第 28 卷第 3 期 河北科技大学学报 Vol.28, No.3
2007 年 9 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Sept. 2007

文章编号: 1008-1542(2007)03-0178-02

不动点集为 $RP_1(2m)\cup RP_2(2m)\cup RP(3)$ 的带有对合的光滑流形

赵素倩

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

摘 要: 设 (M^r, T) 是一个具有对合 T 的 $r(r>2m+4)$ 维光滑闭流形,它的不动点集为 F。本文给出了 $F=RP_1(2m)\cup RP_2(2m)\cup RP(3)$ 时对合的协边类(其中 m 为奇数),RP 表示实射影空间。

关键词: 对合; 协边; 不动点集

中图分类号: O189.2 文献标识码: A

Involutions fixing the disjoint union of projective spaces $RP_1(2m)\cup RP_2(2m)\cup RP(3)$

ZHAO Su-qian

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: Let (M^r, T) denote a smooth involution on a closed manifold T of dimension r $(r>2m+4)$ with fixed point set F. In this paper, the bordism classes of the involutions with $F=RP_1(2m)\cup RP_2(2m)\cup RP(3)$ are determined(m is a odd number). Here RP denotes the real projective space.

Key words: involution; bordism; fixed point set

STONG 最早研究了以实射影空间为不动点集的对合[1]。1980 年, ROYSTER 研究了不动点集为 2 个实射影空间并的情形,即不动点集 $F=RP(n)\cup RP(m)$ 的情形[2],但对当 n 和 m 均为偶数的情形没有解决。1985 年,吴振德等研究了这一情形[3]。1994 年和 1996 年 HOU 等分别对不动点集为有限个奇数维和偶数维实射影空间并的情形进行了讨论,确定了其协边分类[4,5]。本文旨在确定不动点集 $F=RP_1(2m)\cup RP_2(2m)\cup RP(3)$ 的情形,主要结果如下。

定理 设 (M^r, T) 是具有对合 T 的 $r(r>2m+4)$ 维光滑闭流形,其不动点集 $F=RP_1(2m)\cup RP_2(2m)\cup RP(3)$ (m 为奇数),则 (M^r, T) 协边。

1 预备知识

全文均在整数模 2 加群 Z_2 上讨论,$\eta^k\to F$ 表示 F 在 M 中的 k 维法丛; $W(\eta)$ 表示法丛 η 的全 Stifel-Whitney 示性类; $W(F)$ 表示 F 上的切丛的全 Stifel-Whitney 示性类; $\sigma(X)$ 表示第 i 个初等对称多项式 $\sum x_1x_2\cdots x_i$。$[M^r]$ 表示流形 M 上的基本同调类, 2^N 表示大于 $2n$ 和 $2m$ 的 2 幂。

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 为 Z_2 上次数小于或等于 r 的对称多项式, KOSNIOWSKI 等证明了以下结果[6]:

收稿日期: 2006-06-09; 修回日期: 2007-04-20; 责任编辑: 张 军

作者简介: 赵素倩(1973-),女,河北高邑人,讲师,主要从事代数拓扑和微分拓扑方面的研究。

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_r)[M^r] = \sum \frac{f(1+y_1, 1+y_2, \cdots, 1+y_k, z_1, z_2, \cdots, z_{r-k})}{\prod_{i=1}^{k}(1+y_i)}[F^{r-k}]。$$

2　定理的证明

设 $RP_1(2m)$、$RP_2(2m)$、$RP(3)$ 在 M 中的法丛的全 Stifel-Whitney 示性类分别为 $(1+a)^{l_1}$, $(1+b)^{l_2}$, $(1+c)^{l_3}$, 其中 $a\in H^1(RP_1(2m), Z_2)$, $b\in H^1(RP_2(2m), Z_2)$, $c\in H^1(RP(3), Z_2)$ 为生成元, $l_i(i=1,2,3)$ 为非负整数。设 $2m$ 的二进制分解式中的最大项为 2^λ, 则无妨假设 $l_1<2^{\lambda+1}$, $l_2<2^{\lambda+1}$; 因为 3 的二进制分解中的最大项是 2, 则无妨假设 $l_3<2^{1+1}$, 即 $l_3<4$。

1) l_3 为偶数情形

若 l_3 为偶数, 则 $RP(3)$ 的法丛协边, 此时, 对合 (M^r, T) 等价于以 $RP_1(2m)\cup RP_2(2m)$ 不动点集的对合 (N^p, T), 由文献[3]知, 当 $r>2m$ 时, 对合协边。

2) l_3 为奇数情形

首先证明必有 $l_1=l_2$, 若 $l_1\neq l_2$, 分以下几种情况讨论。

(i) l_1, l_2 均为奇数

取对称多项式

$$f(x)=\left[\sigma_1(x)-\begin{pmatrix}k_1\\1\end{pmatrix}\right]^2\left[1+\sigma_1(x)-\begin{pmatrix}k_1\\1\end{pmatrix}\right]^2,$$

其中 $k_1=r-2m$, 由于 $\deg f(x)=2+2=4<r$, 故有 $f(x)[M^r]=0$。

利用 Kosniowski-Stong 公式

$$f(x)[M^r]=\frac{c^2(1+c)^2}{(1+c)^{l_3}}[RP(3)]=\begin{pmatrix}2^N-l_3+2\\1\end{pmatrix}=1$$

得出矛盾, 故此种情况不存在。

(ii) l_1, l_2 为一奇一偶

不失一般性, 可设 l_1 为偶数, l_2 为奇数(l_1 为奇数, l_2 为偶数时可类似证明)。根据预备知识知 $l_3<4$, 但 l_3 又为奇数, 因此 $l_3=1$ 或 $l_3=3$。

