对于 $x\leqslant a$ 的情形，设 l_1 的方程为 $y-1=k(x-a)$，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，
$x=a+(\lambda-1)/k$。令 $A(x)\geqslant 1+k(x-a)$ 的部分和 $A(x)\leqslant 1+k(x-a)$ 的部分在积分意义下相等，即隶属度增大与缩小的成分在总体上达到均衡，在几何上体现为 l_1，$A(x)$ 和 x 所围成图形的面积的代数和为零，即

$$\int_0^1 [\underline{a}(\lambda)-(a+(\lambda-1)/k)]\mathrm{d}\lambda = 0, \tag{3}$$

计算得 $\dfrac{1}{k}=2a-2\int_0^1 \underline{a}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，从而 M 点的坐标为 $(2\int_0^1 \underline{a}(\lambda)\mathrm{d}\lambda-a, 0)$。

对于 $x\geqslant a$ 的情形，设 l_2 的直线方程为 $y-1=k(x-a)$，则类似于情形 $x\leqslant a$ 的分析和讨论可得 N 点坐标为 $(2\int_0^1 \overline{a}(\lambda)\mathrm{d}\lambda - a, 0)$。

图 1　隶属均衡原则的几何结构

Fig. 1　Geometric construction of membership-balanced principle

综合上面的分析可知，采用积分意义下的隶属均衡原则可确定一个从模糊数空间 E^1 到三角模糊数空间 $E^1_\triangle$ 的映射 T：

$$T(A) = (a;[2\int_0^1 \underline{a}(\lambda)\mathrm{d}\lambda - a, 2\int_0^1 \overline{a}(\lambda)\mathrm{d}\lambda - a])。 \tag{4}$$

为叙述方便，下文中称按式(3) 确定的 T 为三角化隶属均衡算子。

定理 4　设 $A\in E^1$，$A_\lambda=[\underline{a}(\lambda),\overline{a}(\lambda)]$，$a=[\underline{a}(1)+\overline{a}(1)]/2$，则对任何 $\lambda\in[0,1]$，有

$$[T(A)]_\lambda = [a(2\lambda-1)+2(1-\lambda)\int_0^1 \underline{a}(t)\mathrm{d}t, a(2\lambda-1)+2(1-\lambda)\int_0^1 \overline{a}(t)\mathrm{d}t], \tag{5}$$

该定理可由式(1) 和式(4) 直接推出。

定理 5　设 $A,B\in E^1$，$k\in\mathbf{R}$，则 $T(A+B)=T(A)+T(B)$；$T(kA)=kT(A)$。

证明　设 $A,B\in E^1$，$A_\lambda=[\underline{a}(\lambda),\overline{a}(\lambda)]$，$B_\lambda=[\underline{b}(\lambda),\overline{b}(\lambda)]$ 分别表示 A,B 的 λ- 截集，记 $a=[\underline{a}(1)+\overline{a}(1)]/2$，$b=[\underline{b}(1)+\overline{b}(1)]/2$，则 $a+b=([\underline{a}(1)+\underline{b}(1)]+[\overline{a}(1)+\overline{b}(1)])/2$。利用式(2)、式(4) 以及 $A_\lambda+B_\lambda=[\underline{a}(\lambda)+\underline{b}(\lambda),\overline{a}(\lambda)+\overline{b}(\lambda)]$ 和定理 2 可知

$$T(A)+T(B)=T(A+B)=(a+b;[2\int_0^1[\underline{a}(\lambda)+\underline{b}(\lambda)]\mathrm{d}\lambda-(a+b), 2\int_0^1[\overline{a}(\lambda)+\overline{b}(\lambda)]\mathrm{d}\lambda-(a+b)]),$$

$$kT(A)=T(kA)=\begin{cases}(ka;[2k\int_0^1 \underline{a}(\lambda)\mathrm{d}\lambda-ka, 2\int_0^1 k\overline{a}(\lambda)\mathrm{d}\lambda-ka]), & k\geqslant 0,\\ (ka;[2k\int_0^1 \overline{a}(\lambda)\mathrm{d}\lambda-ka, 2\int_0^1 k\underline{a}(\lambda)\mathrm{d}\lambda-ka]), & k<0。\end{cases}$$

