的相邻 2 个动态中心点动能之差的绝对值，分别用 Ke_{13}，Ke_{24} 表示。

2.2.2　典型运动的特征参数

转子系统即使经过严格的动平衡也会有残余不平衡量的存在，因此工频周期运动就成为该系统的基本运动形式。由于转子系统是多自由度强非线性系统，在数值计算、实验观测和生产实际中，均发现非线性转子系统由工频周期运动失稳为倍周期运动、概周期运动和混沌运动的现象。

转子系统常见的工频周期运动(以下简称周期运动)、倍周期运动、概周期运动在 R^1 观察空间的轨迹和动态中心点的动能差序列呈现出不同的特征。表 1 给出了不同的运动轨迹对应的稳态动能差序列的特征参数。表中 DKe_{13} 为 Ke_{13} 序列相邻 2 值的差值的绝对值；Ex 和 Dx 分别为 Ke_{13} 序列在一个样本长度内的均值和均方差；ΔEx 表示 Ex 序列的变化程度；C_1，C_2，C_3 为常数。

表 1　转子系统典型运动的特征参数

Tab. 1　Characteristic parameters for different steady motion of rotor system

运动形式	特征参数				
	Ke_{13}	DKe_{13}	Ex	ΔEx	Dx
周期运动	0	0	0	0	0
倍周期运动	C_1	0	C_1	0	0
N 周期运动	N 周期波动	N 周期波动	C_2	0	C_3
概周期运动	概周期波动	概周期波动	C_2	0	C_3

2.2.3　典型运动的轨线稳定裕度

根据表 1 中的特征参数，判断运动轨迹是否达到稳态，并确定运动轨迹的运动形式。

周期运动的轨线稳定裕度定义为动能差序列的衰减指数；倍周期运动的轨线稳定裕度定义为稳态时的特征参数取负值，即“$-Ke_{13}$”；概周期运动的轨线稳定裕度定义为稳态时的特征参数，加上负号，即“$-Ex$，$-Dx$”。概周期运动轨线稳定裕度包含 2 部分：其中“$-Ex$”用来判断周期运动到概周期运动的分岔点，“$-Dx$”用来判断倍周期运动到概周期运动的分岔点。

轨线稳定裕度为正，说明系统运动状态为周期运动，稳定裕度为负，说明系统失稳为倍周期运动或概周期运动。分岔点处稳定裕度等于零。

2.3　转子系统分岔点的预测

系统分岔点处的稳定裕度为零，故预测分岔点的问题就是求取使稳定裕度为零的参数值。当参数发生变化时，系统的稳定裕度也会相应发生变化。参数 α 的微小变化对观察空间的轨迹稳定裕度 η 的影响，可以通过 η 对于 α 的各阶灵敏度系数来反映。不论系统多复杂，总是可以用数值摄动法来求取稳定裕度在任何目标参数方向上的各阶灵敏度系数。

在得到与对象参数初始工作点 α_0 对应的稳定裕度 $\eta(\alpha_0)$后，按指定的目标方向取数值摄动量 $\Delta\alpha$，求取 $\eta(\alpha_0+\Delta\alpha)$，则用数值摄动法得到 η 对于 α 的一阶灵敏度系数为

$$S_\alpha=\frac{\eta(\alpha_0+\Delta\alpha)-\eta(\alpha_0)}{\Delta\alpha}。\tag{1}$$

求取系统的分岔点就是求取使受扰轨迹稳定裕度成为零值的参数值，记为 $\alpha_{\lim}$。为了使新的稳定裕度为零，就必须将参数 α 调整到其极限值 $\alpha_{\lim}$。基于线性假设时，

$$\alpha_{\lim}=\alpha_0-\frac{\eta_0}{S_\alpha}。\tag{2}$$

不同的运动轨迹定义了不同的稳定裕度，由于不同运动轨迹的稳定裕度量级不同，当参数 α_0 和 $\alpha_0+\Delta\alpha$ 时的运动轨迹为相同类型时，利用灵敏度系数预测临界参数；当参数 α_0 和 $\alpha_0+\Delta\alpha$ 时的运动轨迹为不同类型时，加入二分法来完成系统分岔点的搜索。

3　三跨转子系统分岔点预测

3.1　三跨转子系统动力学方程

图 2 所示为一个三跨滑动轴承转子系统，各跨之间用刚性联轴节连接，左端通过弹性联轴节与电机连接。集总质量 m_i、刚度系数 k_i 和轴颈等效负载 W_i 的计算参见文献[4]。不考虑陀螺力，由各质量几何中心坐标表示的系统的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\dot{\boldsymbol{C}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}_O+\boldsymbol{F}_e+\boldsymbol{F}_g,\tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{X}$ 为各质量位移列阵；$\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{R}^{24\times24}$ 分别为转子系统质量矩阵、外阻尼矩阵和刚度矩阵；$\boldsymbol{F}_O,\boldsymbol{F}_e,\boldsymbol{F}_g\subset\boldsymbol{R}^{24}$

