第 28 卷第 3 期　　河北科技大学学报　　Vol. 28, No. 3
2007 年 9 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Sept. 2007

文章编号: 1008-1542(2007)03-0174-04

C^2 空间中广义解析函数的一个带位移的边值问题

杨贺菊, 李尊凤, 刘　萍

(河北科技大学理学院, 河北石家庄　050018)

摘　要: 研究 C^2 空间中广义解析函数的一个带位移的边值问题, 利用积分方程理论和压缩映射原理证明了解的存在性及唯一性。

关键词: 多复变广义解析函数; 位移; 边值问题

中图分类号: O174.56　　　文献标识码: A

Boundary value problem with a kind of shift for generalized analytic functions in the space C^2

YANG He-ju, LI Zun-feng, LIU Ping

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: A boundary value problem with a kind of shift for generalized analytic functions in the space C^2 is discussed and the existence (uniqueness) of the solution is proved by the application of the integral function and the compressing projection principle.

Key words: generalized analytic functions; shift; boundary value problem

1　问题的提出

设 $D_k(k=1,2)$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的单位圆盘, 记 $\mathbf{C}^2$ 空间中双圆柱域 $D=D_1\times D_2$, D_1, D_2 的边界分别为 $C_1:|z_1|=1$, $C_2:|z_2|=1$。记 $L=L_1\times L_2$, 用 D_k^+, D_k^- 表示 $D_k(k=1,2)$ 的内部和外部。设 $t=(t_1,t_2)\in L$, 当点 $z=(z_1,z_2)$ 从 $D_1^{\pm}\times D_2^{\pm}$ 趋于 t 时, 记函数 $\Phi(z)=\Phi(z_1,z_2)$ 相应的极限值为 $\Phi^{\pm\pm}(t_1,t_2)$。

定义 1　如果 $d_1(t)$, $d_2(t)$ 分别为 L_1 到 L_1, L_2 到 L_2 的同胚映射, 则称 $d(t_1,t_2)=(d_1(t_1),d_2(t_2))$ 为 L 上的 Haseman 位移。

定义 2[1]　设 $F_1,F_2\in\mathbf{C}^1(D)$, $D=D_1\times D_2$, 定义方程组

$$\begin{cases} W_{\bar z_1}=F_1(z_1,z_2),\\ W_{\bar z_2}=F_2(z_1,z_2)\end{cases}\tag{1}$$

的解 $W(z_1,z_2)$ 为广义解析函数。

定义 3[1]　设 $F_1,F_2\in\mathbf{C}^1(D)$, 则称方程组(1)可解的必要条件

$$F_{1\bar z_2}=F_{2\bar z_1}\tag{2}$$

为式(1)的相容条件。

问题 **R**: 寻求在 $D_1^{\pm}\times D_2^{+}$, $D_1^{\pm}\times D_2^{-}$ 内广义解析, 在 $D_1^{\pm}\times D_2^{+}+L_1\times L_2$ 及 $D_1^{\pm}\times D_2^{-}+L_1\times L_2$ 上连续的函数 $W(z_1,z_2)$, 使其满足边界条件:

收稿日期: 2006-10-18; 修回日期: 2007-04-15; 责任编辑: 张　军

作者简介: 杨贺菊(1974-), 女, 河北安新人, 讲师, 硕士, 主要从事函数边值问题方面的研究。

$$\begin{aligned}&A_1(t_1,t_2)W^{++}(t_1,t_2)+A_2(t_1,t_2)W^{++}(d(t_1,t_2))+\\&B_1(t_1,t_2)W^{+-}(t_1,t_2)+B_2(t_1,t_2)W^{+-}(d(t_1,t_2))+\\&C_1(t_1,t_2)W^{-+}(t_1,t_2)+C_2(t_1,t_2)W^{-+}(d(t_1,t_2))+\\&D_1(t_1,t_2)W^{--}(t_1,t_2)+D_2(t_1,t_2)W^{--}(d(t_1,t_2))=\\&g(t_1,t_2),\end{aligned}\tag{3}$$

且 $W(z_1,\infty)=W(\infty,z_2)=W(\infty,\infty)=0$，其中 $A_i(t_1,t_2)$，$B_i(t_1,t_2)$，$C_i(t_1,t_2)$，$D_i(t_1,t_2)(i=1,2)$ 为 $L_1\times L_2$ 上给定的函数。