推论 1　设 $A,B\in E^1$，$k,l\in\mathbf{R}$，则 $T(kA+lB)=kT(A)+lT(B)$。

定理 5 表明，三角化隶属均衡算子关于模糊数的线性运算满足分配律，该性质将为三角化隶属均衡算子的进一步应用奠定基础。

3　隶属均衡原则在模糊线性方程组求解过程中的应用

求解模糊线性方程组是模糊规划的基本问题，但由于模糊数的加法和减法不是互逆的，因而经典的线性方程组求解方法不适用于模糊线性方程组。作为隶属均衡原则的一种应用，笔者着重介绍模糊线性方程组的一种求解方案。考察下面的实变量模糊系数线性方程：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\cong b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\cong b_2,\\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\cong b_m。\end{cases} \tag{6}$$

式中：a_{ij}，$b_i\in E^1$；$x_j\in\mathbf{R}$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$；$\cong$ 表示模糊数之间的最佳接近关系。

求解方程组(6)的常用方法有 2 种。一种是基于度量的求解方法，其实施步骤如下：

1)选择模糊数空间 E^1 上的度量(即距离函数)D；

2)计算方程组(6)中各方程两端的差异度量值 $d_i=D(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n,b_i)$，$i=1,2,\cdots,m$；

3)确定使得 $d=(d_1+d_2+\cdots+d_n)/m$ 达到最小的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的取值$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$作为方程组(6)的解。

另一种是基于水平截集的求解方法，其实施步骤如下：

1)选择适当的截集水平 λ；

2)计算方程组(6)中各方程两端的 λ 水平截集(均为区间)；

3)通过区间的端点相等将方程组(6)转化为实系数线性方程组，或者确定$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的取值$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$，使得各方程两端的截集区间在综合意义下达到最接近。

由于模糊数之间的差异度量一般难以计算，因而基于度量的模糊线性方程组求解方法属于理论层面，难以进行实际操作；而基于水平截集的求解方法却存在着截集水平难以选择的问题，选择太粗不能代表原来的方程，选择太细则常常得到冲突的结论或无法确定使各对应截集最接近的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

上面的分析表明，在模糊线性方程组求解方面尚没有通用的、可操作的求解方法，下面给出基于隶属均衡原则的模糊线性方程组的求解方法。

1)用三角化隶属均衡算子 T 作用方程组(6)的各方程两端，得

$$T(a_{i1})x_1+T(a_{i2})x_2+\cdots+T(a_{in})x_n\cong T(b_i),i=1,2,\cdots,m。\tag{7}$$

由于式(7)的左、右两边均为三角模糊数，而1个三角模糊数可以由3个点来确定，结合三角模糊数的线性运算性质，式(7)可表示为

$$(f_i^{(2)}(x_1,x_2,\cdots,x_n);[f_i^{(1)}(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_i^{(3)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)])\cong(b_i^{(2)};[b_i^{(1)},b_i^{(3)}]),\tag{8}$$

其中：$f_i^{(1)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$f_i^{(2)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$f_i^{(3)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$分别为关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性组合，$T(b_i)=(b_i^{(2)};[b_i^{(1)},b_i^{(3)}])$。

2)计算 $d=(d_1+d_2+\cdots+d_n)/m$，其中 $d_i=(f_i^{(1)}-b_i^{(1)})^2+(f_i^{(2)}-b_i^{(2)})^2+(f_i^{(3)}-b_i^{(3)})^2$。

根据 d 的构造方法可知，矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 d}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 d}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 d}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 d}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 d}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 d}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 d}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 d}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 d}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$$

为半正定矩阵，由此可知 $d=d(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的最小值点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$必定存在，且满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial d}{\partial x_1}=\dfrac{2}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}[(f_i^{(1)}-b_i^{(1)})\dfrac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_1}+(f_i^{(2)}-b_i^{(2)})\dfrac{\partial f_i^{(2)}}{\partial x_1}+(f_i^{(3)}-b_i^{(3)})\dfrac{\partial f_i^{(3)}}{\partial x_1}]=0,\\ \dfrac{\partial d}{\partial x_2}=\dfrac{2}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}[(f_i^{(1)}-b_i^{(1)})\dfrac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_2}+(f_i^{(2)}-b_i^{(2)})\dfrac{\partial f_i^{(2)}}{\partial x_2}+(f_i^{(3)}-b_i^{(3)})\dfrac{\partial f_i^{(3)}}{\partial x_2}]=0,\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \dfrac{\partial d}{\partial x_n}=\dfrac{2}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}[(f_i^{(1)}-b_i^{(1)})\dfrac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_n}+(f_i^{(2)}-b_i^{(2)})\dfrac{\partial f_i^{(2)}}{\partial x_n}+(f_i^{(3)}-b_i^{(3)})\dfrac{\partial f_i^{(3)}}{\partial x_n}]=0。\end{cases}\tag{9}$$

