\xi)(1-\eta)(1-2\eta)$，　　$p_2 = -\xi(1-2\xi)(1-\eta)(1-2\eta)$，

$p_3 = \xi(1-2\xi)\eta(1-2\eta)$，　　$p_4 = -(1-\xi)(1-2\xi)\eta(1-\eta)$，

$p_5 = 4\xi(1-\xi)(1-\eta)(1-2\eta)$，　　$p_6 = -4\xi(1-2\xi)\eta(1-\eta)$，

$p_7 = -4\xi(1-\xi)\eta(1-2\eta)$，　　$p_8 = 4(1-\xi)(1-2\xi)\eta(1-\eta)$，

$p_9 = 16\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)$，　　$p_{10} = \xi^2(1-\xi)^2\eta(1-\eta)f(\eta)$，

$p_{11} = \xi(1-\xi)\eta^2(1-\eta)^2 f(\xi)$，　　$p_{12} = \xi(1-\xi)\eta^2(1-\eta)^2 g(\xi)$，

其中：$f(x) = a_0 + a_1 x, g(x) = b_0 + b_1 x, a_0, a_1, b_0, b_1 \in R$；$Q_2(T) = \mathrm{span}\{p_1, p_2, \cdots, p_9\}$ 为双二次元空间。

现取自由度
$$D(v) = (d_1(v), d_2(v), \cdots, d_{12}(v))^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$
其中：$d_i(v) = v(a_i)(1 \leqslant i \leqslant 8)$；$d_9(v) = \int_{F_{12}} \frac{\partial v}{\partial n_{12}} \mathrm{d}S$；$d_{10}(v) = \int_{F_{34}} \frac{\partial v}{\partial n_{34}} \mathrm{d}S$；$d_{11}(v) = \int_{F_{23}} \frac{\partial v}{\partial n_{23}} \mathrm{d}S$；$d_{12}(v) = \int_{F_{41}} \frac{\partial v}{\partial n_{41}} \mathrm{d}S$。

对于变换
$$\begin{cases} x = a\xi + \varepsilon_1 \eta - \xi\eta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \\ y = b\eta, \end{cases} \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqslant 0, \ 0 < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < a,$$
有
$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} = a - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\eta \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} = \varepsilon_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\xi \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = b, \end{cases} \quad \text{继而有} \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{1}{a - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\eta} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = \dfrac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\xi - \varepsilon_1}{b[a - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\eta]} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = \dfrac{1}{b}, \end{cases}$$
得
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{1}{a - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\eta} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \xi}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = \dfrac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\xi - \varepsilon_1}{b[a - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\eta]} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \eta}, \end{cases}$$
计算可得：
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{F_{12}} \frac{\partial v}{\partial n_{12}} \mathrm{d}S = -\int_0^1 \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\xi - \varepsilon_1}{b} \frac{\partial v}{\partial \xi} \mathrm{d}\xi - \frac{a}{b} \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial \eta} \mathrm{d}\xi \\ \displaystyle\int_{F_{34}} \frac{\partial v}{\partial n_{34}} \mathrm{d}S = -\int_0^1 \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\xi - \varepsilon_1}{b} \frac{\partial v}{\partial \xi} \mathrm{d}\xi + \int_0^1 \frac{a - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{b} \frac{\partial v}{\partial \eta} \mathrm{d}\xi \\ \displaystyle\int_{F_{23}} \frac{\partial v}{\partial n_{23}} \mathrm{d}S = \frac{l_2^2}{b} \int_0^1 \frac{1}{a - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \mathrm{d}\eta + \frac{\varepsilon_2}{b} \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial \eta} \mathrm{d}\eta \\ \displaystyle\int_{F_{41}} \frac{\partial v}{\partial n_{41}} \mathrm{d}S = -\frac{l_1^2}{b} \int_0^1 \frac{1}{a - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \mathrm{d}\eta + \frac{\varepsilon_1}{b} \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial \eta} \mathrm{d}\eta。 \end{cases}$$

对 $\forall v \in P(T)$, 令 $v = \sum_{i=1}^{12} \beta_i P_i$, 则可得到 $D(v) = \boldsymbol{C}b$。