当 $l_3=1$ 时, 取

$$f(x)=\left[\sigma_1(x)-\begin{pmatrix}k_1\\1\end{pmatrix}\right]^{2m+2},$$

因 $\deg f(x)=2m+2<r$, 故 $f(x)[M^r]=0$。而又由 Kosniowski-Stong 公式

$$f(x)[M^r]=\frac{a^{2m+2}}{(1+a)^{l_1}}[RP_1(2m)]+0+\frac{(1+c)^{2m+2}}{(1+c)}[RP(3)]=0+\begin{pmatrix}2^N-1+2m+2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m+1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m\\2\end{pmatrix}=1$$

得出矛盾, 故此种情况不存在。

当 $l_3=3$ 时, 取对称多项式

$$f(x)=\left[\sigma_1(x)-\begin{pmatrix}k_1\\1\end{pmatrix}\right]^{2m+4},$$

因 $\deg f(x)=2m+4<r$, 故 $f(x)[M^r]=0$。而又由 Kosniowski-Stong 公式

$$f(x)[M^r]=\frac{a^{2m+4}}{(1+a)^{l_1}}[RP_1(2m)]+0+\frac{(1+c)^{2m+4}}{(1+c)^3}[RP(3)]=0+\begin{pmatrix}2^N-3+2m+4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m+1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m\\2\end{pmatrix}=1$$

得出矛盾, 故此种情况不存在。

(iii) l_1, l_2 均为偶数

利用反证法, 假设对合 (M^r, T) 存在, 取

$$f(x)=\left[\sigma_1(x)-\begin{pmatrix}k_1\\1\end{pmatrix}\right]^{2m}\left[1+\sigma_1(x)-\begin{pmatrix}k_1\\1\end{pmatrix}\right]^2,$$

(下转第 **185** 页)

5 结 语

在本文中, 笔者考虑了具有时变时滞的并且满足 H_∞ 范数界 γ 的不确定网络化控制系统的鲁棒稳定性, 通过构造适当的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 应用众所周知的积分不等式来处理交叉截项, 以线性矩阵不等式的形式给出了能够保证鲁棒稳定性的一个充分条件, 进而得到一个 H_∞ 状态反馈控制律。最后, 举出一个数值例子证明所提方法的有效性和可行性。

参考文献:

[1] WU M, HE Y, SHE J H. Delay-dependent criteria for the robust stability of systems with time-varying delays[J]. Control Theory and Application, 2003, 1(1): 97-100.

[2] WU M, HE Y, SHE J H. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays[J]. Systems and Control Letters, 2004, 51(7): 57-65.

[3] ZHANG W, BRANICKY M S, PHILLIPS S M. Stability of networked control system[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 84-99.

[4] PARK H S, KIM H Y, KIM D S, et al. Maximum allowable delay bounds of networked control systems[J]. Control Engineering Practice, 2003, 11(11): 1 301-1 313.

[5] JIANG P, JIANG X, LI C, et al. Robust H_∞ control for the networked control systems bases on LMIs[J]. Control and Decision, 2004, 19(1): 97-100.

[6] XU S Y, LAM J. A new approach to exponential stability analysis of neural networks with time-varying delays[J]. Neural Networks, 2006, 19(1): 76-83.

(上接第 **179** 页)

因 $\deg f(x) = 2m + 2 < r$, 故 $f(x)[M^r] = 0$。而又由 Kosniowski-Stong 公式

$$f(x)[M^r] = \frac{(1+a)^2 a^{2m}}{(1+a)^{l_1}}[RP_1(2m)] + \frac{(1+b)^2 b^{2m}}{(1+b)^{l_2}}[RP_2(2m)] + \frac{c^2(1+c)^{2m}}{(1+c)^{l_3}}[RP(3)] =$$

$$\binom{2^N - l_1 + 2}{0} + \binom{2^N - l_2 + 2}{0} + \binom{2^N - l_3 + 2m}{1} = 1$$

得出矛盾, 故此种情况不存在。

若 $l_1 = l_2$, 则有 $(1+a)^{l_1} = (1+a)^{l_2}$, 从而 $RP_1(2m)$、$RP_2(2m)$ 上的 2 个法丛协边, 故此时的对合 (M^r, T) 等价于以 $RP(3)$ 为不动点集的对合 (N^P, T), 据文献[7]可知, (M^r, T) 协边于 0。定理证毕。

参考文献:

[1] STONG R E. Involution fixing the projective spaces[J]. Michigan Math J, 1966, 13: 445-447.

[2] ROYSTER D C. Involutions fixing the disjoint union of the two projective spaces[J]. Indiana Univ Math J, 1980, 29: 267-276.

[3] 吴振德, 刘宗泽. 不动点集为 $RP(2m) \cup RP(2n)$ 的对合[J]. 数学季刊, 1986, 1: 19-39.

[4] HOU D, TORRENCE B F. Involution fixing the disjoint union of odd-dimensional projective spaces[J]. Can Math Bull, 1994, 37: 66-74.

[5] HOU D, TORRENCE B F. Involution fixing the disjoint union of even-dimensional projective spaces[J]. Acta Math Sincia, 1996, 12: 162-166.

[6] KOSNIOWSKI C, STONG R E. Involutions and characteristic numbers[J]. Topology, 1978, 17: 309-330.

[7] CAPOBIANCO F L. Stationary points of $(Z_2)^k$-action[J]. Proceedings Amer Math Soc, 1976, 67: 377-380.