显然式(9)为线性方程组，从而利用常规的方程组求解方法易于得到式(9)的解$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$，并取它作为式(6)的解。

4　结　论

模糊信息的综合处理是模糊技术的核心内容，也是模糊优化理论的重要组成部分。笔者从模糊信息的可操作化综合处理角度出发，提出了用于规范模糊信息的隶属均衡原则，并针对模糊信息的三角化规范处理问题进行了具体的理论分析和应用讨论。结果表明，隶属均衡原则简单易行、可操作性强，是规范和简化复杂模糊信息的有效工具，在模糊规划、智能计算、模糊优化等众多领域都具有重要的应用前景。

(下转第208页)

第 27 卷第 3 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 27, No. 3
2006 年 9 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Sept. 2006

文章编号:1008-1542(2006)03-0193-03

薄板中导电裂纹与集中力的相互影响

孔艳平,陈长虹,段淑敏

(石家庄铁道学院工程力学系,河北石家庄　050043)

摘　要:用复变函数的保角映射法和虚拟镜像原理,采用可渗透边界条件,研究不同压电材料有限宽度薄板中半无限大导电裂纹与集中力的相互影响,详细推导了应力场、应力强度因子,结果表明:电场、应力在裂纹尖端具有1/2阶的奇异性,应力、电位移、电场强度因子与集中力和电荷的位置有关。

关键词: 压电材料;裂纹;保角变换;强度因子

中图分类号:O346　　　**文献标识码:**A

Line-force interacting with permeable interfacial crack in piezoelectric bimaterials

KONG Yan-ping, CHEN Chang-hong, DUAN Shu-min

(Department of Mechanics and Engineering Science, Shijiazhuang Railway Insititute, Shijiazhuang Hebei 050043, China)

Abstract: By complex potentials and mapping function, an interfacial crack embedded in bimaterials piezoelectric material is analyzed by using permeable boundary condition. A closed-form solution of stress and electric fields is obtained. It is shown that the strain intensity factor, stress and electric displacement are of 1/2 order singularity. Stress, electric displacement and electric intensity factor have relation with the position of the line-force and line-charge.

Key words: piezoelectric material; crack; conformal mapping; intensity factor

由于独特的力-电耦合性能,压电介质广泛地应用于智能结构中,如传感器、制动器等。但当受到力-电荷载时,制造过程中不可避免地产生各种缺陷(如裂纹、孔洞等),压电介质就可能在正常使用过程中发生破坏,因此,研究位错与裂纹、夹杂、边界的相互作用对理解材料的物理性能是十分重要的。一方面,位错会因裂纹、夹杂、孔洞或者自由面的存在而堆积于介质的某一位置,位错的积累会导致微裂纹的产生和扩展,另一方面,裂纹附近的位错能减缓或者促进裂纹的扩展[1]。近几年,一些研究者已经研究了位错与自由面[2,3]、界面[4]、裂纹[5]、夹杂[6]的相互作用。笔者利用可渗透边界条件,研究不同的条状压电材料中导电的半无限大表面裂纹与集中力的相互影响,用复变函数的保角映射法和虚拟镜像原理得到了集中力产生的电弹场和强度因子的表达式。

1　问题的描述

所研究的问题如图 1a)所示,有 2 个不同的压电材料,包含一半无限长导电裂纹,xoy 面为各向同性面,2 种材料沿 x 轴正向是完好粘结的,垂直于轴的边界上的面力和电荷为零,集中力 $\boldsymbol{b}=[p,-q]^{\mathrm{T}}$ 位于材料 A 的 $z_{\mathrm{d}}(z_{\mathrm{d}}=x_{\mathrm{d}}+\mathrm{i}y_{\mathrm{d}})$处。对于此问题,只有面外的弹性场和面内的电场是耦合的。设 w 为弹性位移,φ 为电势,

收稿日期:2006-02-24;修回日期:2006-04-15;责任编辑:王士忠

作者简介:孔艳平(1977-),女,河北献县人,硕士,主要从事新型材料力学分析方面的研究。