2　化成积分方程问题

引入奇异积分算子

$$S_1\varphi=\frac{2}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau_1,t_2)}{\tau_1-t_1}d\tau_1;$$

$$S_2\varphi=\frac{2}{\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(t_1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2;$$

$$S_3\varphi=\frac{2}{(\pi i)^2}\int_{L}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2,\ t_1\in L_1,\ t_2\in L_2;$$

$$T_1F(z_1,z_2)=-\frac{1}{\pi}\iint_{D_1^+}\frac{F(\tau_1,z_2)}{\tau_1-z_1}d\sigma_{\tau_1}+\frac{-1}{\pi}\iint_{D_1^+}\frac{F(\frac{1}{\tau_1},z_2)}{(\frac{1}{\tau_1}-z_1)|\tau_1|^4}d\sigma_{\tau_1};$$

$$T_2F(z_1,z_2)=-\frac{1}{\pi}\iint_{D_2^+}\frac{F(z_1,\tau_2)}{\tau_2-z_2}d\sigma_{\tau_2}+\frac{-1}{\pi}\iint_{D_2^+}\frac{F(z_1,\frac{1}{\tau_2})}{(\frac{1}{\tau_2}-z_2)|\tau_2|^4}d\sigma_{\tau_2};$$

$$T_3(F_{1z_2})=T_2[(T_1F_1)_{z_2}]。$$

其中：$\tau_1=\xi_1+i\eta_1$；$d\sigma_{\tau_1}=d\xi_1 d\eta_1$；$\tau_2=\xi_2+i\eta_2$；$d\sigma_{\tau_2}=d\xi_2 d\eta_2$。

引理 1[2]　设式(1)中 $F_1,F_2\in\mathbf{C}^1(D_1\times D_2)$ 且适合相容条件(2)，若 $(T_1F_1)_{z_2}$，F_1，F_2 满足：

1）对每个固定的 $z_1\in\mathbf{C}$，关于 z_2，当 $|z_1|\leqslant 1$ 时，$F(z_1,z_2)\in C_\alpha(\mathbf{C})$，且 $|F(z_1,z_2)|\leqslant M_1$，当 $|z_1|\geqslant 1$ 时，$z_1^2F(z_1,z_2)\in C_\alpha(\mathbf{C})$ 且 $|z_1^2F(z_1,z_2)|\leqslant M_2$，其中 M_1，M_2 及 Holder 常数与 z_1 无关；

2）对每个固定的 $z_2\in\mathbf{C}$，关于 z_1，当 $|z_2|\leqslant 1$ 时，$F(z_1,z_2)\in C_\alpha(\mathbf{C})$，且 $|F(z_1,z_2)|\leqslant M_3$，当 $|z_2|\geqslant 1$ 时，$z_2^2F(z_1,z_2)\in C_\alpha(\mathbf{C})$ 且 $|z_2^2F(z_1,z_2)|\leqslant M_4$，其中 M_3，M_4 及 Holder 常数与 z_2 无关，则

$$W(z_1,z_2)=T_1F_1+T_2F_2-T_3(F_{1\bar z_2})+\Phi(z_1,z_2)\tag{4}$$

为 $D_1^{\pm}\times D^+$，$D_1^{\pm}\times D_2^-$ 中的广义解析函数，其中 $\Phi(z_1,z_2)$ 为 $D_1^{\pm}\times D_2^+$，$D_1^{\pm}\times D_2^-$ 中的解析函数。

引理 2[1]　若 $W(z_1,z_2)$ 为引理 1 中的广义解析函数，且 $F_1(z_1,\infty)=F_2(\infty,z_2)=0$，$F_{1z_2}$ 满足引理 1 中的条件 1）和条件 2），则有如下 Plemelj 公式：