分别为油膜力列阵、不平衡力列阵和重力列阵，此处采用非稳态油膜力模型。

3.2　转子系统分岔点预测

系统中各集中质量(kg)分别为0.48，0.64，0.96，0.48，0.48，0.96，0.96，0.48，0.48，0.96，0.64，0.48；各轴段刚度系数(单位：$\times 10^5$ N/kg)分别为0.763 4，3.053 6，3.053 6，0.244 3，2.294 2，2.294 2，2.294 2，0.244 2，3.053 6，3.053 6，0.763 4；各轴承的等效载荷(单位为N)分别为12.021 3，13.066 7，14.112 0，14.112 0，13.066 7，12.021 3。当各圆盘的偏心距均为0.1 mm，考虑各圆盘不平衡量方向角取表2给出的不同情形时，求系统失稳转速。

表2　算例中不平衡量方向角取值

Tab.2　Orientation angle of imbalance on spans in three cases

算例	不平衡量方向角				
	α_3	α_6	α_7	α_{10}	α_{11}
算例1	0	0	0	0	0
算例2	0	π	π	0	0
算例3	0	0	0	π	π

表3　2种算法计算得到的分岔参数值比较

Tab.3　Comparison of bifurcation parametev values calculated by two methods

算例	观察空间	基于轨迹稳定裕度预测的分岔参数值				数值计算的分岔参数值	
		初始点	初始步长	搜索次数	分岔参数值	分岔参数值	步长
算例1	Y_1	2 500	500	5	4 130	4 150	50
算例2	X_5	3 000	3 500	4	4 296	4 350	50
算例3	Y_{12}	3 000	500	7	4 273	4 300	50

图2　滑动轴承三跨转子模型图

Fig.2　Model of a three-span rotor system supported by lubricated bearings

表3给出了图2所示的三跨滑动轴承转子系统以转速 N(单位为 r/min)为控制参数、基于轨迹稳定裕度预测得到的分岔参数值与直接数值积分在Poincasé截面得到的分岔参数值。由表3中结果比较可见，利用轨迹稳定裕度结合灵敏度分析预测得到的分岔参数值与采用直接数值积分在Poincasé截面得到的分岔参数值基本一致，而且2种方法在分岔点处判断得到的分岔性质完全相同。由此可见，基于轨迹稳定裕度的非线性转子系统稳定性量化分析方法在滑动轴承三跨转子系统中的应用是可行的。

4　结　论

本文算例证实了基于轨迹稳定裕度结合灵敏度分析预测周期运动失稳参数的方法在滑动轴承多跨转子系统中是有效的，该方法由于利用了灵敏度技术，与试探法相比搜索过程大大地加快了。基于轨迹稳定裕度的非线性转子系统稳定性量化分析方法由于以轨迹特征为基础，因此它可以得到比Poincasé截面更多的信息。基于轨迹的分析特征使得该方法极易推广到高维系统，因为通过数值方法很容易求得高维系统的响应轨迹，这就为非线性转子系统动力学设计时的稳定性评估提供了工具。

注：本文曾在2004年全国振动工程及应用学术会议上进行交流。

(下转第203页)

第 27 卷第 3 期 河北科技大学学报 Vol. 27, No. 3
2006 年 9 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Sept. 2006

文章编号:1008-1542(2006)03-0185-04

依赖于一阶导数二阶三点边值问题正解的存在性

纪玉德,郭彦平,江卫华

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

摘 要:对于二阶三点边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x,x')=0,0\leqslant t\leqslant 1, \\ x(0)=0,x'(1)=\alpha x'(\eta), \end{cases}$$

其中 $f:[0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$ 是连续的,$0<\alpha<1$,$\eta\in(0,1)$,首先给出相应的 Green 函数,然后通过利用锥上的 Krasnoselskii's 不动点定理的推广形式,赋予非线性项 f 一定的增长条件,保证至少 1 个正解的存在性。

关键词:边值问题;锥;不动点定理;Green 函数

中图分类号:O175.8 **文献标识码**:A

Existence of positive solutions for second-order three-point boundary value problems with dependence on the first order derivative

JI Yu-de, GUO Yan-ping, JIANG Wei-hua

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: For the second-order three-point boundary value problem

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x,x')=0,0\leqslant t\leqslant 1, \\ x(0)=0,x'(1)=\alpha x'(\eta), \end{cases}$$

$f:[0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$ is continuous, $0<\alpha<1$, $\eta\in(0,1)$. The associated Green's function for the above problem is given first, and then, by using the extension of Krasnoselskii's fixed point theorem in a cone, growth conditions are imposed on nonlinearity f which ensure the existence of at least one positive solution.