其中: $b = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{12})^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} I_{8\times8} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1,12} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{12,1} & \cdots & C_{12,12} \end{pmatrix}$;

$$B_{12} = \begin{bmatrix} -\dfrac{8a}{3b} & -\dfrac{f(0)a}{30b} \\ -\dfrac{8[a-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]}{3b} & -\dfrac{f(1)[a-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]}{30b} \end{bmatrix};$$

$$B_{23} = \begin{pmatrix} -\dfrac{l_2^2 f(1)}{b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-\eta)^2\eta^2}{a-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\eta}\mathrm{d}\eta & -\dfrac{l_2^2 g(1)}{b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-\eta)^2\eta^2}{a-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\eta}\mathrm{d}\eta \\ -\dfrac{l_1^2 f(1)}{b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-\eta)^2\eta^2}{a-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\eta}\mathrm{d}\eta & -\dfrac{l_1^2 g(0)}{b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-\eta)^2\eta^2}{a-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\eta}\mathrm{d}\eta \end{pmatrix},$$

因而有 $\det \boldsymbol{C} = \det B_{12} \cdot \det B_{23} =$

$$\frac{4a[a-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]l_1^2 l_2^2}{45b^2}\left(\int_0^1 \frac{(1-\eta)^2\eta^2}{a-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\eta}\mathrm{d}\eta\right)^2 \cdot (f(1)-f(0))(f(1)g(0)-f(0)g(1))。$$

1) 若

$$f(1)-f(0) \neq 0, f(1)g(0)-f(0)g(1) \neq 0 \tag{4}$$

同时成立, 则适定性条件成立。

2) 如果 $f(1)-f(0) \neq 0$, 可得 $a_1 \neq 0$。所以形函数空间不小于7次。

3) 对上述 $f(x)$ 与 $g(x)$, 取 $f(x) = 1-x$, $g(x) = x$, 则1), 2) 均成立。

2 十二参梯形板元的离散

取节点参数

$$Q(v) = (v_1, v_{1_x}, v_{1_y}, \cdots, v_4, v_{4_x}, v_{4_y})^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

将自由度离散成节点参数, 其中 $d_1(v)$, $d_2(v)$, $d_3(v)$, $d_4(v)$ 取精确值, $d_5(v)$, $d_6(v)$, $d_7(v)$, $d_8(v)$ 采用对应边上的三次Hermite插值多项式, $d_9(v)$, $d_{10}(v)$, $d_{11}(v)$, $d_{12}(v)$ 用数值积分的梯形公式离散。可得:

$$d_5(v) = \frac{1}{2}(v_1+v_2) + \frac{a}{8}(v_{1_x} - v_{2_x}) + O(h^4),$$

$$d_6(v) = \frac{1}{2}(v_2+v_3) - \frac{\varepsilon_2}{8}(v_{2_x} - v_{3_x}) + \frac{b}{8}(v_{2_y} - v_{3_y}) + O(h^4),$$

$$d_7(v) = \frac{1}{2}(v_3+v_4) - \frac{a-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{8}(v_{3_x} - v_{4_x}) + O(h^4),$$

$$d_8(v) = \frac{1}{2}(v_4+v_1) - \frac{\varepsilon_1}{8}(v_{4_x} - v_{1_x}) + O(h^4),$$

$$d_9(v) = \int_{F_{12}} \frac{\partial v}{\partial n_{12}}\mathrm{d}S = -\frac{a}{2}(v_{1_y} + v_{2_y}) + O(h^3),$$

$$d_{10}(v) = \int_{F_{34}} \frac{\partial v}{\partial n_{34}}\mathrm{d}S = \frac{a-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}(v_{3_y} + v_{4_y}) + O(h^3),$$

$$d_{11}(v) = \int_{F_{23}} \frac{\partial v}{\partial n_{23}}\mathrm{d}S = \frac{b}{2}(v_{2_x} + v_{3_x}) + \frac{\varepsilon_2}{2}(v_{2_y} + v_{3_y}) + O(h^3),$$

$$d_{12}(v) = \int_{F_{41}} \frac{\partial v}{\partial n_{41}}\mathrm{d}S = -\frac{b}{2}(v_{1_x} + v_{4_x}) + \frac{\varepsilon_1}{2}(v_{1_y} + v_{4_y}) + O(h^3),$$

因而有 $D(v) = GQ(v) + \varepsilon(v)$, 又 $D(v) = \boldsymbol{C}b$, 可得 $b = \boldsymbol{C}^{-1}GQ(v)$。