$$\begin{cases}W^{++}(t_1,t_2)=(T_1F_1)(t_1,t_2)+(T_2F_2)(t_1,t_2)-(T_3F_{1z_2})(t_1,t_2)+\frac{1}{4}(\varphi+S_1\varphi+S_2\varphi+S_3\varphi)(t_1,t_2);\\W^{+-}(t_1,t_2)=(T_1F_1)(t_1,t_2)+(T_2F_2)(t_1,t_2)-(T_3F_{1z_2})(t_1,t_2)+\frac{1}{4}(-\varphi-S_1\varphi+S_2\varphi+S_3\varphi)(t_1,t_2);\\W^{-+}(t_1,t_2)=(T_1F_1)(t_1,t_2)+(T_2F_2)(t_1,t_2)-(T_3F_{1z_2})(t_1,t_2)+\frac{1}{4}(-\varphi+S_1\varphi-S_2\varphi+S_3\varphi)(t_1,t_2);\\W^{--}(t_1,t_2)=(T_1F_1)(t_1,t_2)+(T_2F_2)(t_1,t_2)-(T_3F_{1z_2})(t_1,t_2)+\frac{1}{4}(\varphi-S_1\varphi-S_2\varphi+S_3\varphi)(t_1,t_2),\end{cases}\tag{5}$$

且有 $W(z_1,\infty)=W(\infty,z_2)=W(\infty,\infty)=0$。

定理 1　设 $d(t_1,t_2)$ 为 L 上的 Haseman 位移，则有

$$\left.\begin{aligned}
&W^{++}(d(t_1,t_2))=(T_1F_1)(d(t_1,t_2))+(T_2F_2)(d(t_1,t_2))-(T_3F_{1z_2})(d(t_1,t_2))+\\
&\qquad\frac{1}{4}(\varphi+S_1\varphi+S_2\varphi+S_3\varphi)(d(t_1,t_2));\\
&W^{+-}(d(t_1,t_2))=(T_1F_1)(d(t_1,t_2))+(T_2F_2)(d(t_1,t_2))-(T_3F_{1z_2})(d(t_1,t_2))+\\
&\qquad\frac{1}{4}(-\varphi-S_1\varphi+S_2\varphi+S_3\varphi)(d(t_1,t_2));\\
&W^{-+}(d(t_1,t_2))=(T_1F_1)(d(t_1,t_2))+(T_2F_2)(d(t_1,t_2))-(T_3F_{1z_2})(d(t_1,t_2))+\\
&\qquad\frac{1}{4}(-\varphi+S_1\varphi-S_2\varphi+S_3\varphi)(d(t_1,t_2));\\
&W^{--}(d(t_1,t_2))=(T_1F_1)(d(t_1,t_2))+(T_2F_2)(d(t_1,t_2))-(T_3F_{1z_2})(d(t_1,t_2))+\\
&\qquad\frac{1}{4}(\varphi-S_1\varphi-S_2\varphi+S_3\varphi)(d(t_1,t_2))。
\end{aligned}\right\}$$

其中$(t_1,t_2)\in L_1\times L_2$。

证明　因为 $d_1(t_1),d_2(t_2)$分别为L_1,L_2 上的同胚映射,所以$(d_1(t_1),d_2(t_2))\in L$,用 $d(t_1,t_2)=(d_1(t_1),d_2(t_2))$代替式(5)中的$(t_1,t_2)$即可。

引理 3[2]　若 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in H(L,\alpha)$,则$\|\varphi_1\varphi_2\|_\alpha\leqslant J_1\|\varphi_1\|_\alpha\|\varphi_2\|_\alpha$。

引理 4[3]　设 $\varphi(t_1,t_2)\in H(L,\alpha)$,则存在与$\varphi$无关的正常数$J_2$ 使得

$$\|2\varphi-2S_i\varphi\|_\alpha\leqslant J_2\|\varphi\|_\alpha,\ \|2S_i\varphi\|_\alpha\leqslant J_2\|\varphi\|_\alpha,$$
$$\|S_2\varphi\pm S_3\varphi\|_\alpha\leqslant J_2\|\varphi\|_\alpha,\ \|\theta_i(\varphi)\|_\alpha\leqslant J_2\|\varphi\|_\alpha,\ i=1,2。$$

其中:$\theta_1(\varphi)=\varphi+S_1\varphi+S_2\varphi+S_3\varphi$;$\theta_2(\varphi)=-\varphi+S_1\varphi-S_2\varphi+S_3\varphi$。