Key words: boundary value problem; cone; fixed point theorem; Green's function

对于非线性微分方程多点边值问题的研究已经有了许多结果[1~5],在文献[6]中给出了非线性项 f 依赖于 x 的一阶导数的二阶三点边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x,x')=0,0\leqslant t\leqslant 1, \\ x(0)=0,x(1)=\alpha x(\eta) \end{cases}$$

正解的存在性,其中 $\alpha>0$,$\eta\in(0,1)$,$\alpha\eta<1$,并且 $f:[0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$ 是连续的。笔者应用文献[6]中锥上的 Krasnoselskii's 不动点定理的推广形式证明了二阶三点边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x,x')=0,0\leqslant t\leqslant 1, \\ x(0)=0,x'(1)=\alpha x'(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2005-12-31;修回日期:2006-04-15;责任编辑:张 军
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371030);河北省自然科学基金资助项目(A2006000298);河北省博士基金资助项目(B2004204)
作者简介:纪玉德(1979-),男,内蒙古赤峰人,硕士研究生,主要从事微分方程边值问题方面的研究。

正解的存在性。

假设如下条件成立：

（Ⅰ） $0<\alpha<1, 0<\eta<1$；

（Ⅱ） $f:[0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$ 是连续的。

1 预备知识

定义 设 X 是 Banach 空间，K 是 X 上的一个锥，称 γ 是 K 上的非负连续凹泛函，如果 $\gamma: K\to[0,\infty)$ 是连续的，且对所有 $x,y\in K$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$，$\gamma(tx+(1-t)y)\geqslant t\gamma(x)+(1-t)\gamma(y)$，称 β 是 K 上的非负连续凸泛函；如果 $\beta: K\to[0,\infty)$ 是连续的，且对所有 $x,y\in K$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$，则 $\beta(tx+(1-t)y)\leqslant t\beta(x)+(1-t)\beta(y)$。

设 K 为 X 上的锥，α,β 为 X 上的 2 个非负连续凸泛函，满足

$$\alpha(\lambda x)=|\lambda|\alpha(x),\beta(\lambda x)=|\lambda|\beta(x),\forall x\in X,\lambda\in\mathbf{R},$$

并且

$$\|x\|\leqslant M\max\{\alpha(x),\beta(x)\},x\in X \text{ 且 } \alpha(x)\leqslant\alpha(y),x,y\in K,x\leqslant y,$$

其中 $M>0$ 是常数。

定理 1[6] 设 $r_2>r_1>0$，$L>0$ 是常数，并且

$$\Omega_i=\{x\in X\mid \alpha(x)<r_i,\beta(x)<L\},i=1,2$$

是 X 上的 2 个有界开集，令

$$D_i=\{x\in X\mid \alpha(x)=r_i\},i=1,2,$$

另外，假设 $T:K\to K$ 是一个全连续的算子且满足：

1） $\alpha(Tu)<r_1,u\in D_1\cap K$；$\alpha(Tu)>r_2,u\in D_2\cap K$；

2） $\beta(Tu)<L,u\in K$；

3） 存在一个 $p\in(\Omega_2\cap K)\backslash\{0\}$ 使 $\alpha(p)\neq 0$ 且 $\alpha(x+\lambda p)\geqslant\alpha(x),x\in K,\lambda\geqslant 0$，则 T 在 $(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)\cap K$ 上至少有 1 个不动点。

2 主要结果

引理 1 设 $\alpha\neq 1$，则对 $y\in C[0,1]$，边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+y(t)=0, 0\leqslant t\leqslant 1, \\ x(0)=0, x'(1)=\alpha x'(\eta) \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解

$$x(t)=-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{t}{1-\alpha}\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\int_0^\eta y(s)\mathrm{d}s。$$

证明 从 0 到 t 积分 $x''(t)=-y(t)$，可得

$$x'(t)=-\int_0^t y(s)\mathrm{d}s+x'(0),$$

由边界条件 $x'(1)=\alpha x'(\eta)$，可得

$$x'(0)=\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta y(s)\mathrm{d}s,$$

$$x(t)=-\int_0^t\int_0^x y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+x'(0)t+x(0)=-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s+x'(0)t,$$

所以

$$x(t)=-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{t}{1-\alpha}\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\int_0^\eta y(s)\mathrm{d}s。$$