其中: $Q(v) = (v_1, v_{1_x}, v_{1_y}, v_2, v_{2_x}, v_{2_y}, v_3, v_{3_x}, v_{3_y}, v_4, v_{4_x}, v_{4_y})^{\mathrm{T}}$;

$$
\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\frac{1}{2} & \frac{a}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{a}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\varepsilon_2}{8} & \frac{b}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{\varepsilon_2}{8} & -\frac{b}{8} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{a-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{8} & 0\\
\frac{1}{2} & \frac{\varepsilon_1}{8} & \frac{b}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\varepsilon_1}{8} & -\frac{b}{8}\\
0 & 0 & -\frac{a}{2} & 0 & 0 & -\frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2} & 0 & 0 & \frac{a-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} & \frac{\varepsilon_2}{2} & 0 & \frac{b}{2} & \frac{\varepsilon_2}{2} & 0 & 0 & 0\\
0 & -\frac{b}{2} & \frac{\varepsilon_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} & \frac{\varepsilon_1}{2}
\end{pmatrix}。
$$

计算可知 $\det \boldsymbol{G}=-\dfrac{a^2b^2(a-\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{16\ 386}$。1) 当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ 时, $\det \boldsymbol{G}=0$ 不满足强适定性条件; 2) 当 $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$ 时, $\det \boldsymbol{G}\neq 0$ 满足强适定性条件。

3　十二参梯形板元的收敛性分析

引理　若双参数元满足: 1) 插值方程满足适定性条件; 2) 定义 $\|\cdot\|_h=\sum_K(|\cdot|^2_{2,K})^{\frac{1}{2}}$ 是有限元空间 V_h 上的模; 3) $P_2(K)\subset P(K)$, 且自由度对节点参数的离散方式对 $P_2(K)$ 中元素精确成立, 即余项为零; 4) 有限元空间满足 $F1-F2-$ Test[6], 则该元对板弯曲问题收敛。

定理　对梯形单元 T, 由式(1) 变换, 若取形函数空间式(2) 满足 $a_1b_0-a_0b_1\neq 0$, 且 $a_1\neq 0$ 时, 将自由度式(3) 按节点参数式(5) 离散, 则该梯形板元收敛。

证明

1) 若 $a_1\neq 0$, 则 $f(1)-f(0)\neq 0$, 由 $a_1b_0-a_0b_1\neq 0$, 可得 $f(1)g(0)-f(0)g(1)\neq 0$, 则式(4) 成立, 故 $\det \boldsymbol{C}\neq 0$, 满足适定性条件。

2) 对 $v\in V_h$, $|v|_{2,h}=0$, 则 $v|_T\in P_1(T)$, 由自由度及其离散的方式知, v 的节点函数值及一阶导数平均值在外边界为 0, 在内边界连续, 由此推得 $v=0$。因此 $|\cdot|_{2,h}=0$ 是 V_h 上的模。

3) 因为 $P_2(T)\subset Q_2(T)=\mathrm{span}\{p_1,p_2,\cdots,p_9\}\subset P(T)$, 且由自由度的离散方式可知 $\varepsilon(v)=0$。

4) 由自由度及其离散方式知, V_h 中元素 v 在内边界及中点函数值及法向导数平均值在单元间连续。由此得 $\int_F[\frac{\partial v}{\partial S}]\mathrm{d}S=\int_F[\frac{\partial v}{\partial n}]\mathrm{d}S=0$, 由数值积分公式及 $v|_T\in P_3(T)$ 知 $\int_F[v]\mathrm{d}S=0$。

由引理可知, 该板元收敛。

注: 当 ε_1, ε_2 中有一个取值为 0 时, 此时为直角梯形, 其对应的 l_1 或 l_2 等于 b。

参考文献:

[1]　陈绍春, 石钟慈. 构造单元刚度矩阵的双参数法[J]. 计算数学, 1991, 13(3): 286-296
[2]　石钟慈, 陈绍春. 九参数拟协调元的直接分析[J]. 计算数学, 1990, 12(1): 76-84
[3]　石钟慈, 陈绍春. 九参数广义协调元的收敛性[J]. 计算数学, 1991, 13(1): 193-203
[4]　陈绍春. 十二参矩形广义协调元分析[J]. 郑州大学学报, 1991, 23(1): 19-23
[5]　孙会霞, 陈绍春, 冯密罗. 对称形式的双参数梯形板元[J]. 应用数学, 2001, 14(3): 52-58
[6]　SHI Zong-ci. The F-E-M-Test for convergence of nonconforming finite elements[J]. Math Comput, 1987, 49: 391-405.