定理 2　设$d(t_1,t_2)$为L 上的 Haseman 位移,且对于任意的$t',t''\in L$,满足 Lipschitz 条件,即$\|d(t')-d(t'')\|\leqslant J_3|t'-t''|$,则有$\|\varphi(d(t_1,t_2))\|_\alpha\leqslant(1+J_3^\alpha)\|\varphi(t_1,t_2)\|_\alpha$。

证明　$\|\varphi(d(t_1,t_2))\|_\alpha=\max\limits_{d_1(t_1),d_2(t_2)\in L}|\varphi(d_1(t_1),d_2(t_2))|+\sup\limits_{t',t''\in L,t'\neq t''}\dfrac{\varphi(d(t'))-\varphi(d(t''))}{|t'-t''|^2}\leqslant C(\varphi(t_1,t_2))+J_3^\alpha H(\varphi)\leqslant\|\varphi\|_\alpha+J_3^\alpha\|\varphi\|_\alpha=(1+J_3^\alpha)\|\varphi\|_\alpha$。

定理 3　$d(t_1,t_2)$满足定理 2 的条件,则对于任意 $\varphi(x,y)\in H(L,\alpha)$,存在与$\varphi$无关的正常数$J_4=(1+J_3^\alpha)J_2$,使得

$$\|2\varphi(d)-2S_i(\varphi(d))\|_\alpha\leqslant J_4\|\varphi\|_\alpha,\ \|2S_i\varphi(d))\|\leqslant J_4\|\varphi\|_\alpha,$$
$$\|S_2\varphi(d)\pm S_3(\varphi(d))\|_\alpha\leqslant J_4\|\varphi\|_\alpha,\ \|\theta_i(\varphi(d))\|_\alpha\leqslant J_4\|\varphi\|_\alpha,\ i=1,2。$$

证明　由定理 2 和引理 4 易证

$$\|2\varphi(d)-2S_i(\varphi(d))\|_\alpha\leqslant J_2\|\varphi(d)\|_\alpha\leqslant J_2(1+J_3^\alpha)\|\varphi(t_1,t_2)\|_\alpha=J_4\|\varphi\|_\alpha。$$

其余的类似可证。

引入算子Q,则由引理 2 及定理 1 可将问题 **R** 化为下列奇异积分方程的求解问题

$$Q\varphi=\varphi,\tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}
Q\varphi=\ &4(A_1+B_1+C_1+D_1)(T_1F_1+T_2F_2-T_3F_{1z_2})+(A_1+B_1)\theta_1(\varphi)+\\
&(C_1+D_1)\theta_2(\varphi)+(B_1+D_1)(2\varphi-2S_1\varphi)+(1-4B_1)\varphi-4g+\\
&4(A_2+B_2+C_2+D_2)(T_1F_1+T_2F_2-T_3F_{1z_2})(d)+(A_2+B_2)\theta_1(\varphi(d))+\\
&(C_2+D_2)\theta_2(\varphi(d))+(B_2+D_3)(2\varphi-2S_1\varphi)(d)-4B_2\varphi(d),
\end{aligned}\tag{7}$$

$\varphi\in H(L_1\times L_2,\alpha)$。若奇异积分方程(6)有解$\varphi_0$,则问题 **R** 有解

$$W(z_1,z_2)=T_1F_1+T_2F_2-T_3(F_{1z_2})+\Phi(z_1,z_2),\tag{8}$$

其中 $\Phi(z_1,z_2)=\dfrac{1}{(2\pi i)^2}\displaystyle\int_L\frac{\varphi_0(t_1,t_2)}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,\ z_1-L_1,z_2-L_2$。

3　问题 R 的解的存在(唯一)性及解的积分表达式

定理 4　在问题 **R** 中,若有

1) $d(t_1, t_2)$ 满足 Lipschitz 条件;

2) $F_1, F_2, T_1(F_{1z_2}), F_{1\bar{z}_2}$ 适合引理 1 中 F_1, F_2 的条件;

3) $A_i(t_1,t_2), B_i(t_1,t_2), C_i(t_1,t_2), D_i(t_1,t_2), g(t_1,t_2) \in H(L,\alpha)(i=1,2)$, 则当 $0<\gamma=J_1[J_2(\|A_1+B_1\|_\alpha+\|C_1+D_1\|_\alpha+\|B_1+D_1\|_\alpha)+\|1-4B_1\|_\alpha+J_4(\|A_2+B_2\|_\alpha+\|C_2+D_2\|_\alpha+\|B_2+D_2\|_\alpha)+\|4B_2\|_\alpha(1+J_3^\alpha)]<1$ 时, 问题 **R** 有唯一解, 且解的积分表示式由式(8)给出。

证明　对于任意的 $\varphi_1, \varphi_2 \in H(L_1\times L_2, \alpha)$, 由定理 3 和引理 4 得

$$
\begin{aligned}
\|Q\varphi_1-Q\varphi_2\|_\alpha \leqslant\ & J_1\|A_1+B_1\|_\alpha\|\theta_1(\varphi_1-\varphi_2)\|_\alpha+J_1\|C_1+D_1\|_\alpha\|\theta_2(\varphi_1-\varphi_2)\|_\alpha+\\
& J_1\|B_1+D_1\|_\alpha\|2(\varphi_1-\varphi_2)-2S_1(\varphi_1-\varphi_2)\|_\alpha+J_1\|1-4B_1\|_\alpha\|(\varphi_1-\varphi_2)\|_\alpha+\\
& J_1\|A_2+B_2\|_\alpha\|\theta_1(\varphi_1-\varphi_2)(d)\|_\alpha+J_1\|C_2+D_2\|_\alpha\|\theta_2(\varphi_1-\varphi_2)(d)\|_\alpha+\\
& J_1\|B_2+D_2\|_\alpha\|2(\varphi_1-\varphi_2)(d)-2S_1(\varphi_1-\varphi_2)(d)\|_\alpha-4J_1\|B_2\|_\alpha\|(\varphi_1-\varphi_2)(d)\|_\alpha\leqslant\\
& J_1J_2\|A_1+B_1\|_\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|_\alpha+J_1J_2\|C_1+D_1\|_\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|_\alpha+J_1J_2\|B_1+D_1\|_\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|_\alpha+\\
& J_1\|1-4B_1\|_\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|_\alpha+J_1J_4\|A_2+B_2\|_\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|_\alpha+J_1J_4\|C_2+D_2\|_\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|_\alpha+\\
& J_1J_4\|B_2+D_2\|_\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|_\alpha+4J_1\|B_2\|_\alpha(1+J_3^\alpha)\|\varphi_1-\varphi_2\|_\alpha=\gamma\|\varphi_1-\varphi_2\|_\alpha,
\end{aligned}
$$

又因为 $\gamma<1$, 所以 Q 为从 Banach 空间 $H(L,\alpha)$ 到自身的压缩映射, 由压缩映射原理可知存在唯一的不动点 $\varphi_0(z_1,z_2)\in H(L,\alpha)$ 使得 $\varphi_0=Q\varphi_0$, 即问题 **R** 存在唯一解, 且解的积分表示式由式(8)给出。

参考文献:

[1]　杨贺菊, 李秀敏, 郭彦平, 等. 多复变广义解析函数的边值问题[J]. 河北科技大学学报, 2002, 23(3): 1-8

[2]　杨贺菊, 黄　沙, 乔玉英. 多复变广义解析函数的一个非线性边值问题[J]. 自然科学进展, 2002, 12(5): 466-472

[3]　黄　沙. 多复变解析函数的一个非线性边值问题[J]. 数学物理学报, 1997, 17(4): 382-388

向本期载文的有关审稿专家致谢

本期《河北科技大学学报》共发表论文 22 篇。这些论文的发表, 是与有关专家的认真审读、细查资料、推敲分析、中肯评价分不开的。他们的评价(有的给予了客观的肯定, 有的给出了修改意见, 有的指出了问题的存在, 有的阐述了否定的原因)使作者和编者都受益匪浅。对此, 本编辑部特向这些专家表示敬意, 对他们的辛勤劳动表示感谢。

本期载文的审稿专家名单如下(按姓名汉语拼音排序):

陈克强　陈绍春　陈一鸣　程建改　樊云昌　葛昌纯

弓爱君　黄雪松　李贤均　彭晓峰　任丽萍　单　泉

孙会元　孙建民　田颂九　王　德　王彦英　魏世泽

颜廷仁　杨文玲　殷慰萍　于旭光

(本刊编辑部)